実験問題１【解答】電気的ブラックボックス：容量変化による変位センサー

問１　測定装置の特性決定

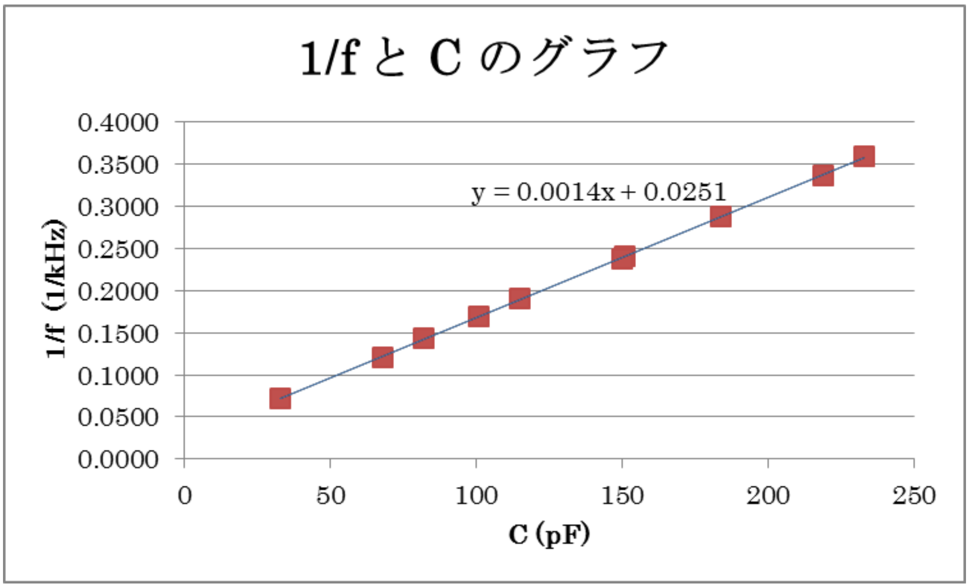
与えられた f と C の関係より，

$$f=\frac{\alpha}{C+C_s}\Leftrightarrow\frac{1}{f}=\frac{1}{\alpha}C+\frac{C_s}{\alpha}$$

すなわち，$\frac{1}{f}$ を縦軸（y 軸）にとり C を横軸（x 軸）にとったグラフは，理論上，傾きと y 切片がそれぞれ $1/\alpha$ と C_s/α であるような直線になる。

C の計測値(x 軸にプロットする)と，f の計測値，それに $\frac{1}{f}$ （y 軸にプロットする）を表にすると以下のようになった。

C (pF)	f (kHz)	1/f (ms)
33	13.94	0.0717
68	8.30	0.1205
82	6.99	0.1431
151	4.17	0.2398
233	2.79	0.3584
219	2.98	0.3356
184	3.48	0.2874
150	4.20	0.2381
115	5.24	0.1908
101	5.89	0.1698



このグラフより，傾き（$=1/\alpha$）と y 切片（$=C_s/\alpha$）はそれぞれ 0.0014 s/nF と 0.0251 ms である。

よって，

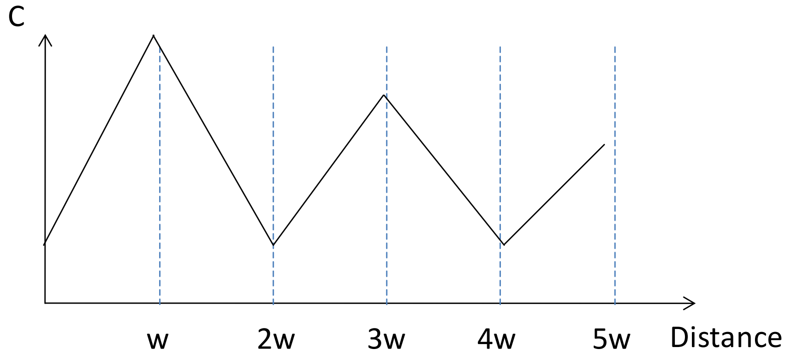
$$\alpha=\frac{1}{0.0014\ \mathrm{s/nF}}=714\ \mathrm{nF/s}$$

$$C_s=\frac{y\text{ 切片}}{\text{傾き}}=\frac{0.0251\ \mathrm{ms}}{0.0014\ \mathrm{s/nF}}=17.9\ \mathrm{pF}$$

