

物理チャレンジ2010

理論問題

2010年8月2日(月)

理論問題にチャレンジ 8:30~13:30

理論問題にチャレンジする前に下記の<注意事項>をよく読んでください。

問題は、大問3題からなります。問題は、一見難問にみえても、よく読むとわかるようになっています。どの問題から取り組んでも結構です。最後まであきらめずにチャレンジしてください。

<注意事項>

1. 開始の合図があるまで問題冊子を開けないこと。また解答用紙、計算用紙、および封筒にも手を触れないこと。封筒の表にあるチャレンジ番号と氏名を確認すること。
2. 問題冊子は24ページである。解答冊子は9枚である。
3. すべての解答は、解答用紙に記入すること。解答用紙の各ページに、必ずチャレンジ番号と氏名を記入すること。
4. 解答は、最終的な答のみではなく、解答に至る道筋も詳しく記述すること。
5. 気分が悪くなったときやトイレに行きたくなったとき、または質問がある場合は手をあげて監督者に知らせること。
6. チャレンジ開始から200分(3時間20分)経過するまでは、原則として、途中退出はできない。200分経過(11:50)後は、退出希望者は手を挙げて監督者に知らせ、すべての解答用紙(無解答の用紙も含む)は、チャレンジ番号・氏名の記入を確認の上、封筒に入れ、机の上に置いて退室する。
7. 他の参加者の迷惑にならないように静粛に解答をすすめること。迷惑行為があった場合は退出させる。
8. 終了の合図があったら、ただちにすべての解答用紙(無解答の用紙も含む)は、チャレンジ番号・氏名の記入を確認の上、封筒に入れ、机の上に置いて、監督者の指示を待つこと。
9. 問題冊子ならびに計算用紙は、持ち帰ること。

第1問 (100点)

[I] ニュートンの運動の第2法則によると，質量が m の物体に力 \vec{F} がはたらくとその物体は $\vec{a} = \vec{F}/m$ という加速度を持つ。通常この関係は

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad (1)$$

という形に書かれる。これは力学の基本的な式であり，運動方程式とよばれる。この式を使うと，力を受ける物体の運動の様子が導かれる。しかし，この法則は，どんな座標系で見ても成り立つわけではない。ニュートンの運動の法則が成り立つ座標系を慣性(座標)系という。

以下では，慣性系で見て一定の速さで円運動する物体を考える。この運動を等速円運動という。物体が単位時間あたりに回転する角度を角速度といい，これを ω (オメガと読む) と表すと，時間 Δt の間に回転する角度は $\omega\Delta t$ と表される(図1(a)参照)。なお角速度の単位は rad/s (ラジアン毎秒) である。 ω をこの単位で表すと，図1(a)の弧 $\widehat{PP'}$ の長さは $r\omega\Delta t$ に等しい。 r は円運動の半径である。

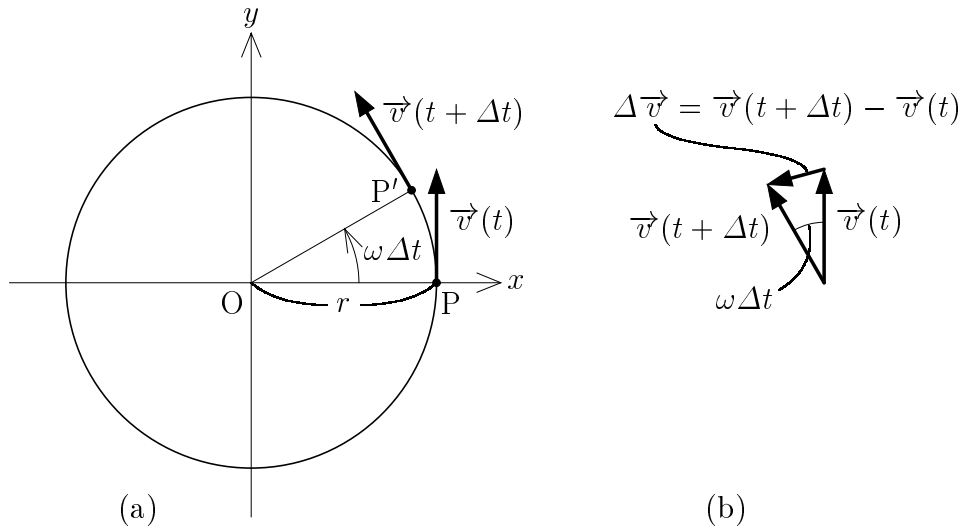


図 1

問1 半径 r の円周上を角速度 ω で等速円運動している物体の速さ v はどのように表されるか。

つぎに，等速円運動する物体の加速度と，物体に作用する力について考える。まず，図1(a)の物体の加速度を求めよう。

問2 等速円運動する物体が，時刻 t には点 P にあって，微小時間後の時刻 $t + \Delta t$ には点 P' へ変位したとする。この2つの時刻の速度ベクトルの矢印を使うと， Δt の間の速度の変化 $\Delta\vec{v}$ を表す矢印は図1(b)のように表すことができる。この物体の加速度の大きさ $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ は

$$a = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}$$

と表されることを証明せよ。ただし Δv は $\Delta \vec{v}$ の大きさである。必要なら、 b を任意の定数として、 $b\Delta t$ が1に比べて十分小さいときに成り立つべきの近似式を用いよ。

$$\sin(b\Delta t) \approx b\Delta t$$

以上から分かるように、等速円運動している物体の加速度は中心の方を向いており、これは向心加速度とよばれる。また(1)式によれば、物体には向心加速度の大きさと質量の積に等しい力が中心の方向に作用している。この力を向心力とよぶ。以後、円運動する物体の加速度と物体に作用する力は、中心向きの場合に正の値を取るものとする。

問3 図2のように、バネ定数 k のバネの一端を点 O に固定し、他端に質量 m の小さな物体をつけた。この物体が点 O を中心とする半径 r の円軌道を角速度 ω で等速円運動している。このバネの自然長からの伸び l を求めよ。

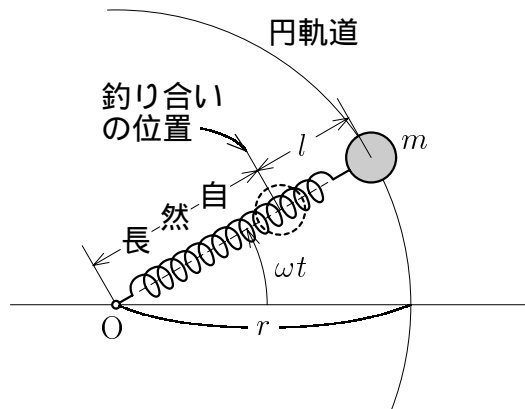


図 2

[II] 図3(a)のように、慣性系 (x, y) の原点 O を中心に角速度 ω で回転する円盤がある。この円盤に固定した (x', y') 座標系を考える。2つの座標系は原点 O を共有している。この円盤に乗ってみると、 (x', y') 座標系は静止して見える。

