

Problem T1. Focus on sketches (13 点)

Part A. 弾道 (4.5 点)

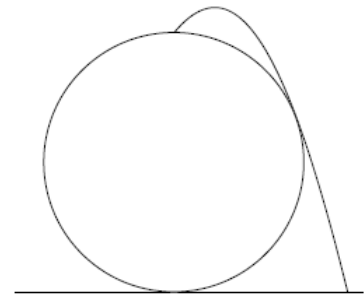
i. (0.8 点) ボールを鉛直上向きに投げると、 $x = 0$, $z = v_0^2/2g$ の位置まで達することができる (エネルギー保存則による)。このことを不等式 $z \leq z_0 - kx^2$ と比較すると、

$$z_0 = v_0^2/2g$$

次に、 $z \rightarrow -\infty$ の極限を考える。ボールの軌道は放物線で、この極限においては、水平方向の変位は (与えられた z に対して) 放物線の曲率に強く依存する。すなわち、放物線が平らになればなるほど、変位は大きくなる。放物線が最も平らになるのは、ボールが水平に投げられたときであるので、 $x = v_0 t$, $z = -gt^2/2$, すなわち軌跡の方程式が $z = -gx^2/2v_0^2$ となるときである。ここで $z \leq z_0 - kx^2$ から $-gx^2/2v_0^2 \leq z_0 - kx^2$ が必要なので、 $k \leq g/2v_0^2$ である。 $k < g/2v_0^2$ とすると 2 次関数で示される領域 $z \leq z_0 - kx^2$ と軌跡 $z = -gx^2/2v_0^2$ の間に差があるということを示している。いま、軌跡 $z = -gx^2/2v_0^2$ はボールを最も遠く ($z \rightarrow -\infty$) に飛ばすのに最適な軌跡であるから、

$$k = g/2v_0^2$$

ii. (1.2 点) まず、ボールの軌跡は可逆的で、エネルギー保存則により、この問題は次の問題に言い換えることができる。つまり、球状の建物の最高点からボールを投げたとき、ボールが屋根にぶつからずに地面に到達するのに必要な最小の速さはどれだけで、その軌跡はどのようなになるか。このような軌跡は、屋根に接するように投射されるか、もしくは最高点における曲率半径が R になるように水平に投射されるかのどちらかになるであろうことは自明である。どちらの場合でもなければ、投射角を保ったまま与える速さを少し小さくしても、ボールは屋根に当たることなく地面に到達することが可能になるからである。さらに、最高点で水平になるように打ち出したとすると、放物線の曲率は最高点で最大になるため、ボールの軌跡は最高点以外の点では建物と共有点をもたない。よって、初速を一定に保ちつつ、(水平からわずかに上に) 投射角をわずかに大きくすることが可能であり、その新しい軌跡は最高点で水平になっておらず、かつ屋根のどことも接していない。そこで、このような議論を続けることで初速を小さくすることができる。したがって、最適な軌跡は図に示した通り、屋根のどこかで接していなければならない。



iii. (2.5 点) 強引な方法としては、最適な軌跡が球状の建物と 2 点で共有点を持ち、かつそのうちの 1 点で接する条件を書き下すことであろう。この方法だと 4 次方程式が現れるため、適当な時間制限がある中でこの解法を選ぶのは現実的ではない。

別の解法を考える。まず、建物の内部の領域はボールが建物の最高点から初速度 v_0 で投げられたときに到達できる領域に含まれる必要がある。このとき、適切な投射角で初速 v_0 のボールを投げると、ボールは建物を越えることができ、その投射角を変えると、建物の内部の

いかなる場所にも衝突させることができる。また、最小の初速 v_0 で投げられたボールが到達できる領域の境界線は建物に接することが必要である。もしその境界線が建物との交点をもたず、かつ接してもしなければ、 v_0 より小さな速さで、途中で球状の建物に衝突させることなく、建物を越えることができってしまう。

