

2. 帯電したシャボン玉

半径 R_0 の球形をしたシャボン玉がある。内部の空気は密度 ρ_i ，温度 T_i であり，シャボン玉は、密度 ρ_a ，大気圧 P_a ，温度 T_a の大気によって囲まれている。今，シャボン玉の膜の表面張力（円周の単位長さあたりの力）を γ ，密度を ρ_s ，厚さを t とする。また，シャボン玉の質量と表面張力は温度によって変化せず， $R_0 \gg t$ とする。

シャボン玉の石鹸膜と空気の境界面のうち，片側の表面積を dA だけ増加させるために必要な仕事 dE は， $dE = \gamma dA$ と表すことができる。ここで γ は膜の表面張力である。

2.1 $\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a}$ を γ ， P_a ， R_0 を用いて表せ。 [1.7 point]

2.2 $\gamma = 0.0250 \text{ Nm}^{-1}$ ， $R_0 = 1.00 \text{ cm}$ ， $P_a = 1.013 \times 10^5 \text{ Nm}^{-2}$ とし， $\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} - 1$ の数値を求めよ。 [0.4point]

2.3 初期状態として，シャボン玉の内部は温かい空気を満たされているとする。大気中で浮いていられる T_i の最小値を求めなさい。ただし， $T_a = 300 \text{ K}$ ， $\rho_s = 1000 \text{ kgm}^{-3}$ ， $\rho_a = 1.30 \text{ kgm}^{-3}$ ， $t = 100 \text{ nm}$ ， $g = 9.80 \text{ ms}^{-2}$ とする。 [2.0points]

シャボン玉が形成された後，十分に時間が経過すると外部の大気と熱平衡状態になり，静止した大気中をシャボン玉は自然と地面へ落下していく。

2.4 熱平衡状態において，大気が上昇する最小の速度 u を求めよ。解答は， ρ_s ， R_0 ， g ， t ，および空気の粘性 η を用いて表せ。また，この速度はストークスの法則が適用できる程度に小さく，温度が下がり熱平衡状態に至る過程で，半径は変化しないと仮定する。ストークスの法則によると，空気抵抗力は $F = 6\pi\eta R_0 u$ と表される。 [1.6points]

2.5 空気の粘性 $\eta = 1.8 \times 10^{-5} \text{ kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$ を用いて u の数値を求めよ。 [0.4point]

ここまでの数値計算の結果で，表面張力 γ を含む項の影響は小さいことがわかる。以下の全ての問いでは，表面張力を含む項は無視してよい。

- 2.6 この球形のシャボン玉が総電荷量 q で一様に帯電したとする。新しい半径 R_1 の満たす方程式を R_0 , P_a , q および真空の誘電率 ϵ_0 を用いて表せ。

[2.0points]

- 2.7 帯電量 q はそれほど大きくなく(すなわち, $\frac{q^2}{\epsilon_0 R_0^4} \ll P_a$), 半径の増加量 ΔR はごくわずかだと仮定する。 $R_1 = R_0 + \Delta R$ を満たす ΔR を求めよ。
 $x \ll 1$ のとき, $(1+x)^n \approx 1+nx$ を用いよ。

[0.7 point]

- 2.8 静止した大気中で, シャボン玉が浮かぶために必要な総電荷量 q の大きさを, t , ρ_a , ρ_s , ϵ_0 , R_0 , P_a を用いて表せ。また, 真空の誘電率 $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ として, q の数値を計算せよ。

[1.2 point]