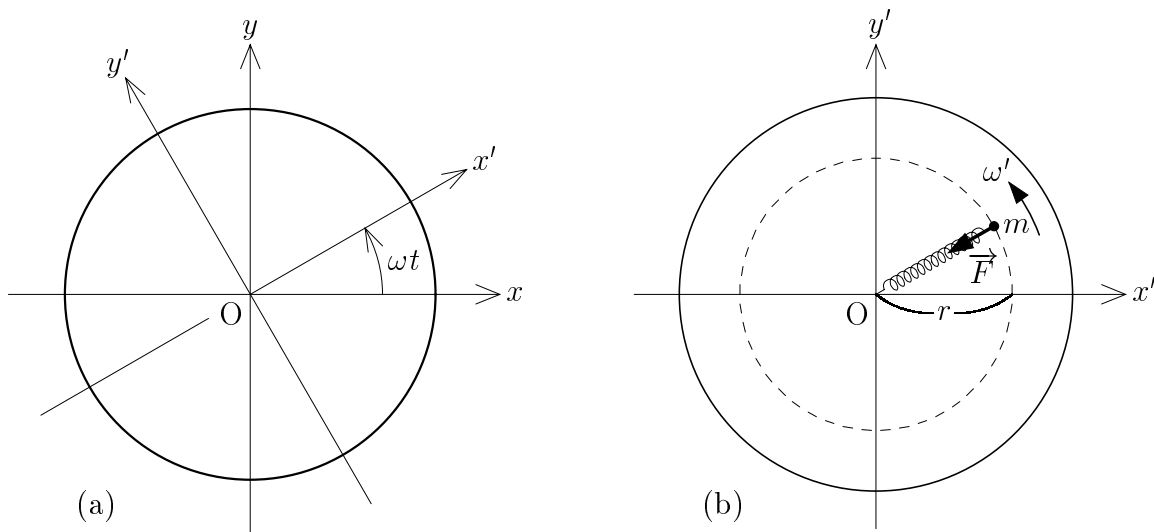


図 3

この (x', y') 座標系で見て、原点を中心とする半径 r の円周上を角速度 ω' で等速円運動する質量 m の物体を考える (図 3(b) 参照)。この物体は、中心軸とバネでつながれており、バネから大きさ F の弾性力を受けている。この弾性力が向心力の役割を果たしている。

問 4 慣性系 (x, y) でのこの物体の向心加速度を ω, ω' を使って表し、向心 (中心) 方向の運動方程式を書け。

問 5 前問で導いた式を

$$ma' = F + F_1 + F_2$$

と書き直すことにする。ただし、 a' は (x', y') 座標系で見た向心加速度である。また F_1, F_2 はそれぞれ $\omega\omega'$ に比例する項と ω^2 に比例する項である。 a', F_1, F_2 の表式を書け。

問 6 F_1 を (x', y') 座標系で見た物体の速度 v を使って書き直すと

$$F_1 = -2mv\omega$$

と表されることを示せ。ただし、速度 v の符号は、 (x', y') 座標系において物体が反時計回りに回るときを正とする。

上の問 5 の式は、回転円盤に固定された (x', y') 座標系では、慣性系 (x, y) ではたらくバネの弾性力 F のみを用いた運動方程式 $ma' = F$ は成り立たないことを意味する。運動方程式が成り立たない座標系を非慣性 (座標) 系とよぶ。慣性系に対して回転している座標系、すなわち回転 (座標) 系は非慣性系であることがわかる。

しかし問 5 の式は、 F_1, F_2 を回転系で現れる特有な力だと考えると、非慣性系でも運動方程式が成り立つことを意味している。ただし、本当の力 F はバネが加えるものであるのに対し、 F_1, F_2 はそれを加える他の物体があるわけではなく、慣性系においては実在しない力なので、見かけの力 (あるいは慣性力) とよばれる。とくに、円盤上で静止している物体にもはたらく F_2 はその符号から分かるように、つねに回転の中心から遠ざかる向きにはたらくので「遠心力」という。また物体の速度に比例する力 F_1 は「コリオリの力」とよばれる。

ここでは、物体が \bigcirc を中心とする円運動をするという特殊な場合を考えだが、回転系において一般の運動をする場合、コリオリの力は、回転軸の向きと速度の向きの両方に直交する向きで、これまで考えてきた反時計回りの回転系では速度の向きに対し右向き、時計回りの回転系では速度の向きに対し左向きになる。

問 7 地表付近にある質量 m の静止物体にはたらく重力の大きさを mg とするとき、 g を重力加速度とよぶ。ただし、ここでいう重力とは、地球とその物体との間の万有引力のほかに、地球の自転による遠心力を合わせたものである。赤道での重力加速度は、自転による遠心力の影響で、両極と比べてどのくらい小さくなるか。ただし、地球は半径が 6400 km の球であるとする。

[III] 地球上にいる私たちは地球の自転とともに回転している。北半球の緯度 θ の地点で鉛直線に沿って z 軸，水平面内で東向きに x 軸，北向きに y 軸を取った座標系を考えよう。この座標系は地球の自転とともに原点が移動するだけでなく x, y, z 軸の方向も変化する。地球が1回転自転して原点が A, B, C, D を経て元の点 A に戻るとき， y 軸の方向は図4(a)の AP の方向から BP, CP, DP の方向を経て，再び AP の方向へ戻る。いま，底面 $ABCD$ ，頂点 P の円錐の側面（斜面）を AP で切って広げると図4(b)のようになる。展開図の A' は，展開前の A の位置に対応する。地球が1回転したとき， y 軸は z 軸の回りに AP の方向から $A'P$ の方向まで回ったことになる。

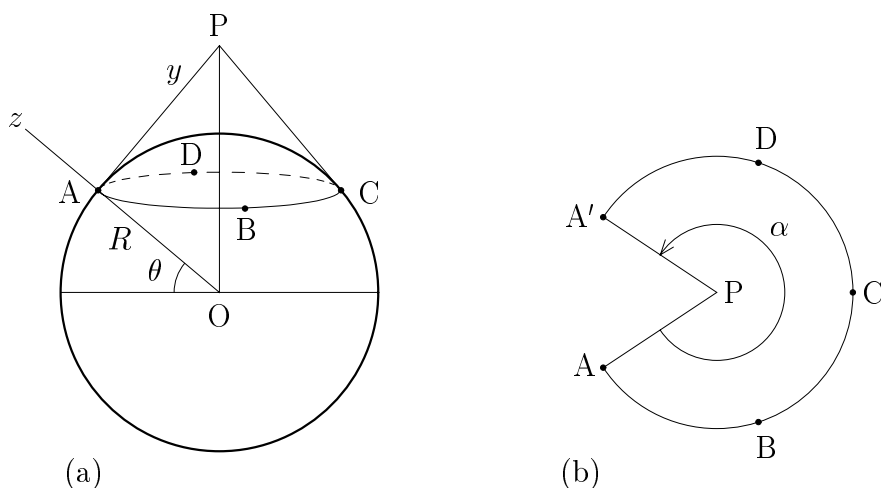


図 4

問8 地球が1回転自転するとき，すなわち角度 2π だけ回転するとき，緯度 θ の地点に固定した座標系の y 方向の， z 軸まわりの回転角は，図4(b)の角度 $\alpha = \angle APA'$ に等しい。このことから，地球の自転の角速度を ω とするとき，緯度 θ の地点に固定した座標系の鉛直軸（ z 軸）まわりの角速度 ω' はつぎの式で与えられることを示せ。

$$\omega' = \omega \sin \theta$$

緯度 θ の地点で水平方向に速さ v で運動している物体には，角速度 ω' の回転系におけるコリオリの力が，水平面内で速度に垂直方向に（北半球では進行方向に対して右方向に）作用する。コリオリの力は重力に比べて小さいので，通常の物体の運動を扱うときには無視してさしつかえないが，大気の運動を扱うときには重要な役割を果たす。詳しい理論によれば，水平に運動する物体に作用するコリオリの力は，一般には鉛直方向成分ももつが，大気の水平方向の運動を取り扱うときには問題にはならない。

大気圧 p が x 方向に一様に増加しているとしよう。気圧勾配によって生じる力（気圧傾度力）のみを考えると，大気は圧力の高い方から低い方へ流れることになる。しかし，コリオリの力がつねに大気の流れに対して右向きに作用するので，定常的な大気の流れは等圧線に平行に，圧力の高い方を右手に見るように生じる。このような大気の流れを地衡風という（図5参照）。ただし大気が地表から受ける摩擦の影響は考えていない。以下では大気の密度を ρ （ローと読む）とする。

