理論第２問　　〔解答〕

第１部：レーザー冷却の基礎

$\boxed{\mathbf{1}}$

(1-a) 原子の静止系での光の振動数 ω は,

$$\omega = \omega_L \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}$$

となる. これが $\omega_{\boldsymbol{0}}$ に等しいときに光子吸収を起こす. $v/c << 1$ より

$$\omega_{\boldsymbol{0}} \simeq \omega_L \left(1+\frac{v}{c}\right)$$

が求める条件である.

(1-b) 実験室系で見たときの光子の運動量は

$$-\hbar\omega_{\boldsymbol{0}}/c \simeq -\frac{\hbar\omega_L}{c}\left(1+\frac{v}{c}\right)$$

だから，運動量保存則より光子吸収後の原子の運動量 p_{at} は

$$\begin{aligned} p_{at} &\simeq mv - \frac{\hbar\omega_L}{c}\left(1+\frac{v}{c}\right) \\ &\simeq mv - \frac{\hbar\omega_L}{c} \end{aligned}$$

である.

(1-c)　エネルギー保存則より

$$\varepsilon_{at} = \frac{1}{2}mv^2 + \hbar\omega_{\boldsymbol{0}} \simeq \frac{1}{2}mv^2 + \hbar\omega_L$$

となる.

$\boxed{\mathbf{2}}$

(2-a) 光子吸収後の原子の速さ v' は，原子の運動量が mv' だから

$$v' = v - \frac{\hbar q}{m}$$

である. よって，放射光のエネルギーは重心系で見たときに $\hbar\omega_{\boldsymbol{0}}$ であることに注意すると, ドップラー効果により

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ph} &= \hbar\omega_{\boldsymbol{0}}\left(1-\frac{v'}{c}\right) \\ &= \hbar\omega_L\left(1+\frac{v}{c}\right)\left(1-\frac{v}{c}+\frac{\hbar q}{mc}\right) \end{aligned}$$

となる. ここで，$\hbar q/mc$ は

$$\frac{\hbar q}{mc} = \frac{\hbar q}{mv}\frac{v}{c}$$

となり，今の近時の下では 2 次の微小量だから無視できる. ゆえに,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ph} &\simeq \hbar\omega_L\left(1+\frac{v}{c}\right)\left(1-\frac{v}{c}\right) \\ &= \hbar\omega_L\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \\ &\simeq \hbar\omega_L \end{aligned}$$

を得る.

(2-b) 放射光子の運動量は

$$p_{ph} = -\varepsilon_{ph}/c \simeq -\hbar\omega_L/c$$

である.

(2-c) 原子の運動量は，運動量保存則より,

$$p_{at} = mv' - p_{ph} \simeq mv$$

となる.

(2-d) 原子の運動エネルギーは

$$\varepsilon_{at} = \frac{p_{at}^2}{2m} \simeq \frac{mv^2}{2}$$

となる.

$\boxed{\mathbf{3}}$

(3-a) (2-a) で考えたドップラー効果の式で v' の符号を反転させればよい. ここでも，$\frac{\hbar q}{mc}$ の項は無視できるから, 放射光子のエネルギーは次のようになる:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ph} &\simeq \hbar\omega_{\boldsymbol{o}}\left(1+\frac{v}{c}\right)\\ &= \hbar\omega_L\left(1+\frac{v}{c}\right)^2\\ &\simeq \hbar\omega_L\left(1+\frac{2v}{c}\right)\end{aligned}$$

(3-b) 放射光子の運動量 p_{ph} は,

$$p_{ph} = \frac{\varepsilon_{ph}}{c} \simeq \frac{\hbar\omega_L}{c}\left(1+\frac{2v}{c}\right)$$

である.

(3-c) 原子の運動量 p_{at} は，運動量保存則から,

$$\begin{aligned}p_{at} &= mv' - p_{ph}\\ &= mv - \frac{\hbar\omega_L}{c} - \frac{\hbar\omega_L}{c}\left(1+\frac{2v}{c}\right)\\ &\simeq mv - \frac{2\hbar\omega_L}{c}\end{aligned}$$

となる.

(3-d)　原子の運動エネルギーは，$q = \omega_L/c$ より

$$\begin{aligned}\varepsilon_{at} &= \frac{p_{at}^2}{2m}\\ &\simeq \frac{1}{2m}(mv - 2\hbar q)^2\\ &\simeq \frac{mv^2}{2}\left(1-\frac{4\hbar q}{mv}\right)\end{aligned}$$

となる.

$\boxed{\mathbf{4}}$

(4-a) $+x$ 方向に放射される確率と $-x$ 方向に放射される確率は等しいので, 光子のエネルギーの平均値は

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ph} &\simeq \frac{1}{2}\left[\hbar\omega_L + \hbar\omega_L\left(1+\frac{2v}{c}\right)\right]\\ &= \hbar\omega_L\left(1+\frac{v}{c}\right)\end{aligned}$$

である.

(4-b) 放射過程後の光子の平均運動量は,

$$\begin{aligned} p_{ph} &\simeq \frac{1}{2}\left(-\frac{\hbar\omega_L}{c}+\frac{\hbar\omega_L}{c}\left(1+\frac{2v}{c}\right)\right) \\ &= \frac{\hbar\omega_L}{c}\frac{v}{c} \end{aligned}$$

となる．これは二次の微小量なので,$p_{ph} \simeq 0$ となる.