したがって、最適な軌跡を描くボールが最高点でもつ初速を v_0 とすると、初速 v_0 のボールが到達可能な領域と球状の建物は接する。対称性により、接点は2つ存在する（速さが小さければ4つの交点が存在し、速さが大きければ交点は存在しない）。原点を建物の最高点にとると、共有点の座標は次の2つの方程式から決定される。

$$x^2 + z^2 + 2zR = 0, \quad z = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$$

x^2 を消去すると、 z に関する2次方程式

$$z^2 + 2\left(R - \frac{v_0^2}{g}\right)z + \frac{v_0^4}{g^2} = 0$$

となる。接するとき、判別式が0になるので、

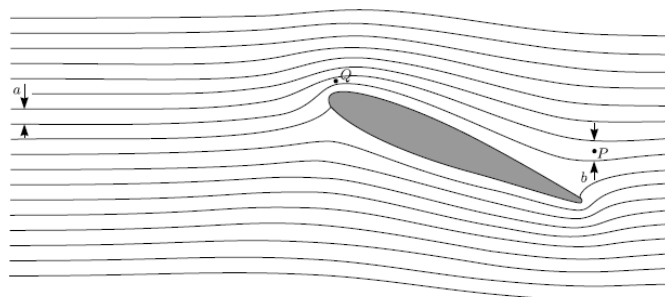
$$D/4 = \left(R - \frac{v_0^2}{g}\right)^2 - \frac{v_0^4}{g^2} = 0 \quad \therefore v_0^2 = \frac{gR}{2}$$

最後に、エネルギー保存則により、地面での速さの2乗は建物の頂点での速さの2乗に比べて $4gR$ 大きくなるので、

$$v_{min} = \sqrt{v_0^2 + 4gR} = 3\sqrt{\frac{gR}{2}}$$

Part B. 翼の周囲の空気の流れ (4点)

i.(0.8点) 飛行機と共に動く座標系から見ると、2つの流線の間を流れる空気の流量の体積(体積流量率)は流体の連続性から一定である。流量の体積は速さと断面積の積で与えられる。2次元平面においては断面積は流線間の幅に比例し、その幅は図から読みとることができる。



いま無風状態であるので、飛行機の座標系では静止した空気の速さは v_0 である。図を測定すると、 $a = 10\text{mm}$ 、 $b = 13\text{mm}$ であり、 $v_0 a = ub$ から $u = v_0 \frac{a}{b}$ となる。また、点Pにおい

ては流線は水平で速度はすべて平行であるので、ベクトルの足し算はスカラーの足し算になる。すなわち、空気の対地速度は、

$$v_p = v_0 - u = v_0 \left(1 - \frac{a}{b}\right) = 23\text{m/s}$$

ii.(1.2点) 動的圧力 $\frac{1}{2}\rho v^2$ は大気圧に比べて十分小さいが、この動的圧力によって断熱膨張と断熱圧縮が引き起こされる。断熱膨張が起こる領域では気温は減少し、飽和蒸気圧は減少する。露点に達すると、水滴が現れる。この過程が起こるのは断熱膨張の影響が最も大きいとき、すなわち、大気の静力学的圧力が最小となるときである。またそのとき、Bernoulliの法則 $p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{const.}$ により結果的に、動的圧力は最大になる。そのような点は飛行機の座標系において空気の速さが最大になる点であるから、流体の連続性により流線の間隔が最も狭い点である。したがって、点Qは上図に示された点である。

iii.(2点)

まず、与えられた水分をもった空気の露点を計算する(相対的な圧力変化は小さいので、露点の圧力依存は無視することができる)。水の蒸気圧は、 $p_w = p_{sa}r = 2.08\text{kPa}$ である。飽和蒸気圧の相対的な変化は小さいため、温度による変化は線形変化として近似できるので、

$$\frac{p_{sa} - p_w}{T_a - T} = \frac{p_{sb} - p_{sa}}{T_b - T_a} \Rightarrow T_a - T = (T_b - T_a) \frac{(1-r)p_{sa}}{p_{sb} - p_{sa}}$$