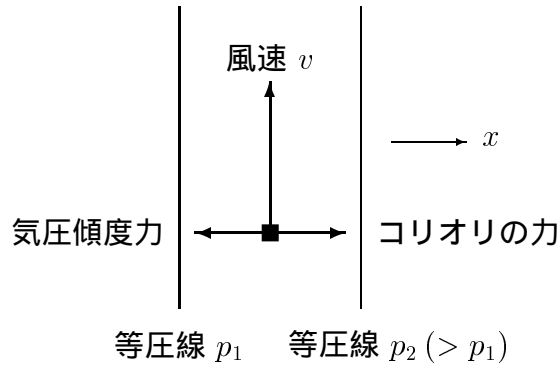


図 5

問 9 単位体積あたりの大気に作用する気圧傾度力 f が

$$f = -\frac{\Delta p}{\Delta x} = -\frac{dp}{dx}$$

と表されることを示せ。つぎの図 6 を参考にせよ。なお負号は力の方向が圧力の減少する向きであることを意味する。

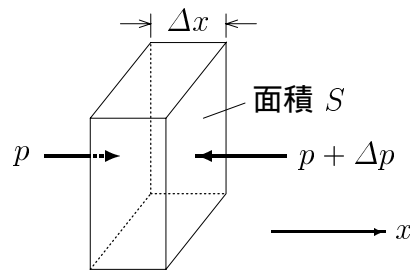


図 6

問 10 緯度 θ において風速 v で運動している大気に作用するコリオリの力の大きさは単位体積当たり $2\rho\omega v \sin\theta$ と表される。大気に作用する気圧傾度力とコリオリの力の釣り合いの条件から、緯度 θ における地衡風の風速 v を、圧力勾配の大きさ $\left|\frac{dp}{dx}\right|$ 、大気の密度 ρ 、地球の自転の角速度 ω を用いて表せ。ただし大気の密度 ρ は一定と扱ってよい。また $\sin\theta$ が 0 となる赤道付近のことは考えなくてよい。

問 11 北緯 35° において、大気圧の勾配を $1 \text{ hPa}/100 \text{ km}$ とするとき、地衡風の風速を計算せよ。ただし大気の密度は $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$ とする。($1 \text{ hPa} = 100 \text{ Pa}$)

なお地表付近では地面との摩擦による抵抗力を受けるので、図 7 に示すように、定常的な風向は気圧の低い側へかたよる。このとき気圧傾度力、コリオリの力、抵抗力の 3 力が釣り合いの状態にある。

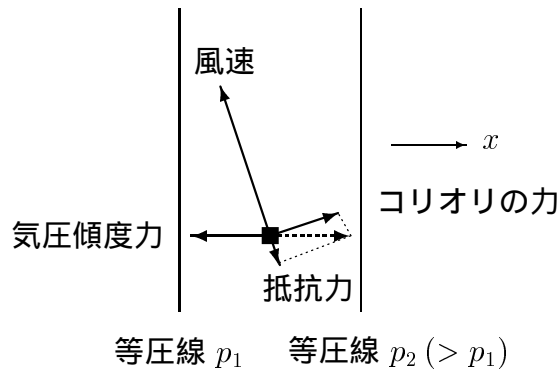


図 7

つぎに、大気圧が地表に垂直な固定軸のまわりに軸対称であり、中心からの距離とともに単調に変化しており、大気は、水平面内で中心から半径 r の円周に沿って速さ v で定常的な円運動をしているとしよう。これは $\frac{dp}{dr} < 0$ の場合には高気圧の、 $\frac{dp}{dr} > 0$ の場合には低気圧のモデルである。地衡風の風向を考慮すれば、高気圧の場合には大気の流れは等圧線に沿って時計回り、低気圧の場合には等圧線に沿って反時計回りとなる。このような風を傾度風とよぶ。

問 12 大気単位体積について、気圧傾度力 $\left| \frac{dp}{dr} \right|$ とコリオリの力 $2\rho\omega v \sin\theta$ の差が円運動の向心力 $\frac{\rho v^2}{r}$ を与えると考えて、高気圧と低気圧の場合について、それぞれ、大気の流れの速さ（風速） v を r と $\left| \frac{dp}{dr} \right|$ を使って表せ（図 8 参照）。なお v についての 2 次方程式を解くと解は 2 つ出てくるが、 $\frac{dp}{dr} = 0$ のとき $v = 0$ となる方を採用すること。また大気密度 ρ は一定と扱ってよい。

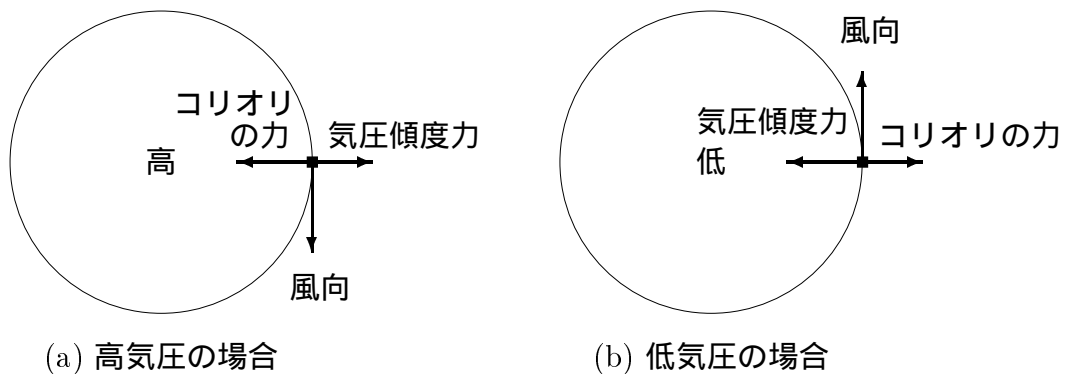


図 8

問 13 この結果から、発達した低気圧の一種である台風のように、中心に向かって気圧傾度が非常に大きくなり、猛烈な強風をもたらすということは、高気圧の場合にはありえないことを説明せよ。

第2問 (100点)

(第2問の多くの問に共通して出てくる物理量の数値は第2問の最後にまとめてあるので、必要なら参照して使いなさい。)

[I] 荷電粒子の力学

物質はミクロに見ると原子からなり、さらに原子は中心にある1つの原子核とそれを取り巻く電子からなる。なかでも電子については、100年あまり前にJ.J.Thomsonによって発見されて以来、電気現象の研究の主役であり続けている。ここでは、電子を中心として、電気現象に関わる問題について考えてみよう。

電子の電荷は負であるが、原子核中の陽子の電荷は正であり、原子の中には正負の電荷が同数あるため、その集団である物質では電気的中性が保たれている。電子と陽子をもつ電気量は、それぞれ $-e$ と $+e$ である。ここに出てきた e は電気素量とよばれ

$$e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$$

である。右辺の C は電荷の単位で「クーロン」と読む。自然界では、通常、 e より小さい絶対値の電荷は存在しない。電子の質量 m_e は陽子の質量 M_p に比べて非常に小さく、およそ $1/1800$ にすぎない。

2つの点電荷の間には、それらの電荷が同符号であれば斥力が、異符号であれば引力がはたらく。この力はクーロン力とよばれ、2つの点電荷の電気量を Q, q とし、電荷間の距離を r とすれば、その大きさは

$$F = k \frac{Qq}{r^2} \quad (1)$$

で与えられる(クーロンの法則)。ただし、 F は $F > 0$ なら斥力、 $F < 0$ なら引力を表すものとする。ここに k は比例係数で、クーロン係数とよぶ。

私たちが利用する実用上の電気に対しては、SI基本単位として電流 1A が定義されている。1Aの電流が流れる導線の1つの断面を 1s 間に通過する電気量が 1C である。静電気現象においては 1C という電気量は大変大きく、1m 隔てた 1C の点電荷の間にはたらく力の大きさ F はおよそ $9.0 \times 10^9 \text{ N}$ であり、この力は質量 90 万トンの物体を持ち上げるのに必要な力に相当する。

問1 水素原子中では陽子と電子が互いに引き合っている。安定な水素原子の両者の間の距離は約 $5 \times 10^{-11} \text{ m}$ である。陽子と電子はどれだけのクーロン力で引き合っているか。

問2 水素原子の陽子と電子の間にはたらく万有引力の大きさ F_G は、万有引力定数を G として

$$F_G = G \frac{m_e M_p}{r^2} \quad (2)$$

と書ける。この力の大きさを求め、問1で求めたクーロン力の大きさとの比を求めよ。

さて、ある点に点電荷 Q があったとすると、そのまわりの他の点電荷 q には点電荷 Q からのクーロン力がはたらく。電荷 Q がなければ q にはこのような力がはたらかないから、その