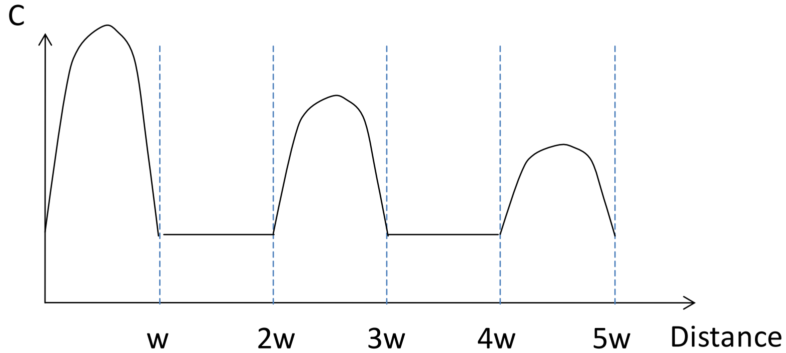
となる。

問２　平行板コンデンサーの幾何学的形状の決定

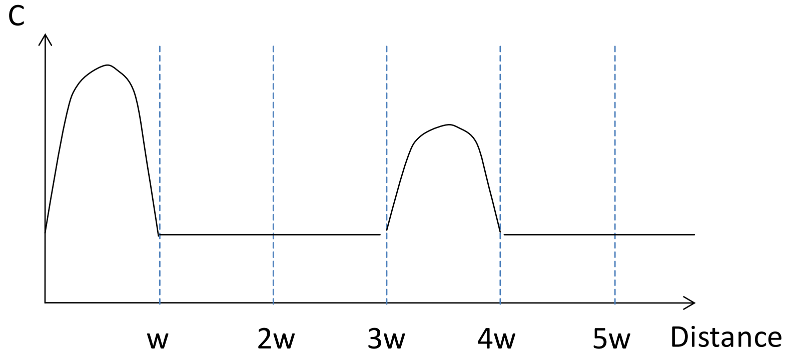
パターン I: 予想される位置と *C* のグラフ



パターン II: 予想される位置と *C* のグラフ

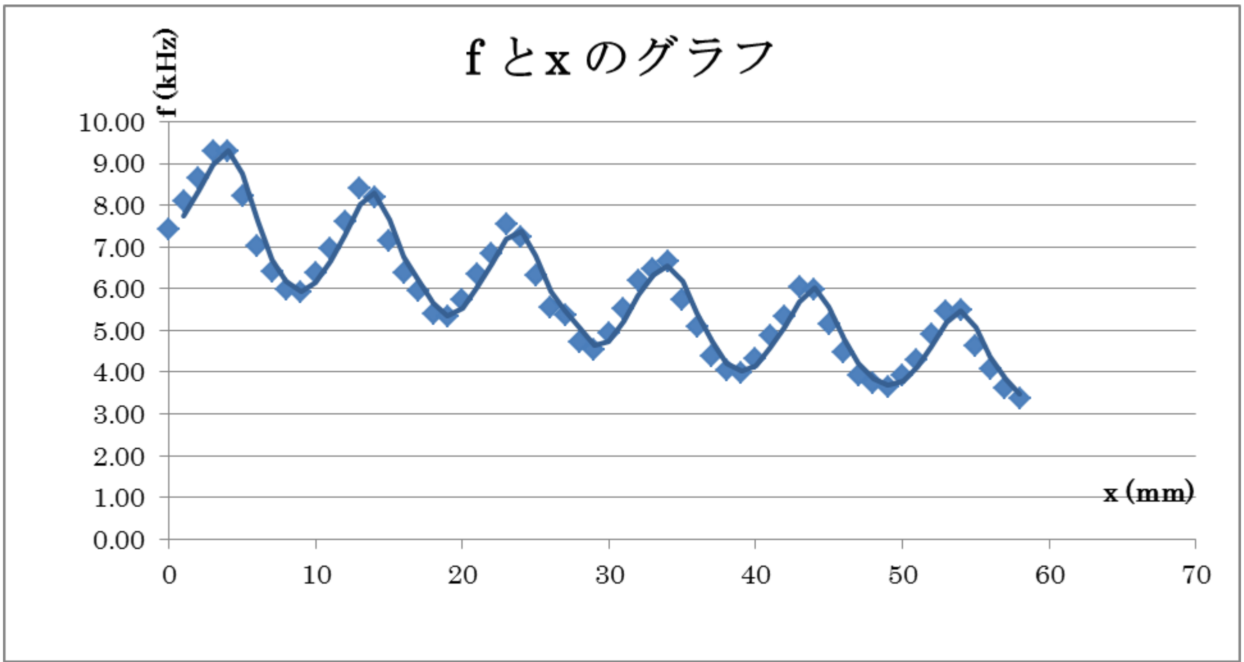


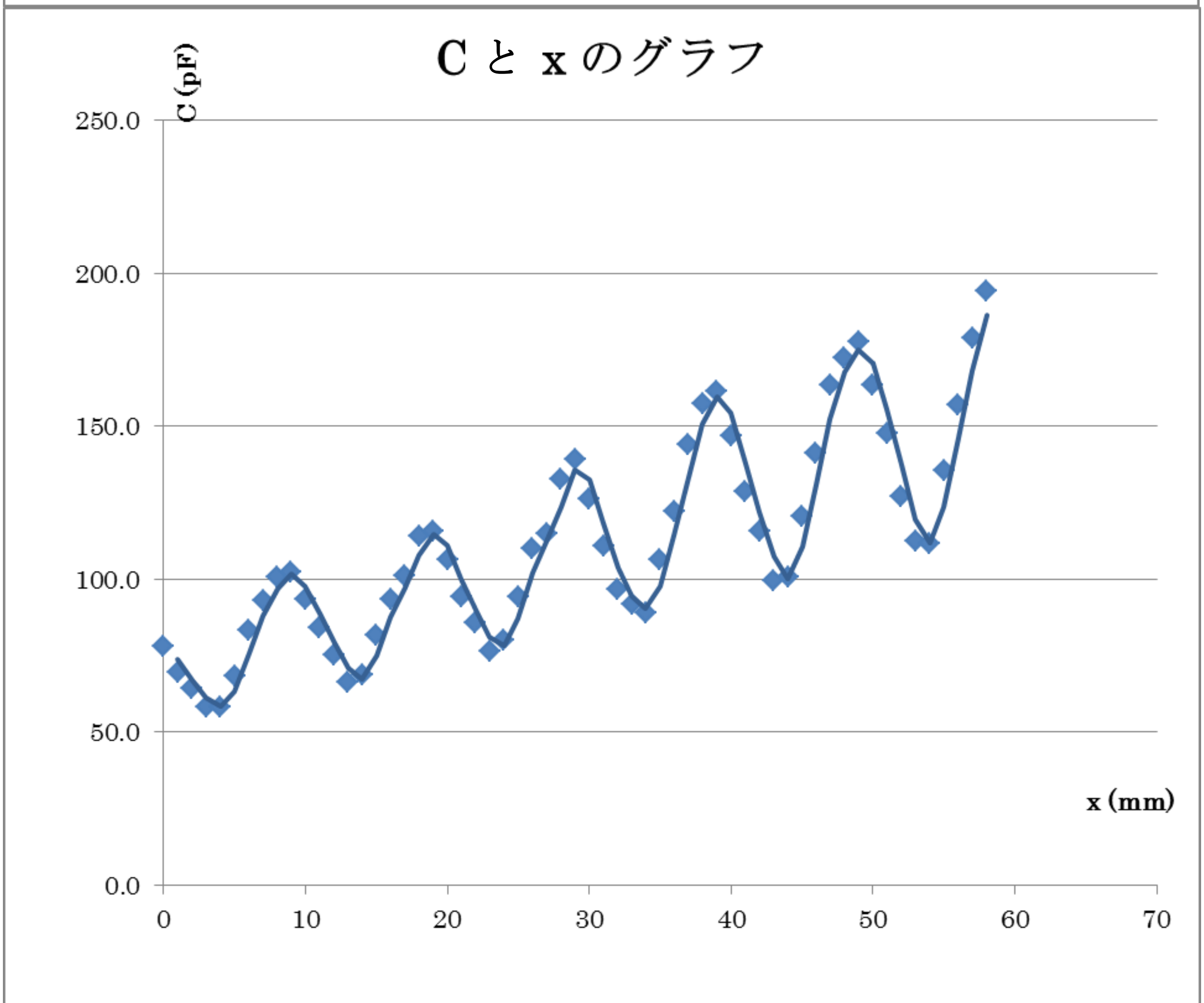
パターン III: 予想される位置と *C* のグラフ



x (板をずらした距離)に対する f と C の計測値のデータと，そのグラフは以下のようになった。

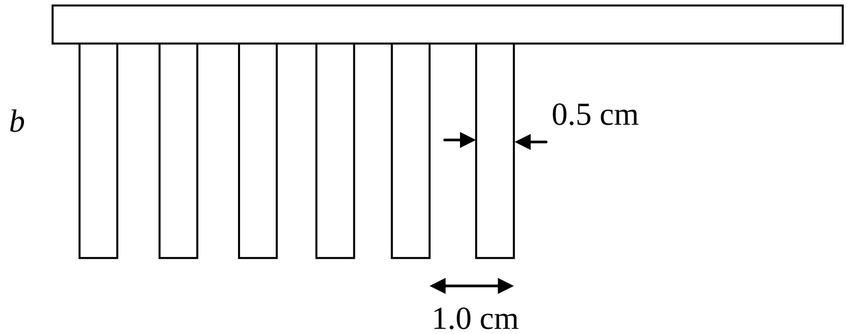
x (mm)	f (kHz)	C (pF)	x (mm)	f (kHz)	C (pF)
0	7.41	77.9	30	4.94	126.1