数値を代入すると、 $T \approx 291.5\text{K}$ である。

次に、空気の速度と温度の関係を定めなければならない。そのためにエネルギー保存則を考える。すなわち、そのよく使われる形としてBernoulliの法則を用いる。この法則を考えることで、実際の現象を十分反映した近似のもとでのモデルをつくることができるが、厳密に考えれば空気が圧縮性をもつことによる膨張もしくは圧縮の影響を組み込まなければならない。1モルでモル質量が μ 、体積が $V = RT/p$ の空気をいま考える。一連の過程は素早く進行し、空気塊は大きいので、空気塊どうしの熱のやりとりは無視できる。さらに、過程の速さは音速以下である。以上をまとめて考えると、この過程は断熱過程であると考えることができる。ここで流線にそって仮想的につくった管を考える。その一端での物理量を添え字1で与え、もう一端を添え字2で与える。すると、1モルの気体は管の一端から中に入り、もう一端から外に出る。この気体の流入によって運動エネルギー $\frac{1}{2}\mu v_1^2$ が中に運ばれ、気体の流出によって $\frac{1}{2}\mu v_2^2$ が外に出される。流入する気体は $p_1 V_1 = RT_1$ の仕事をし、流出する気体は $p_2 V_2 = RT_2$ の仕事をする。気体のモル比熱を $C_V = \mu c_V$ 、 $C_p = \mu c_p$ と定義すると、流入する気体は $C_V T_1$ の熱エネルギーをもち、流出する気体は $C_V T_2$ の熱エネルギーをもっている。したがって、エネルギー収支を考えると、

$$\frac{1}{2}\mu v_1^2 + C_V T_1 + RT_1 = \frac{1}{2}\mu v_2^2 + C_V T_2 + RT_2, \quad C_p = C_V + R$$

より、 $\frac{1}{2}\mu v^2 + C_p T = \text{const.}$ が導かれる。また、

$$v_{\text{crit}} a = v_Q c$$

これらの式より、 $\Delta \frac{v^2}{2} = \frac{1}{2}(v_Q^2 - v_{\text{crit}}^2) = \frac{1}{2}v_{\text{crit}}^2 \left(\frac{a^2}{c^2} - 1\right) = c_p \Delta T$ 、ただし c は点Qにおける

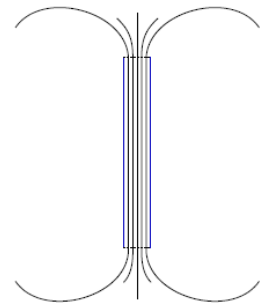
流線の間隔である。よって、

$$v_{crit} = c \sqrt{\frac{2c_p \Delta T}{a^2 - c^2}} \approx 27.6 \text{ m/s}$$

($c \approx 4.5 \text{ mm}$ であり $\Delta T = 1.5 \text{ K}$ であることを用いた) しかし現実には、凝縮に必要とされる速度はおそらくもう少し速い。なぜなら、過程の進行が速い凝縮においては、過飽和状態が十分に起こりうるからである。けれども、オーダーを評価するという観点から見れば、この値は十分に有効であろう。

Part C. 磁気ストロー (4.5 点)

i.(0.8 点) 超伝導体の管の壁面の影響のために、磁力線は管を通りぬけることはできない。よって管の内部で磁束は一定である。管の内部の閉曲線においては、磁場の渦は存在しないので、磁力線は曲がらず、したがって磁場は一定であることが導かれる。ストローの磁力線はソレノイドコイルの磁力線に似ている。



ii.(1.2 点) 管が (実質的に) 微小な長さ Δl 伸びたときの磁気エネルギーの変化を考える。管を通る磁束は保存される。なぜなら、磁束

が変化するといかなるときにも 0 でない起電力 $\frac{d\Phi}{dt}$ が生じ、抵抗 0 に対して無限の電流が流れ

る。したがって、磁束密度の大きさは $B = \frac{\Phi}{\pi r^2}$ で、磁場のエネルギー密度は $\frac{B^2}{2\mu_0}$ であるので、

