I. 解答

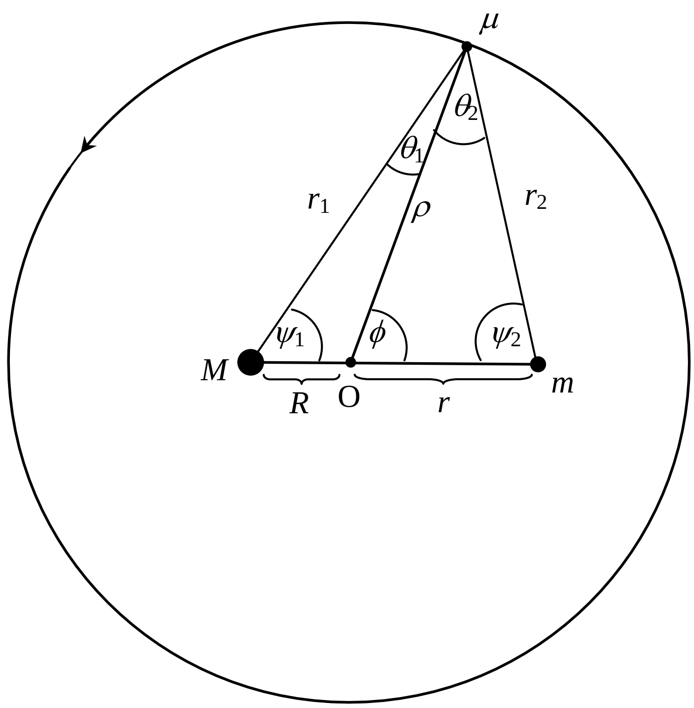

図 a

1.1　図 a で O は 2 質点の重心であるから，

$$MR - mr = 0 \qquad \cdots (1)$$

$$m\omega_0^2 r = \frac{GMm}{(R+r)^2}$$

$$M\omega_0^2 R = \frac{GMm}{(R+r)^2} \qquad \cdots (2)$$

式(2)から，　$\omega_0^2 = \dfrac{G(M+m)}{(R+r)^3}$　　$\therefore$　$\underline{\omega_0 = \dfrac{1}{R+r}\sqrt{\dfrac{G(M+m)}{(R+r)}}}$

したがって，　$\omega_0^2 = \dfrac{G(M+m)}{(R+r)^3} = \dfrac{GM}{r(R+r)^2} = \dfrac{Gm}{R(R+r)^2} \qquad \cdots (3)$

1.2　μ は M や m に比べ微小なので，質点 M や m の運動に重力による影響を及ぼさない。μ が M と m に対して相対的に静止するための条件として，次の 2 式が成立:

$$\frac{GM\mu}{r_1^2}\cos\theta_1 + \frac{Gm\mu}{r_2^2}\cos\theta_2 = \mu\omega^2\rho_0 = \frac{G(M+m)\mu}{(R+r)^3}\rho \quad \cdots (4)$$

$$\frac{GM\mu}{r_1^2}\sin\theta_1 = \frac{Gm\mu}{r_2^2}\sin\theta_2 \quad \cdots (5)$$

式(5)から得られる $\frac{GM}{r_1^2}$ の値を式(4)に代入し，公式

$$\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2 = \sin(\theta_1+\theta_2)$$

を用いると，

$$m\frac{\sin(\theta_1+\theta_2)}{r_2^2} = \frac{(M+m)}{(R+r)^3}\rho\sin\theta_1 \quad \cdots (6)$$

長さ r_2，ρ，角度 θ_1 および θ_2 について正弦定理より，

$$\frac{\sin\psi_1}{\rho} = \frac{\sin\theta_1}{R}$$
$$\frac{\sin\psi_1}{r_2} = \frac{\sin(\theta_1+\theta_2)}{R+r} \quad \cdots (7)$$

