理論第１問

地球・月系の時間発展

科学者は地球と月の間の距離を極めて正確に決定することができる。1969 年に宇宙飛行士が月の表面に設置した特殊な鏡にレーザー光線を反射させ，光の往復時間を計測することにより（図 1 参照），この距離を決めるのである。

図 1. 天文台から送られたレーザー光線を使って地球と月の間の距離が正確に決定される。

この観測によって，月が地球からゆっくりと離れていることが，直接計測されたのである。つまり，地球と月の間の距離は時間の経過とともに増加している。このことが起こるのは，潮汐で生じたトルク（力のモーメント）によって地球の角運動量が月に移るからである（図 2 参照）。この問題では，この現象の基本的なパラメーターを導出する。

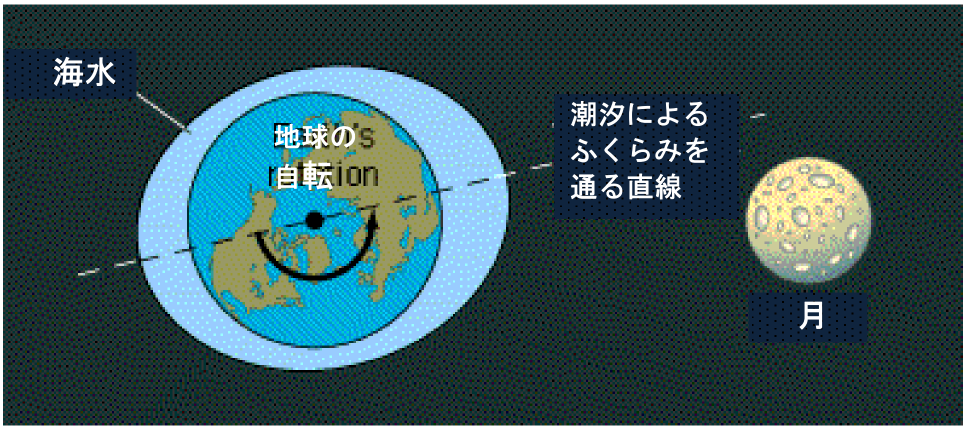

図 2. 月の重力は地球上の海水の変形（ふくらみ）を引き起こす。地球の回転により，ふくらみを通る直線は地球と月を結ぶ直線とは一致しない。この方向の違いが，地球の自転から月の公転運動に角運動量を移すトルクを発生させる。図は正しい縮尺ではない。

1. 角運動量保存則

L_1 は地球と月からなる系の全角運動量を表すものとする。ここで，以下のような仮定をする。

i) L_1 は地球の回転軸のまわりの自転の角運動量と，地球を回る軌道上の月の公転運動の角運動量との和である。

ii) 月の軌道は円であり，月は質点であるとする。

iii) 地球の自転軸と月の公転軸は平行である。

iv)計算を簡単にするため，地球の自転と月の公転運動の中心は地球の中心であると考える。また，この問題を通じて，すべての慣性モーメント，トルク，角運動量は地球の中心軸の回りに定義される。

v) 太陽による影響は無視する。

1a	この地球と月からなる系の現在の全角運動量を式で表せ。すなわち，現在の全角運動量 L_1 を，地球の慣性モーメント I_E，地球の現在の自転の角速度 ω_{E1} ,月の現在の地球中心軸の回りの慣性モーメント I_{M1} ,月の現在の公転運動の角速度 ω_{M1},を用いて表せ。	0.2

地球の自転運動から月の公転運動への角運動量の移動が終わるのは，地球の自転周期が，月の地球の回りの公転周期と同じ時間になるときである。このとき，月によって地表に引き起こされた海水のふくらみが，地球と月を結ぶ直線と一致し，トルクが生じなくなる。

1b	問 1a と同じ仮定をし，地球の慣性モーメント I_E，地球の最終的な角速度であり月の公転運動の角速度でもある ω_2，地球の中心のまわりの月の慣性モーメントを I_{M2} を用いて，地球と月からなる系の最終的な全角運動量 L_2 を表せ。	0.2

1c	最終的な全角運動量のうち，地球の角運動量は十分小さいので無視して，現在と最終的な状態の間の角運動量保存則を表す式を記せ。	0.3

2. 地球と月の最終的な距離と最終的な角速度

地球の回りを回る月についての，万有引力による円運動の方程式は常に成り立っているとする。最終的な全角運動量のうちの地球の角運動量は十分小さいので無視する。

2a	最終状態における地球の回りを回る月について考える。そのときの月についての万有引力による円運動の方程式から，以下の量の間に成り立つ関係式を記せ。地球の質量 M_E，最終的な角速度 ω_2，万有引力定数 G ,地球と月の間の最終的な距離 D_2 。	0.2