磁気エネルギーの変化は、

$$\Delta W = \frac{B^2}{2\mu_0} \pi r^2 \Delta l = \frac{\Phi^2}{2\mu_0 \pi r^2} \Delta l$$

このエネルギーの増加は、張力によってなされた仕事に等しいため、 $\Delta W = T \Delta l$ であるので、

$$T = \frac{\Phi^2}{2\mu_0 \pi r^2}$$

iii. (2.5 点) 1つのストローが微小な変位を受けたときの磁気エネルギーの変化を考える。管の内部の磁場は磁束が保存されるため一定であるが、管の外部では磁場は変化する。ストローの外部の磁場は次の条件によって決定される。すなわち、 \vec{B} の渦が存在しないこと (ストローの外部には電流が存在しないため)、ストローの端にのみ磁束線の源は存在し他の場所には存在しないこと、ストローの端点はそれぞれ一定の磁束 $\pm\Phi$ の源になっていることの3つである。これらによって定まる場の状況は4つの $\pm Q$ の大きさをもった電荷によって決定される電場の状況とまったく同じ状況になる。電荷の間の距離が電荷の大きさよりもずっと大きくなると電荷は点電荷とみなせる (電荷の近傍にある電場はほぼ一定に保たれるので、全

電場によるエネルギーの変化の各々の寄与は無視できる)。したがってストローの端点に磁荷が置かれている状況を考えればよい。2つの磁荷(単磁荷)の間にはたらく力を計算するために、磁気的な量と電気的な量との間の対応関係を考える。

距離 a 離れた2つの電荷 Q について、はたらく力は $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{a^2}$ で、1つの電荷の位置にはもう1つの電荷がつくる電場によってエネルギー密度 $w = \frac{1}{32\pi^2\epsilon_0} \frac{Q^2}{a^4}$ でエネルギーがたくわえられている。すなわち、 $F = 8\pi w a^2$ である。この形式は力に関しての普遍的な表現で(2つの同じ大きさで符号が逆向きの電荷による場の流線と流線が同じ場合に関して)、エネルギー密度だけに依存しており、場の性質にはよらない。よってこの形式を磁場に適用する。場の源(電荷や磁荷)の仮想的な変位に対して場の全エネルギーの微分を計算することによって力を計算することができる。そして、2つの場のエネルギー密度がそれぞれ1つの点で等しければ、任意の位置において等しく、同様に場の全エネルギーも等しい。またガウスの法則により、一定の磁束 Φ の点源から距離 a における磁束密度は $B = \frac{1}{4\pi} \frac{\Phi}{a^2}$ である。したがって、エネルギー密度は $w = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{32\pi^2\mu_0} \frac{\Phi^2}{a^4}$ なので、

$$F = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{\Phi^2}{a^2}$$

2つのストローに関しては、4つの磁荷で置きかえることができる。すると、ストローの軸に平行な力は打ち消し合う(対角線上に位置した同符号の磁荷は反対方向に力を及ぼし合う)。ストローの軸に垂直にはたらく力は、2つの異符号の磁荷による引力 $F_1 = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{\Phi^2}{l^2}$ と対角線上に位置した2つの磁荷による反発力 $F_2 = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{\Phi^2}{(\sqrt{2}l)^2} \frac{1}{\sqrt{2}}$ の重ね合わせとして得ることができる。以上より、総じてはたらく引力は、

$$F = 2(F_1 - F_2) = \frac{4 - \sqrt{2}}{8\pi\mu_0} \frac{\Phi^2}{l^2}$$

Problem 2 ケルビンの点滴 (8点)

Part A. 一本のパイプ (4点)

i. (1.2 点)