ような電氣的な力をもたらす空間が電荷 Q によって作られていると考えることができる。その空間を「電場」とよぶ。ある点の電場の強さ E は、その点におかれた点電荷 q にはたらく力が $F = qE$ と表されるように定義する。(1) 式で与えられるクーロン力の大きさ F を qE に等しいと置いて、電荷 Q から距離 r のところの電場の大きさ E は、

$$E = k \frac{Q}{r^2} \quad (3)$$

となる。クーロン力がベクトル量であるから、生じる電場もまたベクトル量である点に注意しよう。この電場を導入したときは、点電荷 q は (1) 式の力を点電荷 Q が作った電場から受けると考える。

ところで、物体が、地表付近をある速さで運動しているとき、一般に速さも高さも時間とともに変わるのに、速さの 2 乗に比例する運動エネルギーと高さのみの関数で表される位置エネルギーの和として定義される力学的エネルギーは一定であるという法則がある。これは、力学的エネルギー保存の法則とよばれるが、同じ法則は、電場中を運動する荷電粒子に対しても成り立つ。ただし、受ける力の性質が変わるので位置エネルギーの形も変化する。電場中の荷電粒子のエネルギー保存則を導いてみよう。

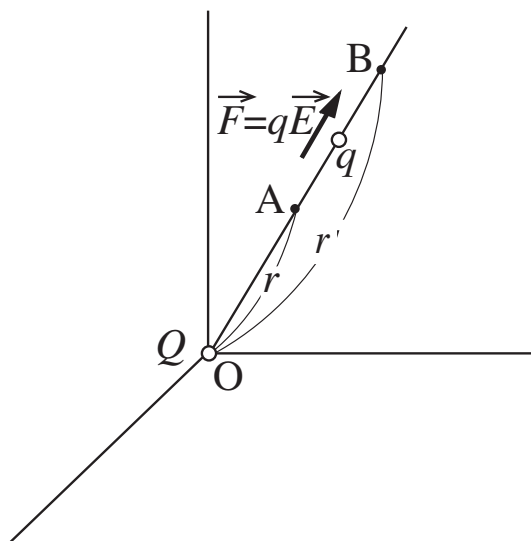


図 1

図 1 のように、座標原点に点電荷 Q を固定する。いま、質量 m 、電氣量 q の粒子を原点から距離 r の点 A において静止させた後、手を離すという仮想的な実験をする。図 1 は斥力 ($qQ > 0$) の場合である。すると、点電荷 q は電場から、 \vec{OA} の向きのクーロン力を受ける。点電荷 q が微小距離 Δr だけ移動したとき、これになされた仕事は電場の強さ E を用いて $qE\Delta r$ と書くことができる。したがって、点電荷 q が図 1 の点 A から、原点から距離 r' の点 B まで運動する間に電場からの力によりなされた仕事 W は、つぎのように積分を用いて表し、計算することができる。

$$W = \int_r^{r'} qE(r)dr = \int_r^{r'} k \frac{Qq}{r^2} dr = kQq \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) \quad (4)$$

図 1 では斥力 ($Qq > 0$) で $r' > r$ の場合を示したが、(4) 式の計算は Q と q の電荷の符号にかかわらず、また r' と r の大小にかかわらず正しい結果を与えている。

一般に、物体が仕事をされると、なされた仕事 W に等しい量の運動エネルギーを得る。したがって、図 1 の点電荷 q が点 A から点 B まで移動する間に、その運動エネルギーも (4) 式で計算された分だけ増える。

問 3 点 A で静かに放された粒子が点 B を通過したときにもつ運動エネルギーを計算し、そのときの粒子の速さを求めよ。また、 $r' > r$ となるための条件、および $r' < r$ となるための条件を示せ。

(4) 式の導出に当たっては簡単のため、荷電粒子 q は原点を通る直線に沿って運動する場合を考えたが、詳しい解析によると、原点に固定された電荷 Q からクーロン力を受けて、荷電粒子 q が原点から距離 r の位置から r' の位置が変わるとき、粒子がクーロン力によってなされる仕事はその間の経路によらず (4) 式のようになる。このことは仕事が途中の経路によらず初めの位置と最後の位置だけで決まることを意味しており、位置エネルギーが定義できることを保証している。

問 4 最初この粒子が原点から距離 r_1 の位置において速さ v_1 であったとし、原点にある電荷 Q からのクーロン力を受けて、原点からの距離 r_2 の位置まで移動し、その速さが v_2 となったとする。このとき、速さ v_1 と速さ v_2 の関係を求めよ。また、位置エネルギーを最初の位置において $V(r_1)$ 、最終の位置において $V(r_2)$ とし、粒子の運動エネルギーと位置エネルギーの和が保存することから、位置エネルギー $V(r)$ を定めよ。なお、位置エネルギーは原点から距離 r_0 の位置において 0 となるようにせよ。

このクーロン力の場合のように位置エネルギーが定義でき、力学的エネルギー保存則が成り立つ力を保存力という。全ての力が保存力であるわけではない。(2) 式で表わされる万有引力も保存力であるが、これはクーロン力と同様に、2 粒子間を結ぶ直線の間にはたらし、その間の距離のみの関数であることによっている。摩擦力などは保存力でない例である。

問 4 で導入した $V(r)$ を q で割ったもの、すなわち、単位電荷あたりの位置エネルギーを原点から距離 r の位置での電位という。多数の電荷が電場を作っているときは、それぞれの電荷による電位の和が、電荷の集合が作る電位になる。

2 つの場所の電位の差を、その 2 点間の電圧といい、その単位は V (ボルト) である。電子を 1V の電圧で加速したときに電子が得る運動エネルギーを 1 電子ボルトといい、 1eV と記す。 $1\text{eV} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ J}$ である。

[II] 金属中の電子の運動 (1)

原子の集合体である物質の中で電気を通しやすいものを導体という。金属は典型的な導体である。金属中には原子に束縛されない、いわゆる自由電子が充満している。金属導線の両端に電圧を加えると、導線中に電場が生じ、それによって自由電子の流れが生じる。これが電流である。この電流と電圧の関係について調べよう。

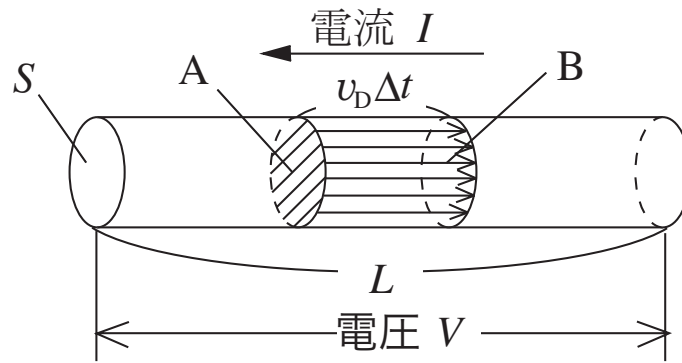


図 2

図2のように、断面積 S 、長さ L の導線の両端に電圧 V をかけ、大きさ I の電流が流れている場合を考える。電流として流れる自由電子の単位体積あたりの数を n と表し、数密度とよぶ。これと1個の電子の電荷 ($-e$) との積 ($-en$) は単位体積あたりの電気量、すなわち、電子の電荷密度を表す。これらの自由電子はすべて等しい速度 v_D (ドリフト速度という) で動いていると考えてみる。ただし、電荷が負の粒子の流れでは、ドリフト速度の向きは電流 I の向きとは反対である。

