第 3 問解答—原子核の簡単なモデル

問 1- 核子がぎっしり詰まっている原子核

a) 単純立方晶系では各格子点に位置する核子は互いに隣り合う 8 つの単位立方格子に共有されているので，単位格子 1 つ当たりに含まれる核子は 1 個である。我々のモデルでは核子同士は接しているから単位立方格子の一辺の長さは

$a = 2r_N$ である。したがって核子 1 個の体積は，

$$V_N = \frac{4}{3} r_N^3 \pi = \frac{4}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^3 \pi = \frac{\pi}{6} a^3 \tag{1}$$

これより，

$$f = \frac{V_N}{a^3} = \frac{\pi}{6} \approx 0.52 \tag{2}$$

b) 原子核の質量密度は，

$$\rho_m = f\frac{m_N}{V_N} = \frac{\pi}{6}\cdot\frac{m_N}{\frac{4}{3}r_N^3\pi} = \frac{m_N}{8r_N^3} = \frac{1.67\cdot 10^{-27}}{8\cdot(0.85\cdot 10^{-15})^3} \approx 3.40\cdot 10^{17}\,\mathrm{kg/m^3} \tag{3}$$

となる。陽子の数と中性子の数が近似的に等しいことを考慮して電荷密度は

$$\rho_c = \frac{f}{2}\frac{e}{V_N} = \frac{\pi}{12}\cdot\frac{e}{\frac{4}{3}r_N^3\pi} = \frac{e}{16r_N^3} = \frac{1.602\cdot 10^{-19}}{16\cdot(0.85\cdot 10^{-15})^3} \approx 1.63\cdot 10^{25}\,\mathrm{C/m^3} \tag{4}$$

となる。

核子が占める総体積は，

$$V = \frac{AV_N}{f} \tag{5}$$

これより原子核の半径と核子の数の関係式が次のように求められる。

$$R = r_N\left(\frac{A}{f}\right)^{1/3} = \frac{r_N}{f^{1/3}}A^{1/3} = \frac{0.85}{0.52^{1/3}}A^{1/3} \approx 1.06\,\mathrm{fm}\cdot A^{1/3} \tag{6}$$

問 2 - 原子核の結合エネルギー：体積 - 表面積の項

まず原子核の表面にある核子の数を見積もらなければならない。そのような核子は表面から幅 $2r_N$ の球殻の中にある。

$$\begin{aligned} V_{surface} &= \frac{4}{3}R^3\pi - \frac{4}{3}(R-2r_N)^3\pi \\ &= \frac{4}{3}R^3\pi - \frac{4}{3}R^3\pi + \frac{4}{3}\pi\cdot 3R^2\cdot 2r_N - \frac{4}{3}\pi\cdot 3R\cdot 4r_N^2 + \frac{4}{3}\pi\cdot 8r_N^3 \\ &= 8\pi\left(R^2 r_N - 2Rr_N^2 + \frac{4}{3}r_N^3\right) \end{aligned}$$	(7)

表面にある核子の数は

$$\begin{aligned} A_{surface} &= f\,\frac{V_{surface}}{V_N} = f\,\frac{8\pi\left(R^2 r_N - 2Rr_N^2 + \frac{4}{3}r_N^3\right)}{\frac{4}{3}r_N^3\pi} \\ &= 6f\left(\left(\frac{R}{r_N}\right)^2 - 2\left(\frac{R}{r_N}\right) + \frac{4}{3}\right) \\ &= 6f\left(\left(\frac{A}{f}\right)^{2/3} - 2\left(\frac{A}{f}\right)^{1/3} + \frac{4}{3}\right) \\ &= 6f^{1/3}A^{2/3} - 12f^{2/3}A^{1/3} + 8f \\ &= 6^{2/3}\pi^{1/3}A^{2/3} - 2\cdot 6^{1/3}\pi^{2/3}A^{1/3} + \frac{4}{3}\pi \\ &\approx 4.84A^{2/3} - 7.80A^{1/3} + 4.19 \end{aligned}$$	(8)

よって結合エネルギーは

$$\begin{aligned} E_b &= (A - A_{surface})a_V + A_{surface}\frac{a_V}{2} \\ &= Aa_V - A_{surface}\frac{a_V}{2} \\ &= Aa_V - \left(3f^{1/3}A^{2/3} - 6f^{2/3}A^{1/3} + 4f\right)a_V \\ &= Aa_V - 3f^{1/3}A^{2/3}a_V + 6f^{2/3}A^{1/3}a_V - 4fa_V \\ &= \left(15.8A - 38.20A^{2/3} + 61.58A^{1/3} - 33.09\right)\mathrm{MeV} \end{aligned}$$	(9)