式(7)を式(6)に代入し，

$$\frac{1}{r_2^3} = \frac{R}{(R+r)^4}\frac{(M+m)}{m} \quad \cdots (8)$$

$\frac{m}{M+m} = \frac{R}{R+r}$ より，式(8)は，

$$r_2 = \underline{R+r} \quad \cdots (9)$$

式(5)の $\frac{Gm}{r_2^2}$ を式(4)に代入し，同様にして，

$$r_1 = \underline{R+r} \quad \cdots (10)$$

したがって，3 質点 M, m, μ は正三角形をなし，

$$\psi_1 = 60^\circ$$
$$\psi_2 = 60^\circ \quad \cdots (11)$$

ρ は余弦定理より，

$$\rho^2 = r^2 + (R+r)^2 - 2r(R+r)\cos 60^\circ$$
$$\rho = \underline{\sqrt{r^2 + rR + R^2}} \quad \cdots (12)$$

1.2 の別解

式(5)をたてた後，正弦定理から，

$$\frac{r_1}{\sin\left(180^\circ-\phi\right)} = \frac{R}{\sin\theta_1}$$

$$\frac{r_2}{\sin\phi} = \frac{r}{\sin\theta_2}$$

これらより，

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{R}{r}\times\frac{r_2}{r_1} = \frac{m}{M}\times\frac{r_2}{r_1} \qquad \cdots \text{(a)}$$

式(5)，(a)から，

$$r_1 = r_2 \qquad \cdots \text{(b)}$$

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{m}{M} \qquad \cdots \text{(c)}$$

$$\psi_1 = \psi_2 \qquad \cdots \text{(d)}$$

すると式(4)は次のようにかける:

$$M\cos\theta_1 + m\cos\theta_2 = \frac{(M+m)}{(R+r)^3}r_1^2\rho \qquad \cdots \text{(e)}$$

式(c)，(e)から，

$$\sin\left(\theta_1+\theta_2\right) = \frac{M+m}{M}\frac{r_1^2\rho}{(R+r)^3}\sin\theta_2 \qquad \cdots \text{(f)}$$

また，正弦定理を用いて，

$$\frac{\rho}{\sin\psi_2} = \frac{r}{\sin\theta_2} \qquad \cdots \text{(g)}$$

式(f)，(g)から，

$$\sin\left(\theta_1+\theta_2\right) = \frac{M+m}{M}\frac{r_1^2 r}{(R+r)^3}\sin\psi_2 \qquad \cdots \text{(h)}$$

余弦定理より，$(R+r)^2 = r_2^2 - 2r_1r_2\cos\left(\theta_1+\theta_2\right) + r_1^2 = 2r_1^2\left[1-\cos\left(\theta_1+\theta_2\right)\right] \qquad \cdots \text{(i)}$

式(h)，(i)から，

$$\sin\left(\theta_1+\theta_2\right) = \frac{\sin\psi_2}{2\left[1-\cos\left(\theta_1+\theta_2\right)\right]} \qquad \cdots \text{(j)}$$

さらに，図から，

$$\theta_1+\theta_2 = 180^\circ - \psi_1 - \psi_2 = 180^\circ - 2\psi_2$$

$$\therefore \quad \cos\psi_2 = \frac{1}{2},\ \psi_2 = 60^\circ,\ \psi_1 = 60^\circ$$

M と m は一辺の長さが $(R+r)$ の正三角形の辺であるから，μ と M の距離，μ と m の距離はともに，$\underline{R+r}$

μ と O の距離は，$\rho = \sqrt{\left(\frac{R+r}{2}-R\right)^2 + \left\{(R+r)\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}^2} = \underline{\sqrt{R^2+Rr+r^2}}$

1.3　質点 μ のもつ全力学的エネルギー E は,

$$E=-\frac{GM\mu}{r_1}-\frac{Gm\mu}{r_2}+\tfrac{1}{2}\mu\left(\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2+\rho^2\omega^2\right) \quad \cdots (13)$$

