第１問　金属球による鏡像【解答】

問１　鏡像法

(a)　金属球は接地してあり，接地点の電位が 0 であるから，金属球表面の電位は，

$$V = \underline{0}$$

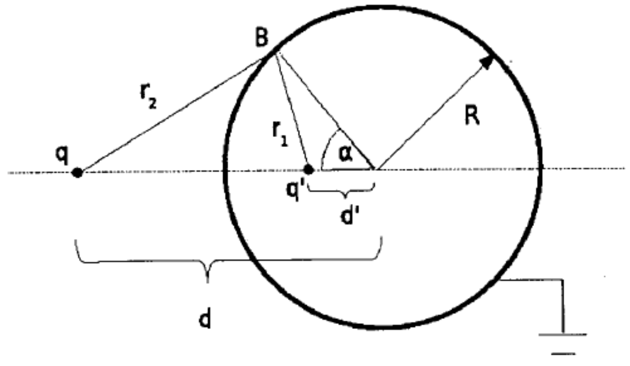

図１：点 B の電位はゼロである。

(b)　図１のように，球面上の任意の点 B から虚電荷 q' および点電荷 q までの距離を，それぞれ r_1，r_2 とし，図のように角度 α を定めると，余弦定理より，

$$r_1 = \sqrt{R^2 + d'^2 - 2Rd'\cos\alpha} \tag{1}$$

$$r_2 = \sqrt{R^2 + d^2 - 2Rd\cos\alpha} \tag{2}$$

点 B で電位 0 の条件より，

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q'}{r_1} + \frac{q}{r_2}\right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\therefore \quad \frac{q'}{r_1} + \frac{q}{r_2} = 0 \tag{4}$$

これより，(1)，(2)式を用いて，

$$r_2^2 = \left(\frac{q}{q'}\right)^2 r_1^2 \quad \Rightarrow \quad R^2 + d^2 - 2Rd\cos\alpha = \left(\frac{q}{q'}\right)^2 \left(R^2 + d'^2 - 2Rd'\cos\alpha\right) \tag{5}$$

(5)式は任意の α で成立することから，

$$R^2 + d^2 = \left(\frac{q}{q'}\right)^2 \left(R^2 + d'^2\right) \tag{6}$$

$$Rd = \left(\frac{q}{q'}\right)^2 Rd' \tag{7}$$

(6)，(7)式より $\left(\frac{q}{q'}\right)^2$ を消去して，

$$dd'^2 - (R^2 + d^2)d' + dR^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (dd' - R^2)(d' - d) = 0$$

で，$d' \neq d$ より，

$$\underline{d' = \frac{R^2}{d}} \tag{8}$$

これを(6)式へ代入して，

$$q'^2 = q^2 \frac{R^2}{d^2}$$

ここで，(4)式を考慮して，

$$\underline{q' = -q\frac{R}{d}} \tag{9}$$

(c)　虚電荷 q' が点電荷 q に及ぼす力の大きさは，

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|qq'|}{(d-d')^2}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot q^2\frac{R}{d}\cdot\frac{1}{\left(d-\frac{R^2}{d}\right)^2} = \underline{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2Rd}{(d^2-R^2)^2}} \tag{10}$$

q と q' は逆符号であるから，この力は引力である。⇒　<u>No</u>

問２　静電場の遮蔽（しゃへい／スクリーニング）

(a)　点 A における電場ベクトルは，

$$\vec{E}_\mathrm{A} = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'}{\left(r-(d-d')\right)^2}\right]\hat{r} = \underline{\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\frac{R}{d}}{\left(r-d+\frac{R^2}{d}\right)^2}\right]\hat{r}} \tag{11}$$

ここで，$\hat{r} = \vec{r}/r$ である。

(b)　$r >> d$ より，与えられた近似式を用いて，

$$\vec{E}_\mathrm{A} = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\frac{R}{d}}{r^2}\left(1-\frac{d}{r}+\frac{R^2}{dr}\right)^{-2}\right]\hat{r}$$

$$= \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\frac{R}{d}}{r^2}\left(1+\frac{2d}{r}-\frac{2R^2}{dr}\right)\right]\hat{r}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(1-\frac{R}{d}\right)q}{r^2}\hat{r}-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q\frac{R}{d}\left(d-\frac{R^2}{d}\right)}{r^3}\hat{r} \tag{12}$$