あるとき図2に斜線で示した断面 A を通った荷電粒子は、時間 Δt の後には $v_D \Delta t$ 離れたところにある断面 B に至る。したがって、この Δt の間に断面 A を通過した荷電粒子は A と B の間にある。円柱 AB の体積 $Sv_D \Delta t$ に電荷密度 ($-en$) をかけて Δt で割ると、単位時間あたりに断面 A を左から右に通過する電荷 $(-e)nv_D S$ を得る。導線中を右から左に流れる電流 I の強さはこの符号を反転させて、

$$I = env_D S \quad (5)$$

となる。なお、金属中にはこの電子を放出して後に残った陽イオンが電子の負電荷を中和する数だけ存在するが、こちらは動かないものとする。

長さ L 、断面積 S の導線があるとき、その導線の抵抗の大きさ R は

$$R = \frac{\rho L}{S} \quad (6)$$

で与えられる。ここで、 ρ (ローと読む) は電気抵抗率で導線の材質により異なり、温度とともに変化する。電気抵抗率の単位は Ωm (Ω は電気抵抗の単位オーム) である。温度が上昇すると、導線を構成する原子やイオンの熱振動が激しくなり自由電子の運動を制限するので電気抵抗率は大きくなる。その温度依存性は、室温付近で、

$$\rho = \rho_0 (1 + at) \quad (7)$$

と表される。ここで、 ρ_0 は 0°C のときの抵抗率、 t は摂氏温度、 a は抵抗率の温度係数で、単位は $1/^\circ\text{C}$ である。白熱電球の場合は、電圧を上げるとタングステンのフィラメントに流れる電流が増加し、熱が発生してフィラメントが高温になるので、抵抗が電流とともに増加する。

問5 常温 $T = 300\text{ K}$ の状態で、断面積 0.173mm^2 で長さが 10m の銅の針金に 1V の電圧をかけて電流を流した。このとき、電子のドリフト速度 v_D を計算せよ。ただし、 0°C の

ときの銅の抵抗率は $\rho_0 = 1.55 \times 10^{-8} \Omega\text{m}$, 温度係数は $a = 4.3 \times 10^{-3} / ^\circ\text{C}$ である。[絶対温度と摂氏温度の間の $T [\text{K}] = 273 + t [^\circ\text{C}]$ の関係にも注意せよ。また, 銅の自由電子の数密度は 14 ページに書いてある。]

つぎに電気抵抗率 ρ を金属電子の力学の立場から考えてみよう。長さ L の導線の両端に電圧 V を加えると, 導体内には大きさ $E = \frac{V}{L}$ の一様な電場が生じる。この導線内を移動する電荷 ($-e$) の自由電子は, 電場から電場と逆の向きに大きさ $eE (= \frac{eV}{L})$ の力を受けて加速される。一方, 加速されてドリフト速度をもつようになった電子には, イオンの熱振動や, わずかに入っている不純物イオンなどから, ドリフト速度とは反対向きの抵抗力がはたらく。この2つの力のつり合いにより, 電子は一定のドリフト速度 v_D で電場とは逆向きに移動する。このときはたらく抵抗力の大きさは, 比例係数(抵抗係数とよぶ)を γ として $\gamma m v_D$ と表される。このような金属中の電気伝導の考え方は, ドルデー (Drude) によって100年以上も前に提唱された。

問6 導線中の電子に対する電場による力と上で述べた抵抗力との釣り合いの条件から, 電子のドリフト速度 v_D を, 質量 m_e , 電荷 e , 抵抗係数 γ および電場 E を用いて表せ。

問7 以上のことから, 導体の電気抵抗率 ρ を m_e, e, n, γ を用いて表せ。

これまで, すべての電子は共通の速度 v_D で運動していると考えてきたが, 本当は, すべての電子は金属中をいろいろな速度で動き回っている。しかし, 電場がないときは, どの向きに運動する電子も同じ割合で存在し, 電子の速度のベクトル和をとると0になり, 正味の流れが生じないのである。ところが, 電場が加わると電場と反対向きの速度をもつ電子の数がわずかに増え, 電子の速度の平均値が0でない値として残る。この速度の平均値がドリフト速度である。

この電子の運動は, 量子効果により, $T = 0 \text{ K}$ でもなくなる。典型的金属の場合, この自由電子の平均運動エネルギーは数 eV の程度である。一方, 自由電子を古典論で取り扱うと, その平均運動エネルギーは絶対温度に比例し, その値も常温 (300K) では 10^{-2} eV の程度で典型的金属の自由電子の値より2桁ほど小さい。このように量子論に従う金属の自由電子の振る舞いは古典論に従うとした場合と全く異なっている。

問8 銅の自由電子の平均運動エネルギーは, 4.2 eV である。この平均運動エネルギーを持つ電子の速さを求めよ。また, 問5で求めたドリフト速度 v_D とこの電子の速さとの比を求めよ。

[III] 金属中の電子の運動 (2)

真空中に間隔 d で置かれた十分に広い等しい面積 S の2枚の平行板に, 電気量 $\pm Q$ の電荷をそれぞれ一様に分布させると, 2つの平面の間には面に垂直に一様な電場 E ができる。その大きさは間隔 d が十分小さいときは d によらず,

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \quad (8)$$

となる。ここに ϵ_0 は、クーロンの法則に出てきた比例係数 k を使って、 $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k}$ と表される定数で、真空の誘電率とよばれる。

さて、金属中の自由電子群が、何らかの原因で、一斉に母体の陽イオン群に対して x -方向に小さな等しい変位をしたとすると、図3のように、その金属の右端に電子のみの負に帯電した層、左端に電子が欠落した陽イオンのみの正に帯電した層ができる。

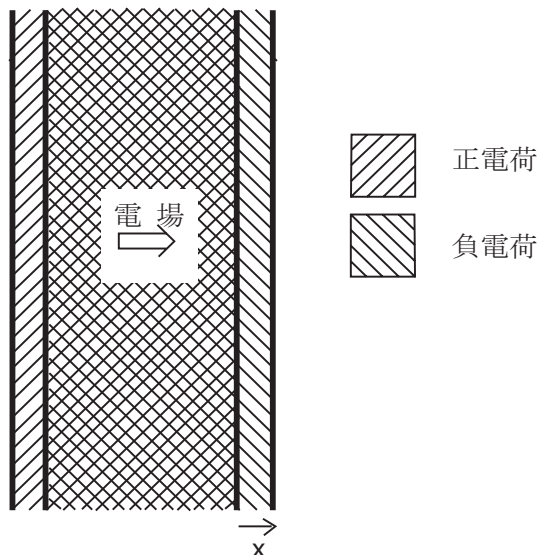


図 3

問9 電子の変位を x とし、それに垂直な断面積を S 、金属中の自由電子の数密度を n とすると、右端に生じた電気量は、 $Q = -enxS$ となることを示せ

陽イオンは空間に固定されていて、自由電子のみが運動するとする。このとき図3に示したように、両端には $\pm Q$ の電荷が平板状に対置している。したがって、この状態で金属中には、一様な電場 $E = -\frac{Q}{\epsilon_0 S}$ が生成されている。その向きは図3に示す方向で、自由電子群の個々の電子はこの電場による力 $F = -eE$ を受けて右から左に加速され、変位する前の元の平衡位置に戻ろうとする。しかし、電子には慣性があるため、平衡位置を通りすぎて、今度は、左端に自由電子のみの負に帯電した層、右端に電子が欠落し正に帯電した層ができる。この状態では、左右の平板状の電荷の符号が逆転し、内部の電場の向きも逆転するので、今度は、電子群は逆向き（左から右に）に加速され、ふたたび最初の変位に戻る。こうして、自由電子群は平衡位置の回りを振動する。この振動をプラズマ振動といい、その角振動数をプラズマ角振動数という。ただし、いろいろな振動現象において、振動数 f と角振動数 ω の両方が用いられるが、その間には $\omega = 2\pi f$ という関係がある。

問10 金属中でプラズマ振動をしている電子の運動方程式は

$$m_e \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{ne^2}{\epsilon_0} x$$