水滴の力の釣り合いを考える。

$d \ll r$ よりパイプ内の水圧の増加分 Δp による力 $\pi \Delta p d^2/4$ は無視できる。よって働くのは、水滴への重力 $mg = \frac{4}{3}\pi r_{max}^3 \rho g$ と、水滴とパイプの端の間に働く表面張力である。表面張力は垂直に働き、 $\pi \sigma d$ と書ける。よって、

$$\pi \sigma d = \frac{4}{3}\pi r_{max}^3 \rho g$$

$$\therefore r_{max} = \sqrt[3]{\frac{3d\sigma}{4\rho g}}$$

となる。

ii. (1.2 点)

$d \ll r$ よりパイプによる水滴の静電容量の変化は無視でき、球として扱える。このとき、水滴の電位 φ は、電荷 Q を用いて次のように書けるから、

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad \therefore Q = 4\pi\epsilon_0 \varphi r$$

となる。

iii. (1.6 点)

表面張力による内向きの圧力 $\frac{2\sigma}{r}$ と、電荷による外向きの圧力 $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 \frac{\varphi^2}{r^2}$ がつり合うときの電位が φ_{max} である。電位が φ_{max} より大きくなったときに外向きの圧力が大きくなり不安定になる。

このとき、圧力のつり合いから

$$\frac{2\sigma}{r} = \frac{1}{2}\epsilon_0 \frac{\varphi_{max}^2}{r^2}$$
$$\varphi_{max} = 2\sqrt{\frac{\sigma r}{\epsilon_0}}$$

と書ける。

(別解)

圧力がつり合うとき、水滴の微小膨張にかかる仕事 dW が0になることを利用しても解ける。エネルギー保存則より、

$$dW + dW_{el} = \sigma d(4\pi r^2) + \frac{1}{2}\varphi_{max}^2 dC_d$$

ここで水滴の電気容量 $C_d = 4\pi\epsilon_0 r$ 、電気的工作 $dW_{el} = \varphi_{max} dq = 4\pi\epsilon_0 \varphi_{max}^2 dr$ である。 $dW = 0$ を代入すると前述の値が出る。

・表面張力による圧力の導出

水滴内の圧力は、表面張力による内向きの圧力だけ、外側の圧力より大きい。半径 r の球の半径が dr だけ大きくなったとき、表面積の増加による表面張力のする負の仕事

$$-4\pi\sigma((r+dr)^2 - r^2) \approx -8\pi\sigma r dr$$

と、体積の増加による球内外の圧力差 Δp のする仕事

$$\frac{4}{3}\pi\Delta p((r+dr)^3 - r^3) \approx 4\pi r^2 \Delta p dr$$

の和をゼロとして、

$$-8\pi\sigma r dr + 4\pi r^2 \Delta p dr = 0$$

$$\therefore \Delta p = \frac{2\sigma}{r}$$

となる。こうして、圧力差すなわち表面張力による圧力の大きさ $\Delta p = 2\sigma/r$ を得る。

・電荷による圧力の導出

(a) エネルギー保存則の観点から

体積が微小量 ΔV だけ大きくなったとき、導体球では表面電場の大きさを $E (= \frac{\varphi}{r})$ として、

$$\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \Delta V = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{\varphi^2}{r^2} \Delta V$$

の分の電場のエネルギーが失われる。

この減少分は、体積が ΔV 増加したとき外向きの電場のした仕事と考えられる。したがって、電場による圧力を Δp_e として、

$$\begin{aligned} \Delta p_e \Delta V &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{\varphi^2}{r^2} \Delta V \\ \Delta p_e &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{\varphi^2}{r^2} \end{aligned}$$

となる。

(b) 導体の性質から

いま、表面電荷が電荷密度 σ で存在していたとする。表面近くで、面積 S の領域にかかる力は $F = \sigma S \bar{E}$ と書ける。ここで、 \bar{E} は表面電荷が作ったものではなく、 S の外部からの電場とする。