2b	地球と月の間の最終的な距離 D_2 を，地球と月からなる系の全角運動量 L_1，地球の質量 M_E，月の質量 M_M，重力定数 G という既知のパラメーターを用いて表せ。	0.5

2c	地球と月からなる系の最終の角速度 ω_2 を，既知のパラメーター L_1，M_E，M_M ，G を用いて表せ。	0.5

以下では，D_2 と ω_2 の数値解を求める。そのために，地球の慣性モーメントが必要である。

2d	地球が球であり，中心から半径 r_i までは一様な密度 ρ_i であり，半径 r_i から半径 r_o の表面までは一様な密度 ρ_o であるとする（図３参照）。この場合に地球の慣性モーメント I_E をこれらの密度 ρ_i，ρ_o と半径 r_i ，r_o を用いて表せ。	0.5

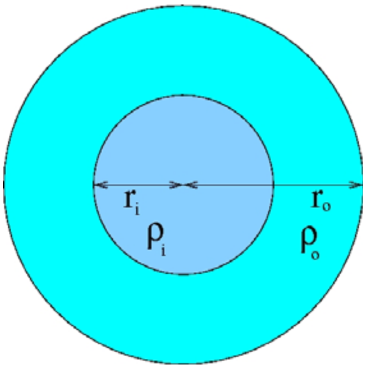

図 3　内部に２つの密度，ρ_i と ρ_o の部分をもつ球としての地球

この問題で求められている数値は，有効数字２桁で求めよ。

2e	$\rho_i = 1.3\times10^4$ kg/m^3，$r_i = 3.5\times10^6$ m，$\rho_o = 4.0\times10^3$ kg/m^3，$r_o = 6.4\times10^6$ m を用いて，地球の慣性モーメント I_E の数値を求めよ。	0.2

地球と月の質量は，それぞれ $M_E = 6.0\times10^{24}$ kg，$M_M = 7.3\times10^{22}$ kg である。現在の地球と月の距離は $D_1 = 3.8\times10^8$ m である。地球の自転運動の現在の角速度は $\omega_{E1} = 7.3\times10^{-5}$ rad/s である。月の地球の回りの公転運動の角速度は $\omega_{M1} = 2.7\times10^{-6}$ rad/s である。万有引力定数は $G = 6.7\times10^{-11}$ Nm^2 /kg^2 である。

2f	地球と月からなる系の全角運動量 L_1 を求めよ。	0.2

2g	最終的な地球と月の距離 D_2 をメートル単位で表せ。また現在の距離 D_1 の何倍であるか，有効数字２桁で求めよ。	0.3

2h	最終的な角速度 ω_2 を rad/s 単位で表せ。また，最終的な１日の長さ，すなわちこの角速度で１周する時間を現在の１日を単位として表せ。	0.3

最終的な全角運動量のうちの地球の自転の角運動量は十分小さいので無視できるとみなしたことは，最終的な地球の自転運動の角運動量と月の公転運動の

角運動量の比を求めることによって正当化されることを確かめよう。この比は小さいはずである。

2i	最終的な地球の自転運動の角運動量と月の公転運動の角運動量の比を求めよ。	0.2

3. 月は1年間にどれだけ遠ざかるか？

さて，一年にどれだけ月が遠ざかるかを調べる。そのためには，現在の月に作用するトルク（力のモーメント）を与える方程式を知ることが必要である。ここで，潮汐による海面のふくらみ分の質量が，地球表面２か所に質点（図４参照）を付け加えることに等しいと仮定する。θ を２か所の質点を結ぶ直線と，地球の中心と月の中心を結ぶ直線とがなす角とする。

