問題３:解答

1.　クーロンの定理を用いると，r だけ離れた場所に生じる電場は以下のように書ける。

$$E_p = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (r-a)^2} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (r+a)^2}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{a}{r}\right)^2} - \frac{1}{\left(1+\frac{a}{r}\right)^2}\right) \qquad \cdots(1)$$

a は r に比べて微小であり，近似すると，

$$E_p = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(1+\frac{2a}{r}-1+\frac{2a}{r}\right)$$

$$= +\frac{4qa}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = +\frac{qa}{\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad \cdots(2)$$

$$= \frac{2p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

2.　イオンによって生じる，中性原子の位置での電場は，

$$\vec{E}_{ion} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \qquad \cdots(3)$$

したがって，生じる双極子モーメントは，

$$\vec{p} = \alpha\vec{E}_{ion} = -\frac{\alpha Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \qquad \cdots(4)$$

(2)式より，

$$\vec{E}_p = \frac{2p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\hat{r}$$

その瞬間にイオンの位置に生じる，誘導された電場 $\vec{E}_p$ は，(4)式を用いて，

$$\vec{E}_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[-\frac{2\alpha Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}\right] = -\frac{\alpha Q}{8\pi^2\varepsilon_0^2 r^5}\hat{r}$$

これより，イオンに働く力は，

$$\vec{f} = Q\vec{E}_p = -\frac{\alpha Q^2}{8\pi^2\varepsilon_0^2 r^5}\hat{r} \qquad \cdots(5)$$

負号は，この力が引力であることを示しており，Q^2 から Q の符号にかかわらず，力が引力であることがわかる。

3. イオンのポテンシャルエネルギーは次のように与えられる。

$$U = \int_r^{\infty} \vec{f} \cdot d\vec{r} \qquad \cdots(6)$$

これを用いれば,

$$U = \int_r^{\infty} \vec{f} \cdot d\vec{r} = -\frac{\alpha Q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 r^4} \qquad \cdots(7)$$

4. $r_{\min}$ の位置において，角運動量保存則より,

$$m\upsilon_{\max} r_{\min} = m\upsilon_0 b$$

$$\upsilon_{\max} = \upsilon_0 \frac{b}{r_{\min}} \qquad \cdots(8)$$

エネルギー保存則より,

$$\frac{1}{2}m\upsilon_{\max}^2 + \frac{-\alpha Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0^2 r^4} = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 \qquad \cdots(9)$$

(8)，(9)式より,

$$\left(\frac{b}{r_{\min}}\right)^2 - \frac{\alpha Q^2 \Big/ \frac{1}{2}m\upsilon_0^2}{32\pi^2\varepsilon_0^2 b^4}\left(\frac{b}{r_{\min}}\right)^4 = 1$$

$$\left(\frac{r_{\min}}{b}\right)^4 - \left(\frac{r_{\min}}{b}\right)^2 + \frac{\alpha Q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2 m\upsilon_0^2 b^4} = 0 \qquad \cdots(10)$$

(10) 式の２次方程式を解き，$\sqrt{\ }$ をとれば,

$$r_{\min} = \frac{b}{\sqrt{2}}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{\alpha Q^2}{4\pi^2\varepsilon_0^2 m\upsilon_0^2 b^4}}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad \cdots(11)$$

[この式は b が 0 でないかぎり $r_{\min}$ は 0 でないことを示している]
$Q = 0$ を代入すると,

$$r_{\min} = \frac{b}{\sqrt{2}}\left[1 \pm 1\right]^{\frac{1}{2}}$$

$r_{\min} = b$ となるために，+を選ぶ必要があることがわかる。

したがって,

$$r_{\min} = \frac{b}{\sqrt{2}}\left[1 + \sqrt{1 - \frac{\alpha Q^2}{4\pi^2 \varepsilon_0^2 m v_0^2 b^4}}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad \cdots(12)$$

5. らせん軌道を描くのは(12)式が虚数となる場合である。
（この軌道において，r の最小値は存在しないため）
以下の条件において $r_{\min}$ は実数である:

$$1 \geq \frac{\alpha Q^2}{4\pi^2 \varepsilon_0^2 m v_0^2 b^4}$$

$$b \geq b_0 = \left(\frac{\alpha Q^2}{4\pi^2 \varepsilon_0^2 m v_0^2}\right)^{\frac{1}{4}} \qquad \cdots(13)$$

よって，イオンが原子に衝突するための条件は，

$$b < b_0 = \left(\frac{\alpha Q^2}{4\pi^2 \varepsilon_0^2 m v_0^2}\right)^{\frac{1}{4}}$$

したがって，断面積 A は，

$$A = \pi b_0^2 = \pi\left(\frac{\alpha Q^2}{4\pi^2 \varepsilon_0^2 m v_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \cdots(14)$$