問 3 - 結合エネルギーにおける静電（クーロン）効果

a) Q_0 を Ze で置き換えると原子核の静電エネルギーは,

$U_c = \dfrac{3(Ze)^2}{20\pi\varepsilon_0 R} = \dfrac{3Z^2 e^2}{20\pi\varepsilon_0 R}$	(10)

となる。各々の陽子が自身と相互作用しないことを考えて得られた式で Z^2 を $Z(Z-1)$ で置き換えて次式を得る。

$U_c = \dfrac{3Z(Z-1)e^2}{20\pi\varepsilon_0 R}$	(11)

b) 静電相互作用の結合エネルギーへの寄与は次のようになる。

$\Delta E_b = -\dfrac{3e^2 f^{1/3}}{20\pi\varepsilon_0 r_N}\dfrac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} = -\dfrac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}\cdot 1.31\times 10^{-13}\mathrm{J}$ $= -\dfrac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}\cdot 0.820\mathrm{MeV}$ $\approx -\left(\dfrac{A^{5/3}}{4} - \dfrac{A^{2/3}}{2}\right)\cdot 0.820\mathrm{MeV} = (-0.205A^{5/3} + 0.410A^{2/3})\mathrm{MeV}$	(12)

ここで式(11)の静電エネルギーの公式で R を $r_N f^{-1/3} A^{1/3}$ で置き換え，$Z \approx A/2$ を用いた。クーロン斥力は結合エネルギーを打ち消すようにはたらくので，符号は負である。よって結合エネルギーの完全な形は次のようになる。

$E_b = Aa_V - 3f^{1/3}A^{2/3}a_V + 6f^{2/3}A^{1/3}a_V - 4fa_V - \dfrac{3e^2 f^{1/3}}{20\pi\varepsilon_0 r_N}\left(\dfrac{A^{5/3}}{4} - \dfrac{A^{2/3}}{2}\right)$	(13)

問 4 -重い原子核の分裂

a) (生成された原子核の全運動エネルギー) ＝ (生成された 2 つの原子核の結合エネルギー) －(分裂前の元の原子核の結合エネルギー)－ (2 つの原子核の間の静電エネルギー)

で与えられる。$R(A/2) = 2^{-1/3}R$ なので,

$$E_{kin}(d)=2E_b\left(\frac{A}{2}\right)-E_b(A)-\frac{(Ze/2)^2}{4\pi\varepsilon_0 d}$$ $$=-3f^{1/3}A^{2/3}a_V\left(2^{1/3}-1\right)+6f^{2/3}A^{1/3}a_V\left(2^{2/3}-1\right)$$ $$-4fa_V-\frac{3e^2f^{1/3}}{20\pi\varepsilon_0 r_N}\left[\frac{A^{5/3}}{4}\left(2^{-2/3}-1\right)-\frac{A^{2/3}}{2}\left(2^{1/3}-1\right)\right]$$ $$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{A^2e^2}{16d}$$	(14)

（最初の項 Aa_V は打ち消しあう）。

b) $d=2R(A/2)$ とすると運動エネルギーは,

$$E_{kin}=2E_b\left(\frac{A}{2}\right)-E_b(A)-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2^{1/3}A^2e^2f^{1/3}}{16\cdot 2r_N A^{1/3}}$$ $$=-3f^{1/3}A^{2/3}a_V\left(2^{1/3}-1\right)+6f^{2/3}A^{1/3}a_V\left(2^{2/3}-1\right)$$ $$-4fa_V-\frac{3e^2f^{1/3}}{20\pi\varepsilon_0 r_N}\left[\frac{2^{-2/3}-1}{4}+\frac{20}{3}\frac{2^{1/3}}{128}\right]A^{5/3}+\frac{3e^2f^{1/3}}{20\pi\varepsilon_0 r_N}\frac{2^{1/3}-1}{2}A^{2/3}$$ $$=(0.02203A^{5/3}-9.8236A^{2/3}+36.175A^{1/3}-33.091)\mathrm{MeV}$$	(15)