一般に，接地された金属球は距離dだけ離れた点にある点電荷qを完全には遮へいすることはできず，距離rだけ離れた点の電場に最も大きな寄与をする項は，クーロンの法則と同様に，r^{-2}に比例する。

(c)　$d \to R$の極限で，点 A での電場は 0 になり，接地された金属球は，点電荷を完全に遮へいする。

問３　接地された金属球のつくる電場中での微小振動

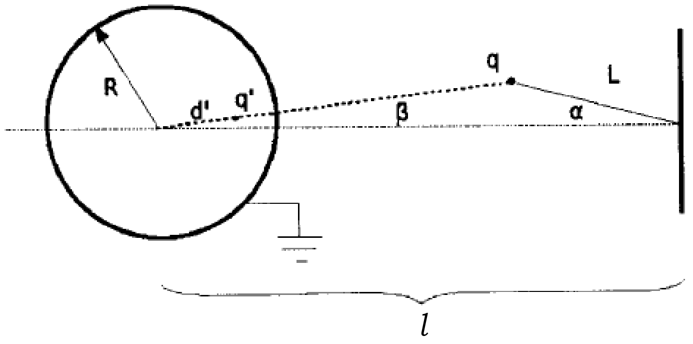

図２

(a)　虚電荷q'は図２のような位置に現れる。点電荷qと金属球の中心との距離をdとすると，余弦定理より，

$$d=\sqrt{l^2+L^2-2lL\cos\alpha} \tag{13}$$

虚電荷q'から点電荷qに働く静電気力の大きさFは，問１(c)より，

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2Rd}{(d^2-R^2)^2} \tag{14}$$

これに(13)式を代入して，

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2R\sqrt{l^2+L^2-2lL\cos\alpha}}{\left(l^2+L^2-2lL\cos\alpha-R^2\right)^2} \tag{15}$$

点電荷qに働く静電気力の向きは，図３のように表される。

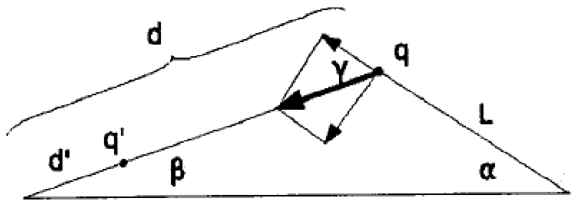

図３

(b)　図３において，

$$L\sin\alpha = d\sin\beta \tag{16}$$

が成り立つ。$\gamma = \alpha + \beta$ とおくと，糸に対して垂直方向にはたらく力の成分は，

$$F_{\perp} = F\sin\gamma = \underline{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2 R\sqrt{l^2+L^2-2lL\cos\alpha}}{\left(l^2+L^2-2lL\cos\alpha - R^2\right)^2}\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\beta = \sin^{-1}\left(\frac{L}{d}\sin\alpha\right) = \underline{\sin^{-1}\left(\frac{L}{\sqrt{l^2+L^2-2lL\cos\alpha}}\sin\alpha\right)} \tag{17}$$

(c)　単振り子の接線方向の運動方程式は，

$$mL\ddot{\alpha} = -F\sin\gamma \tag{18}$$

微小振動を考えると，$|\alpha|, |\beta| << 1$ となるから，

近似式：$|x| << 1$ のとき，$\sin x \approx x$，$\cos x \approx 1$

より，

$$\beta \approx \frac{L}{d}\alpha,\quad \gamma \approx \left(1+\frac{L}{d}\right)\alpha$$

(14)，(18)式と併せて，

$$mL\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2 Rd}{\left(d^2-R^2\right)^2}\left(1+\frac{L}{d}\right)\alpha \tag{19}$$

これより，

$$\underline{\omega = \frac{q}{d^2-R^2}\sqrt{\frac{Rd}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{mL}\left(1+\frac{L}{d}\right)}}$$

