

プレチャレンジ問題（2012 月 12 月分）の解答と解説

1. (a) ニュートンの運動の法則 $f = ma$ より、質量 $m = 1 \text{ kg}$ のときの力 f の値がそのまま加速度 a の値になる： $f = a$ （注意：単位はすべて MKSA 単位系で統一すること）。一方、万有引力の法則の式 $F = G \frac{m m_2}{r^2}$ で、地上の物体の質量 $m_1 = 1 \text{ kg}$ とし、 m_2 を地球の質量 M とし、地球の中心と物体との距離 r は地球の半径 R なので、上で述べた理由で、このとき物体にはたらく力 F が重力加速度 g の値と同じになる。つまり、 $g = G \frac{M}{R^2}$ と書ける。問題文に与えられた数値を代入すると、

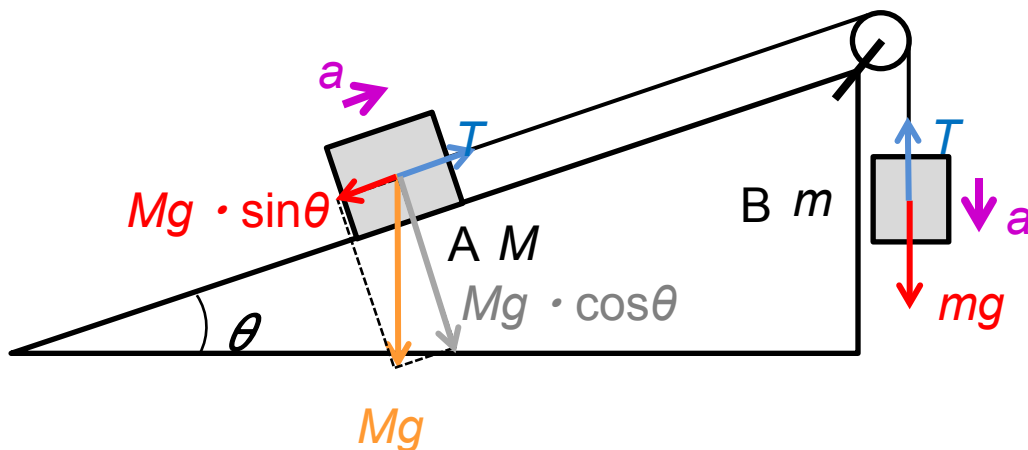
$$g = 6.673 \times 10^{-11} \cdot \frac{5.974 \times 10^{24}}{(6.378 \times 10^6)^2} = 9.79980 \cong 9.80 \text{ m/s}^2.$$

【調べてみよう】

地球の質量や半径、万有引力定数はどのように測定されたのだろうか。例えば下記の Web サイトを見てみよう。

<http://www.s-yamaga.jp/nanimono/chikyu/chikyunokatachi-01.htm>

エラトステネスやキャベンディッシュなど歴史上の偉人に出会うことでしょう。



2. (a) 上図のように、まず、それぞれの物体にはたらく力を書いてみよう。物体 A と物体 B にはそれぞれは重力による下向きの力 Mg と mg がはたらく。物体 A にはたらく重力を分解すると、斜面に添う方向の力 $Mg \sin \theta$ と斜面に垂直方向の力 $Mg \cos \theta$ になる。

次に、それぞれの物体の運動方程式を立てる。ひもはたるまないで、両方の物体は同じ加速度 a で図に示した向き（紫色ベクトル）に動き出すと仮定する。ひもの張力を T として、物体 B に対しては鉛直方向の運動方程式、物体 A に対しては斜面に添う方

程式を書く

$$\text{物体 A : } T - Mg \sin \theta = Ma \quad \dots(1)$$

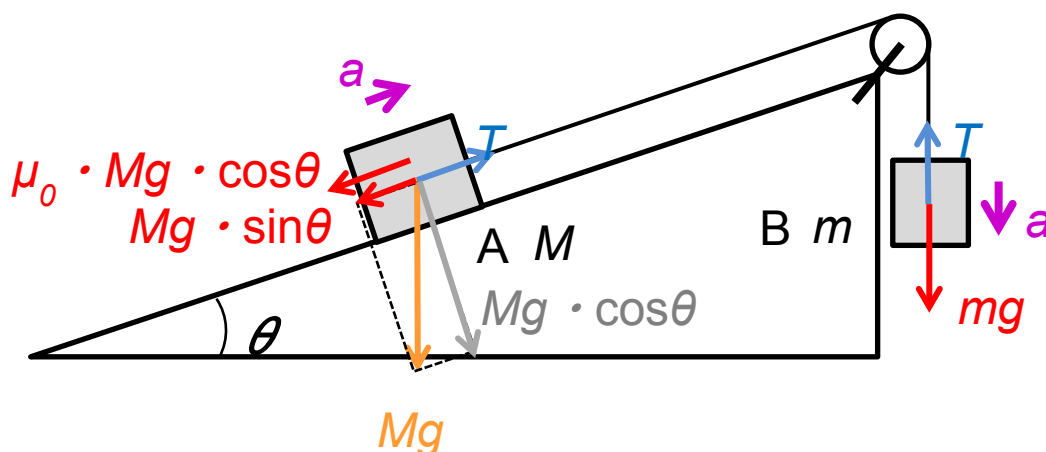
$$\text{物体 B : } mg - T = ma \quad \dots(2)$$

張力 T は未知数なので、この2つの式を辺々加えて張力 T を消去すると、

$$(m - M \sin \theta)g = (m + M)a \text{ となる。よって加速度 } a \text{ は } a = \frac{m - M \sin \theta}{m + M}g \text{ となる。問題}$$

の趣旨は、物体 B が落下する条件を求めることなので、それは加速度が $a > 0$ ということである。よって求める条件は $m > M \sin \theta$ である。

(b)



斜面に摩擦がある場合、物体 A にはたらく摩擦力は垂直抗力 ($Mg \cdot \cos \theta$) に摩擦係数を乗じた値が摩擦力の大きさになる。動き出す瞬間にはたらく摩擦力の計算には静止摩擦係数 μ_0 を使う。また、摩擦は常に運動を妨げる方向にはたらくので、上図に示した向きにはたらく。その結果、物体 A の運動方程式は、(2)式の代わりに

$$\text{物体 A : } T - Mg \sin \theta - \mu_0 \cdot Mg \cos \theta = Ma \quad \dots(3)$$

(3)式と(2)式を連立方程式として解き、張力 T を消去すると、

$$(m - M \sin \theta - \mu_0 \cdot M \cos \theta)g = (m + M)a \text{ となる。よって、加速度 } a \text{ は}$$

$$a = \frac{m - M \sin \theta - \mu_0 \cdot M \cos \theta}{m + M}g \text{ となる。問題の趣旨は、手を離れたときに物体 B が落}$$

下し始める条件なので、それは $a > 0$ ということである。よって求める条件は

$$\underline{m > M(\sin \theta + \mu_0 \cdot \cos \theta)}$$

【調べてみよう】 斜面上を物体が滑り落ちるガリレオの実験を調べてみよう。その実験から何がわかったのか？