$\Delta p_e = \frac{F}{S} = \sigma \bar{E}$ は電荷による圧力と考えられる。

この \bar{E} の大きさは導体内部に電場が存在しないことから導ける。まず、表面電荷は導体の内外に合計 $\Delta E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ の電場を生じる(ガウスの法則より)。内側にはその半分だけが生じ、外部電場と打ち消しあって、

$$\begin{aligned} E - \frac{1}{2} \Delta E &= 0 \\ \bar{E} &= \frac{1}{2} \Delta E \end{aligned}$$

となる。

また、

$$Q = 4\pi r^2 \sigma$$

と

$$Q = 4\pi \varepsilon_0 \varphi r$$

を比較すると、

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0 \varphi}{r}$$

が分かる。こうして、電場による圧力

$$\Delta p_e = \frac{F}{S} = \sigma \bar{E} = \frac{1}{2} \Delta E \sigma = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{\varphi^2}{r^2}$$

を導くことができる。

Part B. 二本のパイプ (4点)

i. (1.2 点)

コンデンサーがもつ電圧は、両方の円筒電極にかかり、それぞれの円筒電極には $|\frac{1}{2}U| = |\frac{1}{2}\frac{q}{C}|$ の電圧がかかる(U はコンデンサーの電圧である)。ここでは円筒電極の電圧の正負が示されていないが、一方が正ならもう一方は負である。水滴は、接地しているので電位0である。

ここで、円筒電極は効果的に点滴を覆い、外部の環境の影響をなくす。つまり、両水滴には絶対値 $|\frac{1}{2}\frac{q}{C}|$ の電圧がかかっていると見なせる。

これをpart.A ii.の結果に代入して

$$Q_0 = 4\pi \varepsilon_0 \frac{1}{2} \frac{q}{C} r_{\max} = 2\pi \varepsilon_0 \frac{q}{C} r_{\max}$$

とわかる。

ii. (1.5 点)

ボウルは交差して繋がっていて、落ちる水滴とそれを受けるボウルにたまる電荷は符号が同じである。つまりこの装置は点滴が落ちるほど、その電位差を拡大していく。

微小時間 dt 当たりの、電荷の変化量 dq は

$$dq = Q_0 dN = 2\pi\epsilon_0 \frac{q}{C} r_{\max} n dt$$

このとき $dN = n dt$ は dt 間に落ちた水滴の数である。

この式は指数関数の微分とみると簡単に解ける。 $q(0) = q_0$ の初期条件の元で解くと、

$$q = q_0 e^{\gamma t}, \quad \gamma = \frac{2\pi\epsilon_0 r_{\max} n}{C} = \frac{\pi\epsilon_0 n^3}{C} \sqrt{\frac{6\sigma d}{\rho g}}$$

となる。 $(r_{\max} = \sqrt[3]{\frac{3d\sigma}{4\rho g}}$ を用いた。)

iii. (1.3 点)

水滴が水面にたどり着いたとき、ゼロ以上の運動エネルギーをもっている。つまり、電圧が限界値 U_{\max} のとき、水面との重力の位置エネルギーの差 mgH と電氣的位置エネルギーの差 $Q\Delta U$ が、

$$mgH = Q\Delta U \tag{1}$$

となるときである。

水滴は接地しているので電位 0 である。電位差 ΔU は円筒電極のポテンシャル $\frac{1}{2}U$ と下のボウルの電位 $-\frac{1}{2}U$ の差によって、

$$\Delta U = \frac{1}{2}U - \left(-\frac{1}{2}U\right) = U$$

と書ける。

ここで、Part.B i. より $Q = 2\pi\epsilon_0 U_{\max} r_{\max}$ となり、Part.A i. より $r_{\max} = \sqrt[3]{\frac{3d\sigma}{4\rho g}}$ 、 $mg = \pi\sigma d$ となるから、これらを(1)式に代入して、

$$U_{\max} = \frac{mgH}{2\pi\epsilon_0 U_{\max} r_{\max}}$$

$$U_{\max} = \sqrt{\frac{mgH}{2\pi\epsilon_0 r_{\max}}} = \sqrt[6]{\frac{H^3 g \sigma^2 \rho d^2}{6\epsilon_0^3}}$$