となることを示せ。ただし、電子の変位 x を使うと電子の加速度は $\frac{d^2 x}{dt^2}$ と表される。

問 11 問 10 で求めた運動方程式の解は、 $x = A \sin \omega_p t + B \cos \omega_p t$ (A, B は定数) と書かれる。この ω_p がプラズマ角振動数である。 ω_p を e, n, m_e, ε_0 を用いて表せ。ただし、

$$\frac{d^2}{dx^2} \sin(ax) = -a^2 \sin(ax), \quad \frac{d^2}{dx^2} \cos(ax) = -a^2 \cos(ax)$$

の関係を使ってよい。

問 12 銅の自由電子のプラズマ角振動数はいくらか。

通常、プラズマ振動は電子集団の十分速い振動なので、質量が大きいイオンの運動や、[II] で述べたイオンによる散乱の効果は無視して差し支えない。しかし、放置しておけば、やがて電気抵抗により電子の集団の振動は止まり、空間的に一様な平衡状態に戻る。

ここまでは、金属内部の自由電子が変位することによってできた電場のみを考えてきたが、ここで金属表面に外部から振動電場が到達したときのことを考える。金属に静電場を加えると、金属内部に静電場が存在できないように静電誘導が起きて金属表面から内部へ電場は侵入できない。同様に振動数が十分小さい振動電場も金属内部には入れない。一方、振動数の非常に大きい振動電場が照射されたときは、自由電子は慣性があるために振動電場について行けずほとんど静止したままである。したがって、そのような振動電場は自由電子の影響をほとんど受けずに金属内部を透過して行く。

詳しい計算によると、角振動数がプラズマ角振動数より小さな電磁波は金属の表面で反射され、プラズマ角振動数より大きな角振動数の電磁波は金属の中に入って行く。

問 13 典型的な金属のプラズマ角振動数は 10^{16} rad/s より大きい。角振動数が 10^{16} rad/s の電磁波の真空中での波長を求めよ。

問 14 金属が光沢をもっているのはなぜか。可視光線の波長域を念頭において答えよ。

参考資料

1. 電気素量： $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C
2. 電子および陽子の質量： $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ kg, $M_p = 1.67 \times 10^{-27}$ kg
3. クーロン係数： $k = 9.0 \times 10^9$ Nm²/C²
真空の誘電率： $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8.85 \times 10^{-12}$ C²/Nm²
4. 1eV = 1.60×10^{-19} J
5. 銅の自由電子の数密度： $n = 8.5 \times 10^{28}$ m⁻³
6. 可視光線の波長領域： $\lambda = 3.8 \times 10^{-7}$ m \sim 7.8×10^{-7} m
7. 真空中の光の速さ： $c_0 = 3.00 \times 10^8$ m/s
8. 万有引力定数： $G = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm²/kg²

(余白)

第3問 (100点)

光は、電場と磁場の振動が結合して伝播する電磁波であることが知られている。自由空間を伝わる電磁波は、電場と磁場が互いに垂直方向に振動し、それらに垂直に空間を伝わる横波である。電磁波の電場、磁場の振動の山や谷（波面）が移動する速さは、真空中では振動数や波長（すなわち光の色）によらず一定で、その値は約 3.00×10^8 m/s である。

電磁波は水や空気など、等方的な物質中では真空中と同じように伝播するが、物質中で光の波面が移動する速度（光の速度） c は振動数に依存しかつ物質ごとに異なる。物質中の光速度 c の真空中の光の速さ c_0 に対する比の逆数が屈折率 $n = \frac{c_0}{c}$ であり、光の伝播を決める重要な物理量である。通常の媒質では屈折率は正である。しかし、最近のナノテクノロジーを駆使すると、屈折率が負の値 ($n < 0$) を持つ透明な媒質を作ることが可能である。このような人工の光学材料はメタマテリアルとよばれ、光の伝播が正の屈折率の媒質の場合に比較して特異な振る舞いをする。メタマテリアル中では、光の波面が移動する方向は光のエネルギーが伝わる向きと逆になる。このことは、光のエネルギーが伝播する向きを正とすると、波面の移動する速度 c が負であり、振動数 f と光の速度を使って $k = \frac{f}{c} = \frac{nf}{c_0}$ のように定義される波数 k が負になることを意味する。

本問では、正の屈折率を持つ媒質の中での光の屈折の法則やメタマテリアル中での光の伝わり方を考えるとともに、ドップラー効果と天体観測の関係を考えてみよう。

[1] スネルの法則

図1のように、光が水から空気中へ境界面に斜めに入射する場合を考えよう。

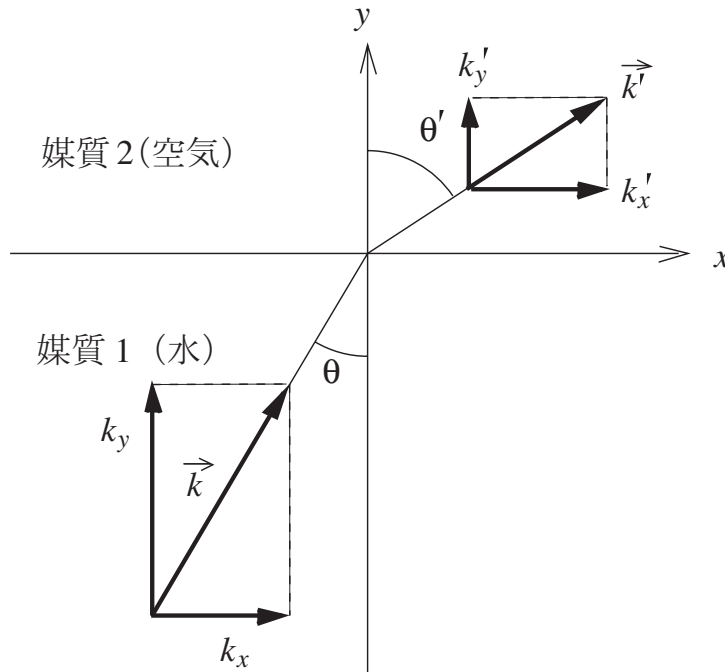


図 1

水と空気の境界面に垂直に y 軸を選び、境界面に沿って x 軸を選ぶ。図1のように y 軸に対して角度 θ の方向から光が入射するとき、 x 方向の波数 k_x と、 y 方向の波数 k_y を $k_x = k \sin \theta$ 、および $k_y = k \cos \theta$ として、波数ベクトル \vec{k} を (k_x, k_y) によって定義する。波数ベクトル \vec{k}

の方向は、波面に垂直で、その向きは波面の進む向きである。一般に、光が2つの媒質1と媒質2の境界を通過するとき、波数ベクトルの x 成分（境界面に沿った成分）は境界面で連続になり、その上下で同じ値をもつことが知られている。

以下では角度の単位には rad を使う（ただし $1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi}$ である）。

問1 上記の光の性質を用いて、水の屈折率を n 、空気の屈折率を n' として、水中から空気中に出て行く光の入射角 θ および屈折角 θ' と n および n' の関係が、 $n \sin \theta = n' \sin \theta'$ （スネルの法則）となることを示せ。

問2 水の屈折率を $n = 1.33$ 、空気の屈折率を $n' = 1.00$ として、入射角 θ が $\frac{\pi}{4}$ rad のときの屈折角 θ' を求めよ。

問3 屈折角が $\frac{\pi}{2}$ rad になる入射角を臨界角とよぶ。これより大きい入射角の光は境界面ですべて反射される（全反射）。水中から空気中に出てゆく光の臨界角を求め、光が水の表面ですべて反射されるための入射角に対する条件を示せ。

屈折率が正の媒質から負の媒質（メタマテリアル）に光が斜めに入射するとき、境界面の上下で波面は連続でなければならないので、波数ベクトルの x 成分は上下で等しく、屈折角は負となる。したがって波面は図2に示すようになり、メタマテリアル中での光の波面の進む方向は、光の伝播方向（光のエネルギーの流れる方向）とは逆になる。これらのことより、つぎの問に答えよ。