$d \approx l - L$ であることを用いて，

$$\underline{\omega = \frac{q}{(l-L)^2-R^2}\sqrt{\frac{Rl}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{mL}}} \tag{20}$$

問４　系の静電エネルギー

まず，電荷の集合としての静電エネルギーの記述に基づく解答を提示する。

(a)　系の全エネルギーは，外部の点電荷と球の誘導電荷による相互作用の静電エネルギー

$E_{el,1}$ と，球に誘導された電荷どうしによる静電エネルギー $E_{el,2}$ に分けられる。つまり，

$$E_{el} = E_{el,1} + E_{el,2} \tag{21}$$

N の電荷が球に誘導されるとし，電荷 q_i が球面上の位置 $\vec{r}_i$ にあるとする。ここで，$j = 1, 2, \cdots, N$ である。虚電荷による記述，すなわち，虚電荷による球面上および球外の任意の点の電位が誘導電荷による電位に等しいことから，

$$\frac{q'}{\left|\vec{r} - \vec{d}'\right|} = \sum_{j=1}^{N} \frac{q_j}{\left|r_j - \vec{r}\right|} \tag{22}$$

ここで，$\vec{r}$ は球外の任意の点の位置ベクトル $\vec{d}$ は虚電荷の位置ベクトルである。$\vec{r}$ が $\vec{r}_i$ に位置するとき，(22)式は，

$$\frac{q'}{\left|\vec{r} - \vec{d}'\right|} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \frac{q_j}{\left|r_j - \vec{r}\right|} \tag{23}$$

と表される。

球面上に誘導された電荷と外部電荷の相互作用によるエネルギーは，(22)式で $\vec{r} = \vec{d}$ とおくことにより，

$$E_{el,1} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{N} \frac{q_j}{\left|r_j - \vec{d}\right|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq'}{\left|\vec{d} - \vec{d}'\right|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq'}{d - d'} = \underline{-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2 R}{d^2 - R^2}} \tag{24}$$

こうして，相互作用エネルギー $E_{el,1}$ は，虚電荷の定義から直接導かれることがわかる。

(b)　球面上の電位が 0 になる条件は，

$$\frac{q'}{\left|\vec{r} - \vec{d}'\right|} + \frac{q}{\left|\vec{r} - d\right|} = 0 \tag{25}$$

と書かれる。(23)，(25)式を用いて，球面上に誘導された電荷どうしの相互作用エネルギーは，

$$\begin{aligned}
E_{el,2} &= \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \frac{q_i q_j}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|} \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i \frac{q'}{\left|\vec{r}_i - \vec{d}'\right|} = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i \frac{q}{\left|\vec{r}_i - \vec{d}\right|} = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq'}{\left|\vec{d}' - \vec{d}\right|} \\
&= -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq'}{d - d'} = \underline{\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2 R}{d^2 - R^2}}
\end{aligned} \tag{26}$$

と求められる。

(c)　(24)，(26)式を(21)式に代入して，

$$E_{el} = -\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2R}{d^2-R^2} \tag{27}$$

（別解）

(a) 点電荷 q と虚電荷 q' のもつ静電エネルギーとして

$$E_{el,1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{d-d'} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2R}{d^2-R^2}$$

(c)　与えられた積分

$$\int_d^\infty \frac{x\,dx}{\left(x^2-R^2\right)^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{d^2-R^2}$$

を用いる。

全静電エネルギー E_{el} は，点電荷 q を無限遠から金属球の中心から距離 d の点に運ぶのに必要な仕事に等しい。q にはたらく力は負の向きであることに注意して，

$$E_{el}(d) = -\int_\infty^d F(\vec{x})d\vec{x} = \int_d^\infty F(\vec{x})d\vec{x}$$

$$= -\int_d^\infty \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2Rx}{\left(x^2-R^2\right)^2}dx = -\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2R}{d^2-R^2}$$

(b) 球面上の電荷間の静電エネルギーは,

$$E_{el,2} = E_{el} - E_{el,1} = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2R}{d^2-R^2}$$