Problem T3 原子星の誕生

i. (0.8点)

$$T = \text{一定} \Rightarrow pV = \text{一定}, \quad V \propto r^3$$

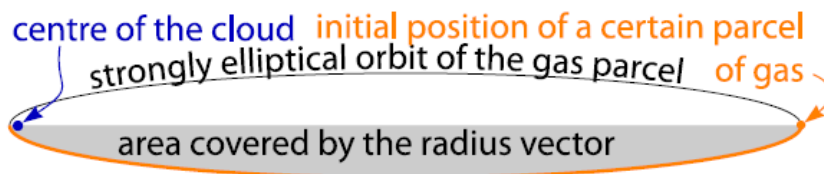
$$\therefore p \propto r^{-3} \Rightarrow \frac{p(r_1)}{p(r_0)} = 2^3 = 8$$

ii. (1.5点) 星が収縮する間にはガスの圧力の影響は無視できるため、ガスは自由落下を行う。重力についてのガウスの法則と対称性より、星と中心が一致する球上のすべての点での重力は、その球の内側のガスの全質量が中心に集められた場合の重力に等しい。さらに、題意より、半径が r_0 から $0.95r_0$ まで収縮している間、星の表面での重力は一定とみなされる。つまり、星の表層のガスの加速度はほぼ一定とみなされ、ガスの粒子は初速度ゼロで等加速度運動をする。よって、

$$t \approx \sqrt{\frac{2(r_0 - r_2)}{g}}, \quad g \approx \frac{GM}{r_0^2} \quad \therefore t \approx \sqrt{\frac{2r_0^2(r_0 - r_2)}{Gm}} = \sqrt{\frac{0.1r_0^3}{Gm}}$$

iii. (2.5点) 星の表層のガスが受ける重力は、星の全質量が中心に集められたときの質点によるものとみなせる。そのためケプラーの第1法則を適用することができ、星の表層のガスは星の中心を焦点とし楕円軌道の半分を動く。この場合、軌道はつぶれた楕円となり、焦点はその両端となる。この楕円軌道の長半径は $r_0/2$ である。ケプラーの第3法則より、この運動の周期は、同じ質点の周りを半径 $r_0/2$ の円軌道で回る場合と等しい。求める時間 $t_{r \rightarrow 0}$ は周期の半分である。ガス粒子の円運動の式より、求める時間は、

$$\left(\frac{2\pi}{2t_{r \rightarrow 0}} \right)^2 \frac{r_0}{2} = \frac{Gm}{(r_0/2)^2} \Rightarrow t_{r \rightarrow 0} = \pi \sqrt{\frac{r_0^3}{8Gm}}$$



(別解) ただし、以下の積分計算を試験時間内に実行することは難しい。

エネルギー保存則より、 $E = -\frac{Gm}{r_0}$ において、

$$\frac{\dot{r}^2}{2} - \frac{Gm}{r} = E$$

変数分離を行って積分形にすると、

$$t = -\int \frac{dr}{\sqrt{2E + 2Gm/r}}$$

ここで、 $\sqrt{2E+2Gm/r} = \xi$, $\sqrt{2|E|} = v$ とおくと、 $r = r_0 \rightarrow 0$ のとき、 $\xi = 0 \rightarrow \infty$ より、

$$\frac{t_{r \rightarrow 0}}{4Gm} = \int_0^\infty \frac{d\xi}{(\xi^2 + v^2)^2}$$

となり、不定積分

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{x}{2a^2(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^3} \tan^{-1} \frac{x}{a}$$

を用いて、

$$t_{r \rightarrow 0} = \pi \sqrt{\frac{r_0^3}{8Gm}}$$

を得る。

iv. (1.7点) 理想気体の状態方程式より、 $n = \frac{m}{\mu}$ を用いて、

$$pV = nRT_0 \quad \therefore \quad p = \frac{mRT_0}{\mu V}$$

重力が星にする仕事は、

$$W = -\int p dV = -\frac{mRT_0}{\mu} \int_{\frac{4}{3}\pi r_0^3}^{\frac{4}{3}\pi r_3^3} \frac{dV}{V} = \frac{3mRT_0}{\mu} \ln \frac{r_0}{r_3}$$