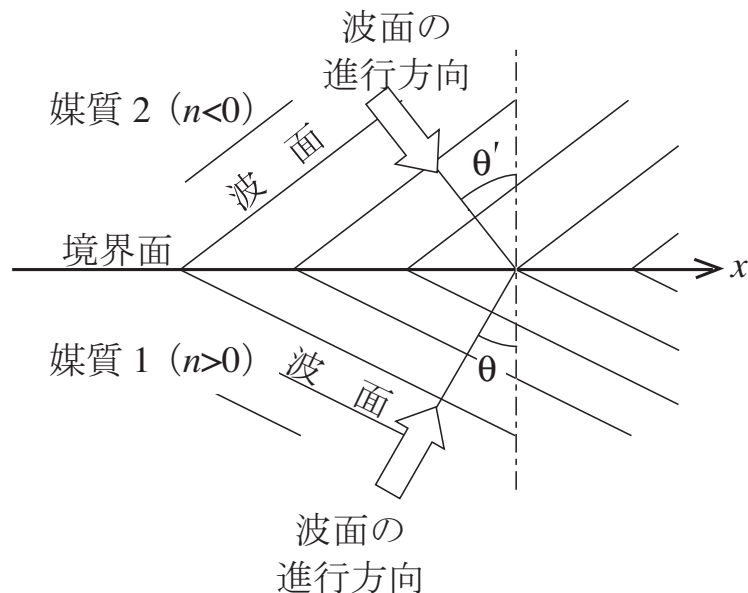


図 2

問4 屈折率 $n' = -1.00$ のメタマテリアル中に空気中 ($n = 1.00$) から光が図3の①, ②, ③の方向から入射するとき, それぞれの光線の屈折角を求め, 屈折光の伝播方向を解答用紙の図に書き込め。

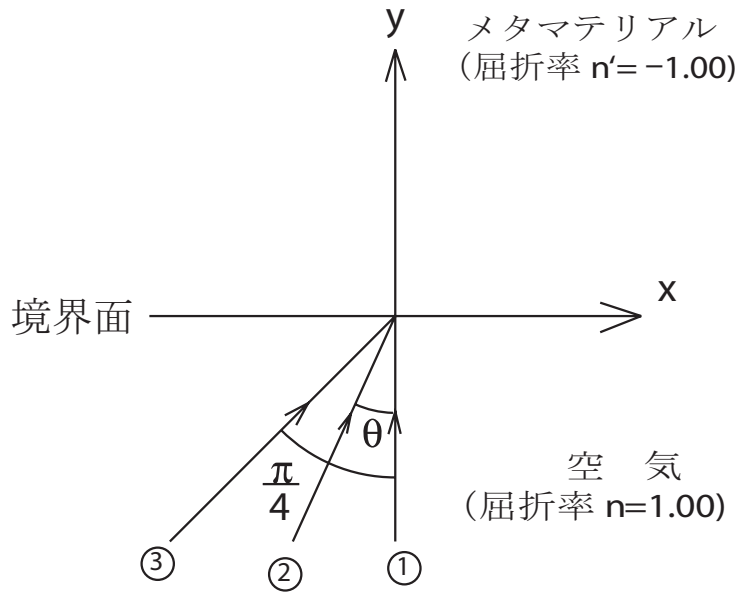


図 3

[II] 平板レンズ

メタマテリアルの平板はレンズのはたらきをすることが知られている。まず, 屈折率が n のメタマテリアルに入射した光がその中をどのように通過するかを考えよう。

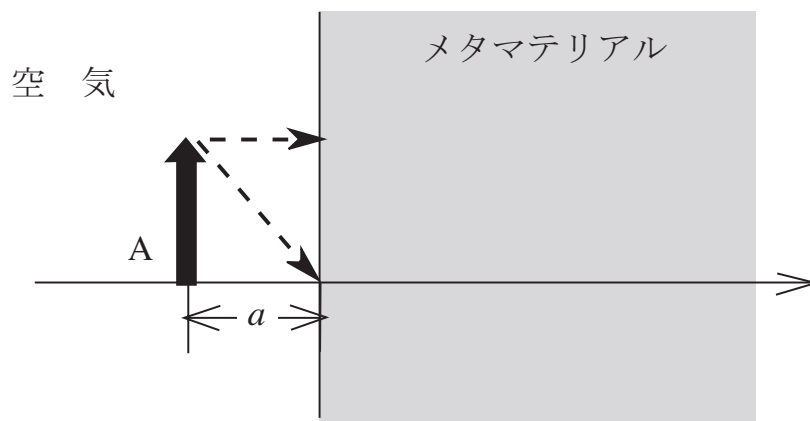


図 4

問5 屈折率が -1 ($n = -1.00$) のメタマテリアルに対し, 図4のように空気中に置かれた物体 A から破線で示したように入射した光線は, メタマテリアルに入射後どのように進むか。解答用紙の図に破線を使って描き入れよ。メタマテリアル中の結像点 (結像の横軸上での位置) とメタマテリアル左側表面との距離 b を求めよ。

つぎに厚さが d で屈折率が $n < 0$ のメタマテリアルの平板の場合を考えよう。

問6 図5の中央と右の結像点の位置 b と l を a, d, n を用いて表せ。ただし, メタマテリアルは十分厚く, $d > a|n|$ を満たしているものとする。メタマテリアルに入射後にどのように進むかを解答用紙の図に破線で示せ。ただし, すべての光線と光軸とのなす角は十分小さい近軸光線とする。

(注意: $|n|$ は n の絶対値であり, 近軸光線では, 近似的に $\sin \theta \approx \tan \theta$ となる。)

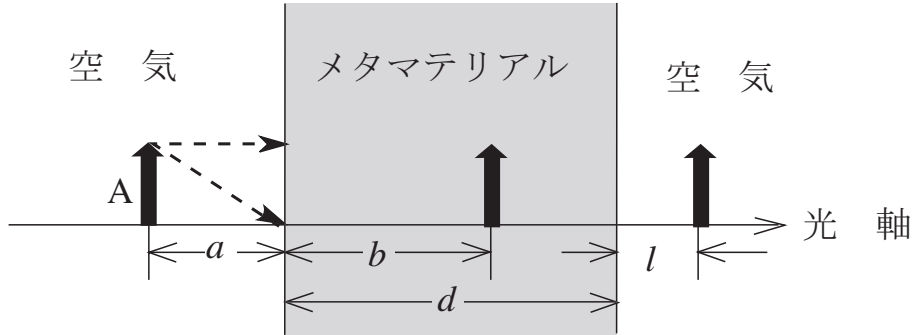


図 5

問5と問6の結果は, メタマテリアルが平板でもレンズのはたらきを示している。

[III] ドップラー効果

光のドップラー効果について考えてみよう。

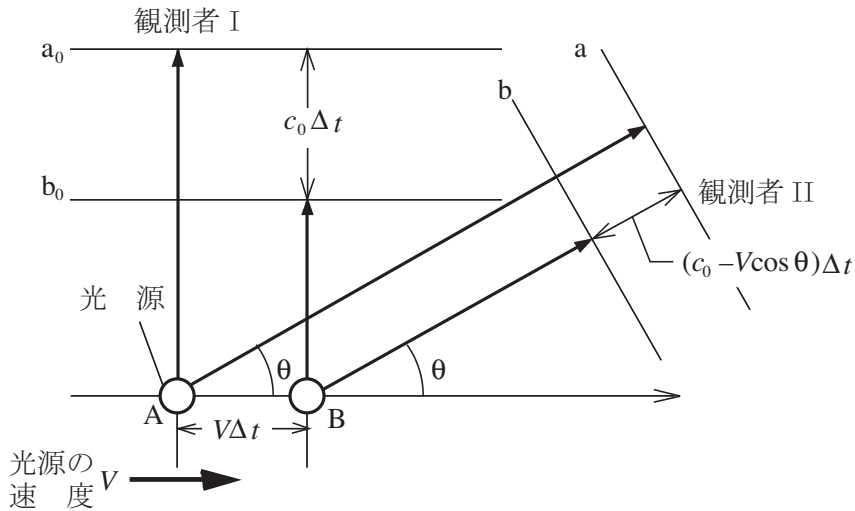


図 6

図6のように, 速さ V で水平方向に運動する光源がある。光源は光を放射しながら, Δt の間に点 A から B に至った。この光を観測者 I と II が観測したとする。ただし, 光源から観測者までの距離は AB 間の距離 $V \Delta t$ に比べて十分大きいものとする。