となる。A =100, 150, 200, 250 をそれぞれ代入すると,

A =100 ... E_{kin}=-29.36MeV

A =150 ... E_{kin}=-24.92MeV

A =200 ... E_{kin}=-6.817MeV

A =250 ... E_{kin}=23.51MeV

我々のモデルでは $E_{kin}\left(d=2R(A/2)\right)\geq 0$ のときに分裂が可能である。

上の計算から分裂可能な最小の A は $A\approx 212$ 程度と見積もることができる。次の不等式をより正確に数値的に評価すると,

$$E_{kin}=(0.02203A^{5/3}-9.8236A^{2/3}+36.175A^{1/3}-33.091)\mathrm{MeV}\geq 0$$	(16)

$A\geq 214$ を得る。

問 5 – 移行反応

a) この問いは非相対論的に解いても相対論的に解いてもよい。

非相対論的な解法

まず反応過程でエネルギーに変換された質量を求める。（質量に変換されたエネルギーはQ値と呼ばれる）

$\Delta m = (\text{反応前の全質量}) - (\text{反応後の全質量})$ $= (57.93535 + 12.00000)\text{a.m.u.} - (53.93962 + 15.99491)\text{a.m.u.}$ $= 0.00082\text{a.m.u.}$ $= 1.3616 \cdot 10^{-30}\text{kg}$	(17)

質量とエネルギーの等価性に関するアインシュタインの公式を用いると，

$Q = (\text{反応前の全運動エネルギー}) - (\text{反応後の全運動エネルギー})$ $= -\Delta m \cdot c^2$ $= -1.3616 \cdot 10^{-30} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = -1.2254 \cdot 10^{-13}\text{J}$	(18)

$1\text{MeV} = 1.602 \cdot 10^{-13}\text{J}$ であるから，

$Q = -1.2254 \cdot 10^{-13} / 1.602 \cdot 10^{-13} = -0.765\text{MeV}$	(19)

エネルギー保存則と運動量保存則を用いてこの問題は解かれる。運動量保存則は（我々が興味があるのは ^{12}C と ^{16}O が同じ方向に運動する場合だからベクトルを用いなくてよい），

$m(^{16}\text{O})\upsilon(^{16}\text{O}) = m(^{12}\text{C})\upsilon(^{12}\text{C}) + m(^{58}\text{Ni})\upsilon(^{58}\text{Ni})$	(20)

またエネルギー保存則は，

$E_k(^{16}\text{O}) + Q = E_k(^{12}\text{C}) + E_k(^{58}\text{Ni}) + E_x(^{58}\text{Ni})$	(21)

ここで $E_x(^{58}\text{Ni})$ は ^{58}Ni の励起エネルギーで，Q はすでに計算した Q 値である。

^{12}C と ^{16}O が同じ速度を持つので，運動量保存則は次のように書き下される。

$[m(^{16}\text{O}) - m(^{12}\text{C})]\upsilon(^{16}\text{O}) = m(^{58}\text{Ni})\upsilon(^{58}\text{Ni})$	(22)

以上より ^{58}Ni の運動エネルギーを求めるのは容易である。

$$E_k\left({}^{58}\mathrm{Ni}\right)=\frac{m\left({}^{58}\mathrm{Ni}\right)\upsilon\left({}^{58}\mathrm{Ni}\right)^2}{2}=\frac{\left[m\left({}^{58}\mathrm{Ni}\right)\upsilon\left({}^{58}\mathrm{Ni}\right)\right]^2}{2m\left({}^{58}\mathrm{Ni}\right)}$$ $$=\frac{\left[m\left({}^{16}\mathrm{O}\right)-m\left({}^{12}\mathrm{C}\right)\right]^2\upsilon\left({}^{16}\mathrm{O}\right)^2}{2m\left({}^{58}\mathrm{Ni}\right)}$$ $$=E_k\left({}^{16}\mathrm{O}\right)\frac{\left[m\left({}^{16}\mathrm{O}\right)-m\left({}^{12}\mathrm{C}\right)\right]^2}{m\left({}^{58}\mathrm{Ni}\right)m\left({}^{16}\mathrm{O}\right)}$$	(23)