温度は一定なので、内部エネルギーも一定である。熱力学第1法則 $\Delta U = Q + W$ より、放出した熱量は上で求めた W である。

v. (1点) 半径が r^3 より小さい場合の収縮は断熱変化なので、

$$pV^\gamma \text{一定} \Rightarrow TV^{\gamma-1} = \text{一定},$$

$$\therefore T \propto V^{1-\gamma} \propto r^{3-3\gamma} \Rightarrow T = T_0 \left(\frac{r_3}{r} \right)^{3\gamma-3}$$

vi. (2点) 収縮により、重力による位置エネルギーが熱へと変化する。 $r_3 \gg r_4$ であるから、収縮による重力の位置エネルギーの変化、すなわち、ガスが重力によってなされた仕事は(訳注1)、

$$\Delta W = -Gm^2 \left(\frac{1}{r_4} - \frac{1}{r_3} \right) \approx -\frac{Gm^2}{r_4}$$

(正確には係数 $3/5$ が付く)

前問の結果より、 $r_3 \gg r_4 \Rightarrow T_4 \gg T_0$ がわかるので、ガスの内部エネルギーの変化は、

$$\Delta U = c_v \frac{m}{\mu} (T_4 - T_0) = \frac{R}{\gamma-1} \frac{m}{\mu} T_4 \approx \frac{m}{\mu} RT_4$$

さらに前問を用いて、

$$T_4 = T_0 \left(\frac{r_3}{r_4} \right)^{3\gamma-3}$$

また、この変化は断熱なので、 $\Delta U + \Delta W = 0$ である。よって、

$$\frac{Gm^2}{r_4} \approx \frac{m}{\mu} RT_0 \left(\frac{r_3}{r_4} \right)^{3\gamma-3} \Rightarrow r_4 \approx r_3 \left(\frac{RT_0 r_3}{\mu m G} \right)^{\frac{1}{3\gamma-4}}$$

ゆえに、

$$T_4 \approx T_0 \left(\frac{RT_0 r_3}{\mu m G} \right)^{\frac{3\gamma-3}{4-3\gamma}}$$

(別解)

重力による圧力 $\rho r_4 G m / r_4^2$ (訳注2) と、ガスの圧力 $p_4 = (\rho / \mu) R T_4$ のつり合いを用いても上と全く同じ結果を得ることができる。

(訳注 1)

全質量 M のガス粒子 2 が、半径 R の球状に一様に密度 $\rho = M / (4/3)\pi R^3$ で分布するとき、その重力の位置エネルギーを求める。

半径 $r \sim r + dr$ ($0 < r < R$) の球殻部分は、半径 r の球内の質量 $m = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$ から重力を受けるから、その位置エネルギーは、

$$dU = \left(-\frac{Gm}{r} \right) \rho \cdot 4\pi r^2 dr$$

と表されるから、全位置エネルギーは、

$$\begin{aligned} U &= \int dU = G\rho^2 \int_0^R \left(-\frac{1}{r} \right) \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot 4\pi r^2 dr \\ &= -\frac{3GM^2}{\left((4/3)\pi R^3 \right)^2} \int_0^R \left((4/3)\pi \right)^2 r^4 dr = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \end{aligned}$$

(訳注 2)

位置エネルギー U の半径 R の球状ガスの表面に作用する圧力を p とすると、ガスが仕事をすると、その分、位置エネルギーは減少するから、

$$p \cdot 4\pi R^2 dR = -dU \quad \therefore \quad p = -\frac{1}{4\pi R^2} \frac{dU}{dR}$$

ここで、 $U = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$ を代入し、 $M = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$ を用いて、

$$p = -\rho \frac{GM}{5R} \approx -\rho \frac{GM}{R}$$

を得る。