μ の位置の微小変化は回転中心から半径方向に起き，角運動量も保存されるので,
$r_1=r_2=\Re, m=M$ とおくと,

$$E=-\frac{2GM\mu}{\Re}+\tfrac{1}{2}\mu\left(\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2+\frac{\rho_0{}^4\omega_0{}^2}{\rho^2}\right) \quad \cdots (14)$$

このエネルギーが保存するので,

$$\frac{dE}{dt}=0$$

$$\frac{dE}{dt}=\frac{2GM\mu}{\Re^2}\frac{d\Re}{dt}+\mu\frac{d\rho}{dt}\frac{d^2\rho}{dt^2}-\mu\frac{\rho_0{}^4\omega_0{}^2}{\rho^3}\frac{d\rho}{dt}=0 \quad \cdots (15)$$

ここで,

$$\frac{d\Re}{dt}=\frac{\partial\Re}{\partial\rho}\frac{d\rho}{dt}=\frac{\rho}{\Re}\frac{d\rho}{dt} \quad \cdots (16)$$

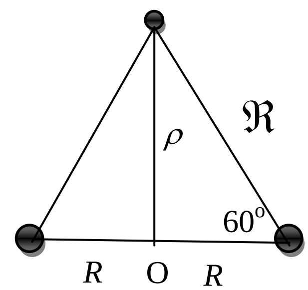

図 b

を用いて,

$$\frac{dE}{dt}=\frac{2GM\mu}{\Re^3}\rho\frac{d\rho}{dt}+\mu\frac{d\rho}{dt}\frac{d^2\rho}{dt^2}-\mu\frac{\rho_0{}^4\omega_0{}^2}{\rho^3}\frac{d\rho}{dt}=0 \quad \cdots (17)$$

$\frac{d\rho}{dt}\neq 0$ であることから,

$$\frac{2GM}{\Re^3}\rho+\frac{d^2\rho}{dt^2}-\frac{\rho_0{}^4\omega_0{}^2}{\rho^3}=0 \quad \therefore \quad \frac{d^2\rho}{dt^2}=-\frac{2GM}{\Re^3}\rho+\frac{\rho_0{}^4\omega_0{}^2}{\rho^3} \quad \cdots (18)$$

を得る。

初期状態 $\Re_0$， ρ_0 から微小変位して， $\Re=\Re_0\left(1+\frac{\Delta\Re}{\Re_0}\right)$， $\rho=\rho_0\left(1+\frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right)$ となったとき,

$$\frac{d^2\rho}{dt^2}=\frac{d^2}{dt^2}(\rho_0+\Delta\rho)=-\frac{2GM}{\Re_0^3\left(1+\frac{\Delta\Re}{\Re_0}\right)^3}\rho_0\left(1+\frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right)+\frac{\rho_0{}^4\omega_0{}^2}{\rho_0^3\left(1+\frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right)^3} \quad \cdots (19)$$

１次の近似式 $(1+\varepsilon)^n\approx 1+n\varepsilon$ を用いることで、

$$\frac{d^2\Delta\rho}{dt^2}=-\frac{2GM}{\Re_0^3}\rho_0\left(1+\frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right)\left(1-\frac{3\Delta\Re}{\Re_0}\right)+\rho_0\omega_0^2\left(1-\frac{3\Delta\rho}{\rho_0}\right) \quad \cdots (20)$$

$\Delta\rho=\frac{\Re}{\rho}\Delta\Re$ を用いて,

$$\frac{d^2\Delta\rho}{dt^2}=-\frac{2GM}{\Re_0^3}\rho_0\left(1+\frac{\Delta\rho}{\rho_0}-\frac{3\rho_0\Delta\rho}{\Re_0^2}\right)+\rho_0\omega_0^2\left(1-\frac{3\Delta\rho}{\rho_0}\right) \qquad \cdots(21)$$