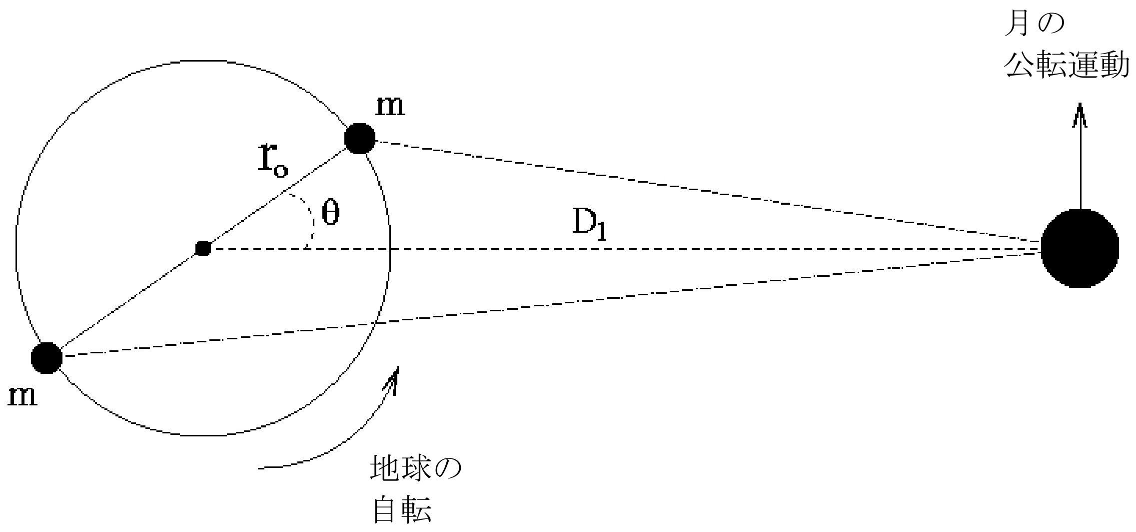

図４． 地球上のふくらみが月におよぼすトルクを試算するための模式図。図の縮尺は正確ではない。

3a	近いほうの質点から，月に対しておよぼす力の大きさ F_c を求めよ。	0.4

3b	遠いほうの質点から，月に対しておよぼす力の大きさ F_f を求めよ。	0.4

ここで，両質点により生じるトルクを試算することにする。

3c	近いほうの質点から，月に対して生じるトルクの大きさτ_cを求めよ。	0.4

3d	遠いほうの質点から，月に対して生じるトルクの大きさτ_fを求めよ。	0.4

3e	２つの質点により生じる合計のトルクの大きさτ を求めよ。ただし，$r_o << D_1$ なので，r_o / D_1の２乗以上の項は，１乗の項に比べたときは０として近似してよい。 また，$x<<1$のときには，$(1+x)^a \approx 1+ax$ としてよい。	1.0

3f	２つの質点による合計のトルクτ の数値を，$\theta = 3^\circ$ ，$m = 3.6\times10^{16}$ kg (この質量は地球の質量の10^{-8}倍であることに注意) であることを考慮して計算せよ。	0.5

トルクは角運動量の時間的変化の割合に等しいことから，現在の地球－月間の１年あたりの増加距離を求める。ここでは，月の角運動量をM_M , M_E , D_1 , G のみを用いて表すものとする。

3g	現在の地球と月の間の１年あたりの増加距離を求めよ。	1.0

最後に，以下のように，１日が１年ごとにどれだけ長くなるか，試算する。

3h	年間の角速度ω_{E1}の減少および現在１年ごとの１日の長さがどれだけ長くなるかをそれぞれ求めよ。	1.0

4. エネルギーはどこに行くのか？

角運動量が保存されているのに対して，系の全エネルギー（角運動エネルギー＋万有引力による位置エネルギー）は保存されていない。この問題の終わりに，そのことを考えてみよう。

4a	地球・月系の現在における全エネルギー（角運動エネルギー＋万有引力による位置エネルギー） E を表せ。ただし，I_E , ω_{E1} , M_M , M_E , D_1 , G のみを用いよ。	0.4

4b	全エネルギーEの変化ΔEを，D_1とω_{E1}変化量ΔD_1，$\Delta\omega_{E1}$の関数として書け。 また，１年あたりのΔEの数値を求めよ。ただし，ΔD_1，$\Delta\omega_{E1}$として，3g と 3h での結果を用いよ。	0.4

このエネルギー消失は，地球に対する月による潮汐のための発熱として，エネルギーが散逸したと見なしたものと一致することを示したい。ここで，潮汐による海面の盛り上がりを海水全体が平均 0.5 m もち上がると見なす。また，海水の層は$h=$ 0.5 m の深さで地球表面をおおっているとする（簡単のために全地球が海水におおわれていると見なす）。潮汐は１日に２回起こる。さらに，全海水が潮汐によってもち上がった分の重力による位置エネルギーの 10% が，海水が戻るときの粘性に対する発熱と見なすことにする。海水の密度は$\rho_{water}=10^3$ kg /m^3, a とし，地球表面上における重力加速度を$g=9.8$ m/s^{2}とせよ。

4c	この海水の層の全質量はいくらか。	0.2

4d	１年あたりのエネルギー散逸はいくらか。このエネルギー散逸は，地球・月系の現在の１年あたりのエネルギー消失と比較し，その大きさについて述べよ。	0.3