そして ^{58}Ni の励起エネルギーは,

$$E_x\left({}^{58}\mathrm{Ni}\right)=E_k\left({}^{16}\mathrm{O}\right)+Q-E_k\left({}^{12}\mathrm{C}\right)-E_k\left({}^{58}\mathrm{Ni}\right)$$ $$=E_k\left({}^{16}\mathrm{O}\right)+Q-\frac{m\left({}^{12}\mathrm{C}\right)\upsilon\left({}^{16}\mathrm{O}\right)^2}{2}-E_k\left({}^{16}\mathrm{O}\right)\frac{\left[m\left({}^{16}\mathrm{O}\right)-m\left({}^{12}\mathrm{C}\right)\right]^2}{m\left({}^{58}\mathrm{Ni}\right)m\left({}^{16}\mathrm{O}\right)}$$ $$=Q+E_k\left({}^{16}\mathrm{O}\right)-E_k\left({}^{16}\mathrm{O}\right)\frac{m\left({}^{12}\mathrm{C}\right)}{m\left({}^{16}\mathrm{O}\right)}-E_k\left({}^{16}\mathrm{O}\right)\frac{\left[m\left({}^{16}\mathrm{O}\right)-m\left({}^{12}\mathrm{C}\right)\right]^2}{m\left({}^{58}\mathrm{Ni}\right)m\left({}^{16}\mathrm{O}\right)}$$ $$=Q+E_k\left({}^{16}\mathrm{O}\right)\left[1-\frac{m\left({}^{12}\mathrm{C}\right)}{m\left({}^{16}\mathrm{O}\right)}-\frac{\left[m\left({}^{16}\mathrm{O}\right)-m\left({}^{12}\mathrm{C}\right)\right]^2}{m\left({}^{58}\mathrm{Ni}\right)m\left({}^{16}\mathrm{O}\right)}\right]$$ $$=Q+E_k\left({}^{16}\mathrm{O}\right)\frac{\left[m\left({}^{16}\mathrm{O}\right)-m\left({}^{12}\mathrm{C}\right)\right]\left[m\left({}^{58}\mathrm{Ni}\right)-m\left({}^{16}\mathrm{O}\right)+m\left({}^{12}\mathrm{C}\right)\right]}{m\left({}^{58}\mathrm{Ni}\right)m\left({}^{16}\mathrm{O}\right)}$$	(24)

となる。最後の式の第 2 項の分子の最初の括弧は移行されたクラスター（^{4}He）の質量に近似的に等しく, 2 番目の括弧は標的である ^{54}Fe の質量に近似的に等しいことに注意せよ。数値を代入して以下を得る。

$$E_x\left({}^{58}\mathrm{Ni}\right)=-0.765+50\cdot\frac{(15.99491-12.)(57.93535-15.99491+12.)}{57.93535\cdot15.99491}$$ $$=10.862\,\mathrm{MeV}$$	(25)

相対論的な解法

相対論的にこの問題を解くには次の 2 式から始める（1 つ目はエネルギー保存則, 2 つ目は運動量保存則である）。

$$m\left({}^{54}\mathrm{Fe}\right)\cdot c^2+\frac{m\left({}^{16}\mathrm{O}\right)\cdot c^2}{\sqrt{1-\upsilon\left({}^{16}\mathrm{O}\right)^2/c^2}}=\frac{m\left({}^{12}\mathrm{C}\right)\cdot c^2}{\sqrt{1-\upsilon\left({}^{12}\mathrm{C}\right)^2/c^2}}+\frac{m^*\left({}^{58}\mathrm{Ni}\right)\cdot c^2}{\sqrt{1-\upsilon\left({}^{58}\mathrm{Ni}\right)^2/c^2}}$$	(26)
$$\frac{m\left({}^{16}\mathrm{O}\right)\upsilon\left({}^{16}\mathrm{O}\right)}{\sqrt{1-\upsilon\left({}^{16}\mathrm{O}\right)^2/c^2}}=\frac{m\left({}^{12}\mathrm{C}\right)\upsilon\left({}^{12}\mathrm{C}\right)}{\sqrt{1-\upsilon\left({}^{12}\mathrm{C}\right)^2/c^2}}+\frac{m^*\left({}^{58}\mathrm{Ni}\right)\upsilon\left({}^{58}\mathrm{Ni}\right)}{\sqrt{1-\upsilon\left({}^{58}\mathrm{Ni}\right)^2/c^2}}$$	(27)