$\omega_0^2=\dfrac{2GM}{\Re_0^3}$ から,

$$\frac{d^2\Delta\rho}{dt^2}=-\omega_0^2\rho_0\left(1+\frac{\Delta\rho}{\rho_0}-\frac{3\rho_0\Delta\rho}{\Re_0^2}\right)+\omega_0^2\rho_0\left(1-\frac{3\Delta\rho}{\rho_0}\right) \qquad \cdots(22)$$

$$\frac{d^2\Delta\rho}{dt^2}=-\omega_0^2\rho_0\left(\frac{4\Delta\rho}{\rho_0}-\frac{3\rho_0\Delta\rho}{\Re_0^2}\right) \qquad \cdots(23)$$

$$\frac{d^2\Delta\rho}{dt^2}=-\omega_0^2\Delta\rho\left(4-\frac{3\rho_0^2}{\Re_0^2}\right) \qquad \cdots(24)$$

図 b より $\rho_0=\Re_0\cos 30°$, $\dfrac{{\rho_0}^2}{{\Re_0}^2}=\dfrac{3}{4}$が成立し,

$$\frac{d^2\Delta\rho}{dt^2}=-\omega_0^2\Delta\rho\left(4-\frac{9}{4}\right)=-\frac{7}{4}\omega_0^2\Delta\rho \qquad \cdots(25)$$

振動の角振動数は,　$\underline{\dfrac{\sqrt{7}}{2}\omega_0}$.

1.3 の別解

$M=m$ より,　$R=r$,　${\omega_0}^2=\dfrac{G(M+M)}{(R+R)^3}=\dfrac{GM}{4R^3}$

摂動が無いときの回転の半径ρは$\sqrt{3}R$なので，摂動を考えるときの半径は$\zeta<<\sqrt{3}R$として，$\sqrt{3}R+\zeta$と表せる。 μの運動方程式は,

$$-\frac{2GM\mu}{\{R^2+(\sqrt{3}R+\zeta)^2\}^{3/2}}(\sqrt{3}R+\zeta)=\mu\frac{d^2}{dt^2}(\sqrt{3}R+\zeta)-\mu\omega^2(\sqrt{3}R+\zeta) \qquad \cdots(\mathrm{k})$$

角運動量が保存することから,　$\mu\omega_0(\sqrt{3}R)^2=\mu\omega(\sqrt{3}R+\zeta)^2$　$\cdots$ (l)

式(k)と(l)より，近似$\zeta^2\approx 0$と 1 次の近似式を用いることで,

$$-\frac{2GM}{\{R^2+(\sqrt{3}R+\zeta)^2\}^{3/2}}(\sqrt{3}R+\zeta)=\frac{d^2\zeta}{dt^2}-\frac{{\omega_0}^2\sqrt{3}R}{(1+\zeta/\sqrt{3}R)^3}$$

$$-\frac{2GM}{\{4R^2+2\sqrt{3}\zeta R\}^{3/2}}(\sqrt{3}R+\zeta)\approx\frac{d^2\zeta}{dt^2}-\frac{{\omega_0}^2\sqrt{3}R}{(1+\zeta/\sqrt{3}R)^3}$$

$$-\frac{GM}{4R^3}\sqrt{3}R\frac{(1+\zeta/\sqrt{3}R)}{(1+\sqrt{3}\zeta/2R)^{3/2}}=\frac{d^2\zeta}{dt^2}-\frac{{\omega_0}^2\sqrt{3}R}{(1+\zeta/\sqrt{3}R)^3}$$

$$-\omega_0^{\ 2}\sqrt{3}R\left(1-\frac{3\sqrt{3}\zeta}{4R}\right)\left(1+\frac{\zeta}{\sqrt{3}R}\right)\approx\frac{d^2\zeta}{dt^2}-\omega_0^{\ 2}\sqrt{3}R\left(1-\frac{3\zeta}{\sqrt{3}R}\right)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\zeta=-\left(\frac{7}{4}\omega_0^{\ 2}\right)\zeta$$

1.4　υ を静止座標系からみた，それぞれの宇宙船が中心 O のまわりを円運動する速さとする。また，宇宙船間の相対速度を下付きの添え字で表す(例えば，υ_{BA} で A に対する B の相対速度を表す)。