1	8.09	69.8	31	5.52	110.9
2	8.64	64.2	32	6.19	96.9
3	9.30	58.3	33	6.48	91.7
4	9.30	58.3	34	6.64	89.1
5	8.21	68.5	35	5.72	106.4
6	7.02	83.3	36	5.08	122.1
7	6.40	93.1	37	4.39	144.2
8	5.98	100.9	38	4.06	157.4
9	5.91	102.4	39	3.97	161.4
10	6.38	93.5	40	4.32	146.8
11	6.96	84.1	41	4.86	128.5
12	7.61	75.4	42	5.33	115.5
13	8.40	66.5	43	6.05	99.6
14	8.20	68.6	44	5.98	100.9
15	7.13	81.7	45	5.14	120.5
16	6.37	93.6	46	4.47	141.3
17	5.96	101.3	47	3.93	163.3
18	5.38	114.3	48	3.74	172.5
19	5.33	115.5	49	3.64	177.7
20	5.72	106.4	50	3.93	163.3
21	6.34	94.2	51	4.30	147.6
22	6.85	85.8	52	4.91	127.0
23	7.53	76.4	53	5.46	112.3
24	7.23	80.3	54	5.49	111.6
25	6.33	94.3	55	4.64	135.4
26	5.56	110.0	56	4.07	157.0
27	5.36	114.8	57	3.62	178.8
28	4.73	132.5	58	3.36	194.1
29	4.53	139.2			


f と x のグラフ
f (kHz)
10.00
9.00
8.00
7.00
6.00
5.00
4.00
3.00
2.00
1.00
0.00
x (mm)
0
10
20
30
40
50
60
70