式中の質量はすべて静止質量である。^{58}Ni は基底状態ではなく，励起状態にある（励起状態での質量を m*で示した）。^{12}C と ^{16}O が同じ速度を持つので，

$$
\begin{aligned}
&m\left({}^{54}\mathrm{Fe}\right)+\frac{m\left({}^{16}\mathrm{O}\right)-m\left({}^{12}\mathrm{C}\right)}{\sqrt{1-\upsilon\left({}^{16}\mathrm{O}\right)^2/c^2}}=\frac{m^*\left({}^{58}\mathrm{Ni}\right)}{\sqrt{1-\upsilon\left({}^{58}\mathrm{Ni}\right)^2/c^2}}\\
&\frac{\left(m\left({}^{16}\mathrm{O}\right)-m\left({}^{12}\mathrm{C}\right)\right)\cdot\upsilon\left({}^{16}\mathrm{O}\right)}{\sqrt{1-\upsilon\left({}^{16}\mathrm{O}\right)^2/c^2}}=\frac{m^*\left({}^{58}\mathrm{Ni}\right)\cdot\upsilon\left({}^{58}\mathrm{Ni}\right)}{\sqrt{1-\upsilon\left({}^{58}\mathrm{Ni}\right)^2/c^2}}
\end{aligned}
\tag{28}
$$

となる。第 2 式を第 1 式で除すると，

$$
\upsilon\left({}^{58}\mathrm{Ni}\right)=\frac{\left(m\left({}^{16}\mathrm{O}\right)-m\left({}^{12}\mathrm{C}\right)\right)\cdot\upsilon\left({}^{16}\mathrm{O}\right)}{\left(m\left({}^{16}\mathrm{O}\right)-m\left({}^{12}\mathrm{C}\right)\right)+m\left({}^{54}\mathrm{Fe}\right)\sqrt{1-\upsilon\left({}^{16}\mathrm{O}\right)^2/c^2}}
\tag{29}
$$

を得る。

ところで入射粒子 (^{16}O) の速度はその運動エネルギーから求めることができる。

$$
\begin{aligned}
&E_{kin}\left({}^{16}\mathrm{O}\right)=\frac{m\left({}^{16}\mathrm{O}\right)\cdot c^2}{\sqrt{1-\upsilon\left({}^{16}\mathrm{O}\right)^2/c^2}}-m\left({}^{16}\mathrm{O}\right)\cdot c^2\\
&\sqrt{1-\upsilon\left({}^{16}\mathrm{O}\right)^2/c^2}=\frac{m\left({}^{16}\mathrm{O}\right)\cdot c^2}{E_{kin}\left({}^{16}\mathrm{O}\right)+m\left({}^{16}\mathrm{O}\right)\cdot c^2}\\
&\upsilon\left({}^{16}\mathrm{O}\right)^2/c^2=1-\left(\frac{m\left({}^{16}\mathrm{O}\right)\cdot c^2}{E_{kin}\left({}^{16}\mathrm{O}\right)+m\left({}^{16}\mathrm{O}\right)\cdot c^2}\right)^2\\
&\upsilon\left({}^{16}\mathrm{O}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{m\left({}^{16}\mathrm{O}\right)\cdot c^2}{E_{kin}\left({}^{16}\mathrm{O}\right)+m\left({}^{16}\mathrm{O}\right)\cdot c^2}\right)^2}\cdot c
\end{aligned}
\tag{30}
$$

数値を代入して，

$$
\begin{aligned}
&\upsilon\left({}^{16}\mathrm{O}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{15.99491\cdot1.6605\cdot10^{-27}\cdot\left(3\cdot10^8\right)^2}{50\cdot1.602\cdot10^{-13}+15.99491\cdot1.6605\cdot10^{-27}\cdot\left(3\cdot10^8\right)^2}\right)^2}\cdot c\\
&=\sqrt{1-0.99666^2}\cdot c=0.08166\cdot c=2.4499\cdot10^7\,\mathrm{m/s}
\end{aligned}
\tag{31}
$$

よって，

$$
\upsilon\left({}^{58}\mathrm{Ni}\right)=\frac{(15.99491-12.)\cdot2.4499\cdot10^7}{(15.99491-12.)+53.93962\sqrt{1-0.08166^2}}=1.6946\cdot10^6\,\mathrm{m/s}
\tag{32}
$$