円運動の周期は 1 年であるから，　$T=365\times24\times60\times60\ \mathrm{s}$　$\cdots$ (26)

また角速度は，$\omega=\dfrac{2\pi}{T}$ で表される。

宇宙船の速さは，　$\upsilon=\omega\dfrac{L}{2\cos30^\circ}=575\mathrm{m/s}$　$\cdots$ (27)

これは光速よりずっと遅いので，非相対論的に取り扱って良い。

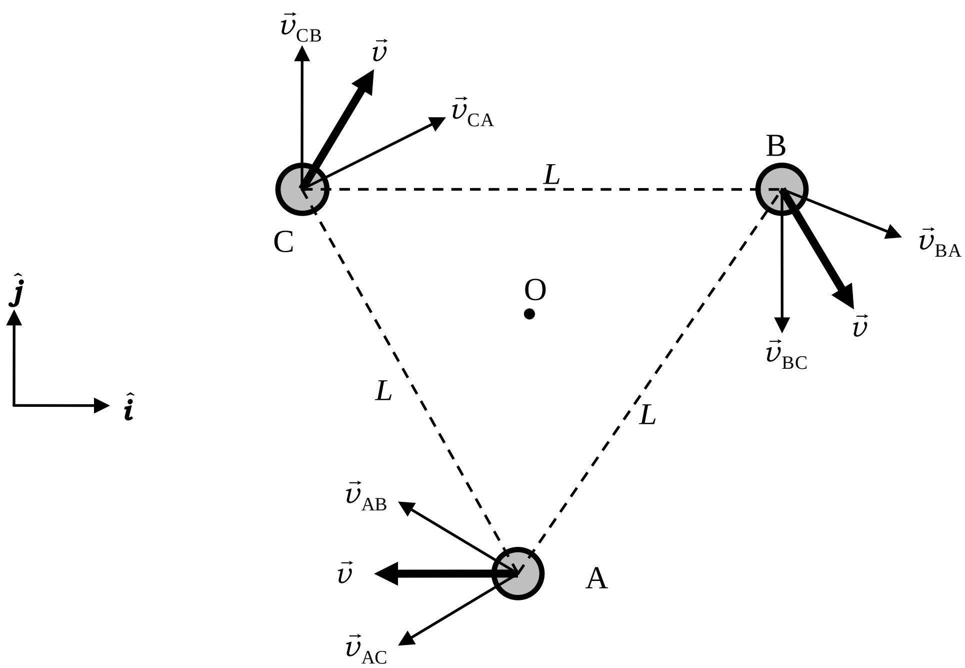

図 c

図 c の直交座標系で，B と C の速度は，それぞれ ,

$$\vec{\upsilon}_{\mathrm{B}}=\upsilon\cos60^\circ\hat{\boldsymbol{i}}-\upsilon\sin60^\circ\hat{\boldsymbol{j}},\quad \vec{\upsilon}_{\mathrm{C}}=\upsilon\cos60^\circ\hat{\boldsymbol{i}}+\upsilon\sin60^\circ\hat{\boldsymbol{j}}$$

したがって，　$\vec{\upsilon}_{\mathrm{BC}}=-2\upsilon\sin60^\circ\hat{\boldsymbol{j}}=-\sqrt{3}\upsilon\hat{\boldsymbol{j}}$

C に対する B の相対速度の大きさは，　$\sqrt{3}\upsilon \approx \underline{996\text{m/s}}$　$\cdots$ (28)

任意の 2 個の宇宙船について，それぞれのもう一方からみた相対速度は同じ大きさ逆向きになっている。

1.4 の別解

宇宙船の 1 つを回転の中心として考えると，

$$\upsilon_{\text{BC}} = \omega L = \frac{2\pi}{365\times 24\times 60\times 60\text{s}}(5\times 10^6\text{ km}) \approx 996\text{m/s}$$