C と x のグラフ
C (pF)
250.0
200.0
150.0
100.0
50.0
0.0
x (mm)
0
10
20
30
40
50
60
70

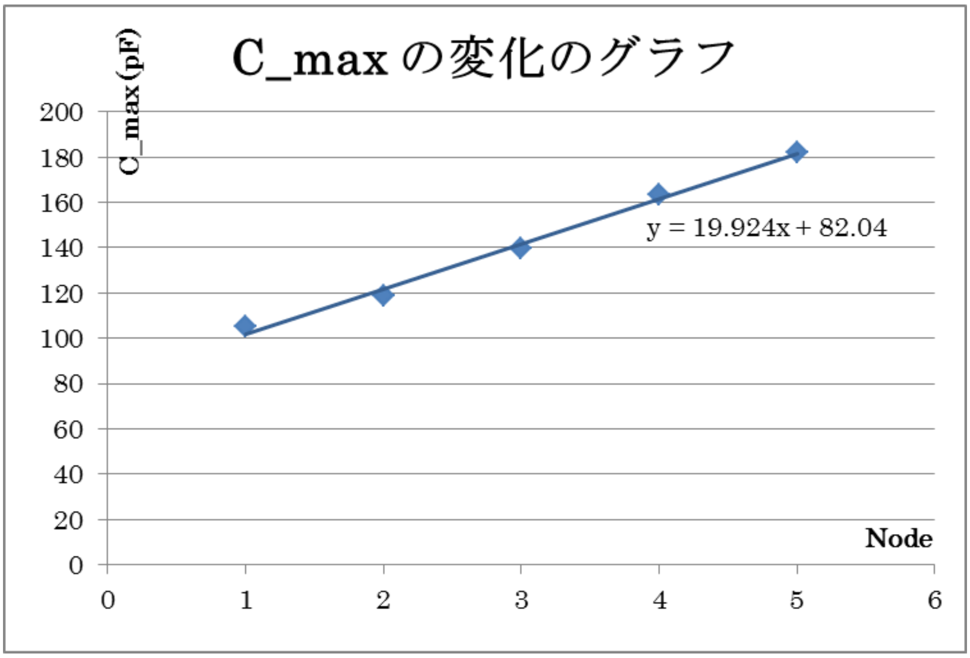
グラフの周期性より， 周期は 1.0 cm ∴ $w = 5$ mm

あり得る単純な形状は,



C と x のグラフから C のピークの値を抜き出すと以下の表になる。C の極大値を y 軸, それが何番目の極大値かを示す番号（Node）を x 軸にプロットしてグラフにする。

Node	C_max
1	105.1
2	118.6
3	139.5
4	163.7
5	182.1



このグラフは，傾きが，

$$\Delta C = 19.9 \text{ pF/Node}$$

であるような直線である。

極板間の距離は，$d = 0.20$ mm，$K = 1.5$であり，

$$\Delta C \approx \frac{K\varepsilon_0 A}{d}$$

および，

$$A = 5 \times 10^{-3}\mathrm{m} \times b$$

なので，

$$b \approx \frac{\Delta C d}{K\varepsilon_0 \times 5 \times 10^{-3}\mathrm{m}} \approx 60\mathrm{mm}$$

ただし，両極板の間は$K = 1.5$である誘電体とした。

問３　デジタルマイクロメーターの分解能

与えられたfとCの関係

$$f = \frac{\alpha}{C + C_s}$$

より，

$$\Delta f \cong \left|\frac{df}{dC}\right|\Delta C = \left|\frac{-\alpha}{(C + C_s)^2}\right|\Delta C$$

$$= \frac{f^2}{\alpha}\Delta C$$

$$\Leftrightarrow \Delta C = \frac{\alpha}{f^2}\Delta f$$

また，Cがxに線形に依存しているところでは，

$$C = mx + \beta \to \Delta C = m\Delta x$$

よって，

$$\Delta x = \frac{\alpha}{mf^2}\Delta f$$

ここで，Δfはマルチメーターで検出できる最小のfの差異とし，x_0は$f = 5$ kHzとなるようなxの値，そしてmは$x = x_0$のときのCとxのグラフの傾きとする。

fとxのグラフより，$f = 5$ kHz のときの傾きmは以下に示す範囲から計算される。

fとxのグラフより，

$$m = 17.5\,\mathrm{pF/mm} = 1.75 \times 10^{-8}\ \mathrm{F/m}$$

このmの値および，

$$f = 5\mathrm{kHz}, \alpha = 714\mathrm{pF/s}, \Delta f = 0.01\mathrm{kHz}$$

を用いて，

$$\Delta x = \frac{714 \times 10^{-9}}{(1.75 \times 10^{-8})(5 \times 10^3)^2} \times (0.01 \times 10^3) = 0.016\mathrm{mm}$$

注意: C と x のグラフの C (f ではない) が x に線形に関係している部分のみを用いる。

分解能を計算する方法の別解
(厳密ではない)

f と x のグラフと表の $f = 5$ kHz となっている付近を用い, f が 1 kHz 変化しているところを見つけたところ, x はほぼ1.5 mm変化していた。よって, f が 0.01kHz(検出できる最小の差異)だけ変化したときの x の変異は 0.015mm である。