と求められる。すると励起状態の ^{58}Ni の質量は，

$$m^*\left({}^{58}\mathrm{Ni}\right) = \left(m\left({}^{16}\mathrm{O}\right) - m\left({}^{12}\mathrm{C}\right)\right)\frac{\sqrt{1-\upsilon\left({}^{58}\mathrm{Ni}\right)^2/c^2}}{\sqrt{1-\upsilon\left({}^{16}\mathrm{O}\right)^2/c^2}}\cdot\frac{\upsilon\left({}^{16}\mathrm{O}\right)}{\upsilon\left({}^{58}\mathrm{Ni}\right)}$$
$$= (15.99491-12.)\frac{\sqrt{1-\left(1.6946\cdot 10^6/3\cdot 10^8\right)^2}}{\sqrt{1-0.08166^2}}\cdot\frac{2.4499\cdot 10^7}{1.6946\cdot 10^6}\ \mathrm{a.m.u.}$$
$$= 57.9474\ \mathrm{a.m.u.} \quad (33)$$

よって ^{58}Ni の励起エネルギーは,

$$E_x = \left[m^*\left({}^{58}\mathrm{Ni}\right) - m\left({}^{58}\mathrm{Ni}\right)\right]\cdot c^2 = (57.9474-57.93535)\cdot 1.6605\cdot 10^{-27}\cdot\left(3\cdot 10^8\right)^2$$
$$= 1.8008\cdot 10^{-12}\,\mathrm{J} = 11.2410\,\mathrm{MeV} \quad (34)$$

と求められる。

相対論的に計算した結果と非相対論的に計算した結果を比べると, (11.2410-10.862)/10.862=0.035 と, 接近しているので, 相対論的な効果は小さい。

次の問では励起エネルギーとして非相対論的に計算した数値を用いる。

b) 静止した原子核からの光子の放出についてエネルギー保存則と運動量保存則は,

$$E_x\left({}^{58}\mathrm{Ni}\right) = E_\gamma + E_{\mathrm{recoil}}$$
$$p_\gamma = p_{\mathrm{recoil}} \quad (35)$$

当然光子（ガンマ線）と反跳した原子核の運動の向きは正反対である。光子のエネルギーと運動量について,

$$E_\gamma = p_\gamma \cdot c \quad (36)$$

が成り立つ。

a)で見たように原子核の運動は非相対論的なエネルギー領域で起こるから,

$$E_{\mathrm{recoil}} = \frac{p_{\mathrm{recoil}}^2}{2m\left({}^{58}\mathrm{Ni}\right)} = \frac{p_\gamma^2}{2m\left({}^{58}\mathrm{Ni}\right)} = \frac{E_\gamma^2}{2m\left({}^{58}\mathrm{Ni}\right)\cdot c^2} \quad (37)$$

この式を式(35)に代入すると,

$$E_x\left({}^{58}\mathrm{Ni}\right) = E_\gamma + E_{\mathrm{recoil}} = E_\gamma + \frac{E_\gamma^2}{2m\left({}^{58}\mathrm{Ni}\right)\cdot c^2} \quad (38)$$

この式から次の 2 次方程式を得る。

$$E_\gamma^2 + 2m\left({}^{58}\mathrm{Ni}\right)c^2 E_\gamma - 2m\left({}^{58}\mathrm{Ni}\right)c^2 E_x\left({}^{58}\mathrm{Ni}\right) = 0 \tag{39}$$

これを解いて，

$$\begin{aligned} E_\gamma &= \sqrt{\left(m\left({}^{58}\mathrm{Ni}\right)c^2\right)^2 + 2m\left({}^{58}\mathrm{Ni}\right)c^2 E_x\left({}^{58}\mathrm{Ni}\right)} - m\left({}^{58}\mathrm{Ni}\right)c^2 \\ &= 10.8609\,\mathrm{MeV} \end{aligned} \tag{40}$$

反跳エネルギーは，

$$E_{\mathrm{recoil}} = E_x\left({}^{58}\mathrm{Ni}\right) - E_\gamma = 1.1\,\mathrm{keV} \tag{41}$$

である。

ガンマ線を放出した原子核（^{58}Ni）は高速で移動するので，ガンマ線のエネルギーはドップラー効果で変化する。光源が観測者に向かって移動するときの相対論的なドップラー効果は次の公式にしたがう。

$$f_{\mathrm{detector}} = f_{\gamma,\mathrm{emitted}}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \tag{42}$$

ここに $\beta=v/c$ で，v は ^{58}Ni の速さである。光子のエネルギーと振動数には $E=hf$ という関係があるから，エネルギーについて同様の表現を得る。よって，

$$E_{\mathrm{detector}} = E_{\gamma,\mathrm{emitted}}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = 10.861\sqrt{\frac{1+5.65\cdot 10^{-3}}{1-5.65\cdot 10^{-3}}} = 10.923\,\mathrm{MeV} \tag{43}$$