光源の運動方向に対し横方向（角度 $\frac{\pi}{2}$ rad の方向）にいる観測者 I が観測する光の振動数を f'_0 とする。光源の運動方向と角度 θ の方向にいる観測者 II が観測する波の振動数 f は、つぎの考えに基づいて求められる。なお光源の速さ V は光の速さ c_0 より小さいとする。

光源が位置 A から発した波の波面 a_0 と a が、それぞれ、観測者に届いたとき、光源が B から発した波の波面 b_0 と b は、観測者の少し手前まで来ている。垂直方向の波面 a_0 と b_0 の間隔は $c_0 \Delta t$ である。一方、角度 θ の方向の 2 つの波面 a, b の間隔は $(c_0 - V \cos \theta) \Delta t$ である。 a_0 と b_0, a と b の間には、1 波長の波を 1 個と数えて、 $f'_0 \Delta t$ 個の波が入る。

問 7 横方向の光の振動数 f'_0 に対し、角度 θ の方向で観測する振動数 f が

$$f = \frac{f'_0}{1 - \frac{V}{c_0} \cos \theta} \text{ となることを示せ。}$$

問 8 図 6 で光源も観測者も屈折率が n の媒質中にあるとき、角度 θ の方向での光の振動数を求めよ。また、屈折率 n が正と負の場合につき、光源が観測者に近づくとき ($\theta = 0$) と遠ざかるとき ($\theta = \pi$) の振動数の増減を示せ。

[IV] 相対論効果と天体観測

図 7 のように y 方向に速さ V で動く光源 S から出た光を、光源とともに y 方向に移動する観測者 P と座標原点に静止する観測者 O が観測したとする。このとき、観測者 P が見る光の振動数 f_0 と、横方向 ($\theta = \frac{\pi}{2}$) の観測者 O の見る振動数 f'_0 の間には、真空中では

$f'_0 = f_0 \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c_0}\right)^2}$ の関係があることを以下の手順で導いてみよう。

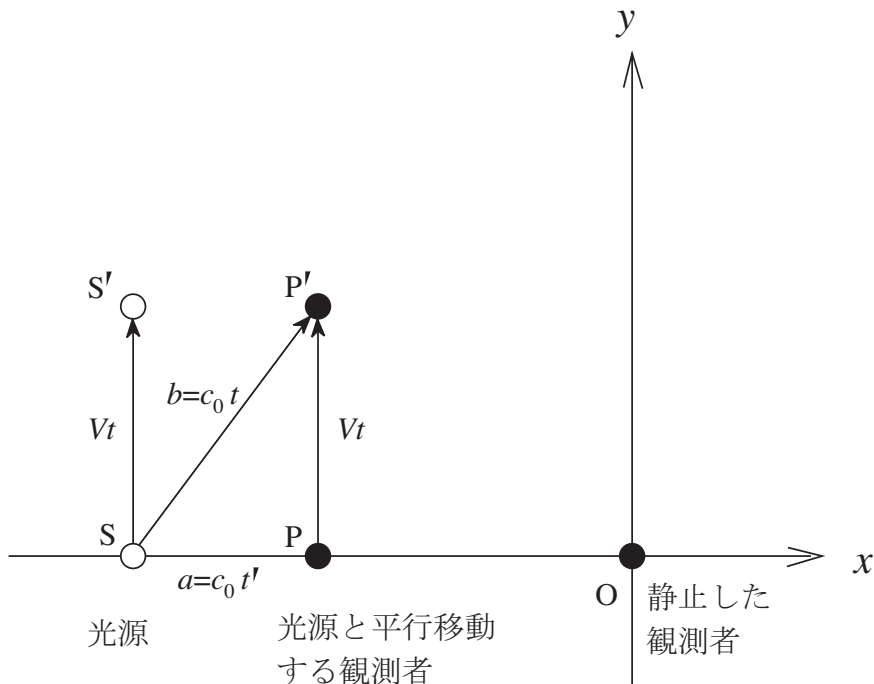


図 7

アインシュタインの特殊相対性理論によると、真空中の光の速さ c_0 は観測者が動く速さによらず一定であることが知られている。このことより、異なる速さで移動する観測者間で時間の進む度合いが違ってくる。このことを調べるために、光源 S と同じ速さ V で y 方向に移動し x 方向に a だけ離れた点の観測者 P と原点に静止した観測者 O が、光源 S からの光を観測する場合を考える。 O は、光源 S から出た光が時間 t の後に観測者 P に到達したことを観測したとする。この時間 t の間に、観測者 P は点 P' にまで移動しているため、この間に O が観測する光は $b = \sqrt{a^2 + (Vt)^2}$ だけ伝播することになる。一方、光が P に到達するまでの時間 t' は $t' = \frac{a}{c_0}$ である。

問 9 以上のことより、 $\frac{t}{t'}$ を c_0 と V で表せ。

この結果は、観測者によって時計の進み方が異なること、すなわち、時間が“ 相対的 ”であることを意味している。この関係はそのまま相対速度 V で運動する物体の場合に一般化することが出来て、物体中の現象が相対的に運動する観測者にはゆっくり見える。

問 10 問 9 の結果を用いて、横方向の O で静止している観測者が観測する振動数 f'_0 と光源とともに動く P が観測する振動数 f_0 の間には

$$\frac{f'_0}{f_0} = \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c_0}\right)^2}$$

の関係があることを示せ (これは相対論効果による横方向ドップラー効果とよばれる)。

以上の結果をまとめると、振動数が f_0 の光源が速さ V で移動するとき、その移動方向に対し角度 θ の方向にいる観測者 O が観測する振動数 f は相対論効果も含めて、ドップラー効果により

$$\frac{f}{f_0} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c_0}\right)^2}}{1 - \frac{V}{c_0} \cos \theta}$$

となる。

つぎに、ドップラー効果を利用して宇宙の距離を測定する方法について考えてみよう。宇宙は膨張しており、遠くの天体ほどより速く地球から遠ざかっていることが、星の光のドップラー効果により知られている。図 8 で天体 S は、 $\theta = \pi$ の方向の観測者 O (地球) からまっすぐに遠ざかっているとす。ある天体までの距離を $D \times 100$ 万光年と表すことにする。地球から天体が遠ざかる速さ V と D との間には、 $V = HD$ という関係があることが観測事実として知られている (ハッブルの法則)。ここで、 $H = 21.6 \text{ km/s}$ はハッブル定数とよばれる。この法則は、極めて遠くにある銀河から放射される光を観測すると、その光の波長が、地上で放射されるものより長くなっているという事実より発見されたものである。

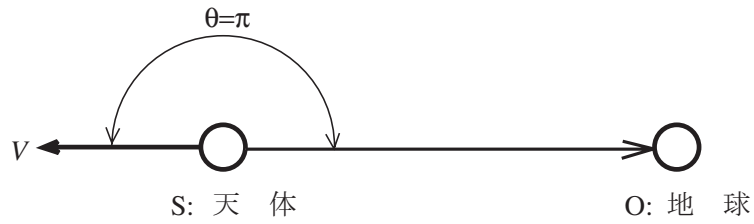


図 8

- 問 11 地球 O で放射されたときの波長に対し，遠くの星雲から放射された光の波長が 1.01 倍長くなっているとき，星雲までの距離が何光年になるか，ドップラー効果の公式とハッブルの法則より求めよ。ただし，遠ざかる速さが光の速さに比べ十分小さいとして相対論効果 $\left(\frac{V}{c_0}\right)^2$ は無視できるとする。
- 問 12 ハッブルの法則と相対論的ドップラー効果をあわせて考えると，遠方にある光源からの光の地上において観測される振動数は，その光源までの距離とともに減少することがわかる。この振動数が 0 になる光源のある場所が宇宙の果てであると仮定して，宇宙の果てまでの距離を求めよ。

(余白)