(4-c) 原子の運動エネルギーの平均値は,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{at} &\simeq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}mv^2\left(1-4\frac{\hbar\omega_L}{mvc}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}mv^2\left(1-\frac{2\hbar\omega_L/c}{mv}\right) \end{aligned}$$

である.

(4-d) 原子の平均運動量は,

$$\begin{aligned} p_{at} &\simeq \frac{1}{2}\left[mv+\left(mv-\frac{2\hbar\omega_L}{c}\right)\right] \\ &\simeq mv-\frac{\hbar\omega_L}{c} \end{aligned}$$

となる.

5

(5-a) 原子のエネルギー変化の平均値は,

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon &\simeq \frac{1}{2}mv^2\left(1-\frac{2\hbar\omega_L/c}{mv}\right)-\frac{1}{2}mv^2 \\ &= -\hbar\omega_L\frac{v}{c} \end{aligned}$$

である.

(5-b) 原子の運動量変化の平均値は,

$$\begin{aligned} \Delta p &= \left(mv-\frac{\hbar\omega_L}{c}\right)-mv \\ &= -\frac{\hbar\omega_L}{c} \end{aligned}$$

となる.

6

(6-a) 光子の入射方向と原子の運動の方向が等しいので, 原子のエネルギー変化の平均値は,

$$\Delta\varepsilon \simeq \hbar\omega_L'\frac{v}{c}$$

となる.

(6-b) 運動量変化の平均値は,

$$\Delta p = \frac{\hbar\omega_L'}{c}$$

となる.

第2部:散逸と光学的シロップの原理

$\boxed{7}$

(7-a) 原子が静止している系で考える. 単位時間当たりの吸収放射過程の数は $N_{exc}\Gamma$ である. 光子の入射してくる向きで振動数のドップラー効果による影響が異なることに注意して, 原子に働く力 F は,

$$F = \frac{\hbar\omega_L}{c}\Gamma N\left(\frac{\Omega_R^2}{\left(\omega_{\boldsymbol{0}}-\omega_L\left(1-\frac{v}{c}\right)\right)^2+\frac{\Gamma^2}{4}+2\Omega_R^2}-\frac{\Omega_R^2}{\left(\omega_{\boldsymbol{0}}-\omega_L\left(1+\frac{v}{c}\right)\right)^2+\frac{\Gamma^2}{4}+2\Omega_R^2}\right)$$

となる.

$\boxed{8}$

(8-a) 問題 7 で得られた結果を v について一次までの近似で展開する.

$$\begin{aligned}F &\simeq \frac{\hbar\omega_L}{c}\Gamma N\left(\frac{\Omega_R^2}{(\omega_{\boldsymbol{0}}-\omega_L)^2+\frac{\Gamma^2}{4}+2\Omega_R^2+2(\omega_{\boldsymbol{0}}-\omega_L)\omega_L\frac{v}{c}}-\frac{\Omega_R^2}{(\omega_{\boldsymbol{0}}-\omega_L)^2+\frac{\Gamma^2}{4}+2\Omega_R^2-2(\omega_{\boldsymbol{0}}-\omega_L)\omega_L\frac{v}{c}}\right)\\ &\simeq -\frac{4\hbar(\omega_L/c)^2\Gamma N\Omega_R^2}{\left((\omega_{\boldsymbol{0}}-\omega_L)^2+\frac{\Gamma^2}{4}+2\Omega_R^2\right)^2}(\omega_{\boldsymbol{0}}-\omega_L)v\end{aligned}$$

(8-b) $F>0$ となればよいので, 求める条件は,

$$\omega_{\boldsymbol{0}} < \omega_L$$

である.

(8-c) $F=0$ となればよいので,

$$\omega_{\boldsymbol{0}} = \omega_L$$

である.

(8-d) $F<0$ となればよいので,

$$\omega_{\boldsymbol{0}} > \omega_L$$

である.

(8-e) 上の考察では, 光の入射の仕方は実験室系において左右対称なので周波数に対する条件は原子の運動の向きに寄らない. したがって, 原子を冷却するための条件は

$$\omega_{\boldsymbol{0}} > \omega_L$$

である.

$\boxed{9}$

(9-a) 原子について運動方程式を立てると,

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{4\hbar(\omega_L/c)^2\Gamma N\Omega_R^2}{\left((\omega_{\boldsymbol{0}}-\omega_L)^2+\frac{\Gamma^2}{4}+2\Omega_R^2\right)^2}(\omega_{\boldsymbol{0}}-\omega_L)v$$

である. これを,$v(t=0)=v_{\boldsymbol{0}}$ の条件下でとくと,

$$v(\tau) = v_{\boldsymbol{0}}\exp\left[-\frac{1}{m}\frac{4\hbar(\omega_L/c)^2\Gamma N\Omega_R^2}{\left((\omega_{\boldsymbol{0}}-\omega_L)^2+\frac{\Gamma^2}{4}+2\Omega_R^2\right)^2}(\omega_{\boldsymbol{0}}-\omega_L)\tau\right]$$

となる.

(9-b) 原子気体の内部エネルギーは運動エネルギーのみであると近似をすると, 古典統計力学の結果より

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT$$

となる. つまり,$T \propto v^2$ より,

$$T = T_{\boldsymbol{0}}\exp\left[-\frac{2}{m}\frac{4\hbar(\omega_L/c)^2\Gamma N\Omega_R^2}{\left((\omega_{\boldsymbol{0}}-\omega_L)^2+\frac{\Gamma^2}{4}+2\Omega_R^2\right)^2}(\omega_{\boldsymbol{0}}-\omega_L)\tau\right]$$