

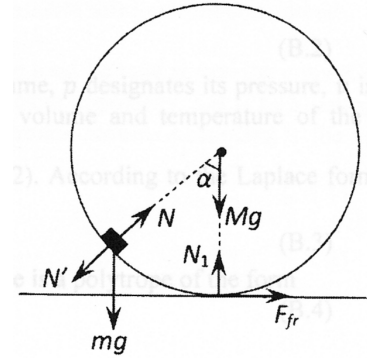
# Problem 1

## Part A

水平面に座標系を固定して、右向きに  $x$  軸，上向きに  $y$  軸をとる。

右図の通り，小物体-円筒の重心-円筒と地面の接点のなす角を  $\alpha$  とする。

小物体にかかる力は，重力  $mg$ ，円筒からの垂直抗力  $N$ 。円筒にかかる力は，重力  $Mg$ ，地面からの垂直抗力  $N_1$ ，地面との摩擦力  $F_{fr}$ ，小物体からの垂直抗力  $N' = -N$ 。円筒の並進運動の速度を  $v$ ，加速度を  $w$ ，回転運動の角速度を  $\omega$ ，角加速度を  $\varepsilon$ ，小物体の速度の  $x$  成分を  $u_x$ ，加速度の  $x$  成分を  $a_x$  とおく。（すべて右向きまたは正の向き）



図形的に  $\varepsilon = -w/R$ ， $\omega = -v/R$ 。

水平方向の運動方程式を考えると重要な関係式が見えてくる。

小物体についての運動方程式より， $ma_x = N \sin \alpha$ 。

円筒の並進運動の運動方程式より， $Mw = N' \sin \alpha + F_{fr}$ 。

円筒の慣性モーメント  $I = MR^2$  を用いて， $I\varepsilon = F_{fr}R$ 。

これらを解くと， $ma_x = -2Mw$ 。

しかもこれらは初速 0 だったので， $mu_x = -2Mv$  となる。

次に，最初の時と最下の時について，エネルギー保存の式を立てる。

$$mgR = mu_x^2/2 + Mv^2/2 + I\omega^2/2.$$

以上を解くと，

$$u_x = 2\sqrt{\frac{MgR}{2M+m}}, \quad v = -\frac{m}{M}\sqrt{\frac{MgR}{2M+m}}.$$

ここから，軸の向きはそのままに，円筒重心を原点とする座標系に移る。

小物体の速度は右向き  $v_{rel} = u_x - v$ 。

小物体の角加速度は正向き  $\omega_{rel} = -v_{rel}/R$ 。

ここで，小物体の角加速度が  $\varepsilon_{rel} = 0$  であることから，小物体の加速度は上向き  $a_{rel} = R\omega_{rel}^2$  で求められる。

$$\text{したがって， } a_{rel} = \frac{v_{rel}^2}{R} = \frac{1}{R} \left(2 + \frac{m}{M}\right)^2 \frac{MgR}{2M+m} = \left(2 + \frac{m}{M}\right) g.$$

そして，鉛直方向の運動方程式  $N - mg = ma_{rel}$  が成り立つから，

$$N = mg + ma_{rel} = \left(3 + \frac{m}{M}\right) mg = \left(1 + \frac{m}{3M}\right) 3mg.$$

## Part B

1

シャボン玉の半径を  $r$ , 体積を  $V$ , 内部の圧力を  $P$ , 温度を  $T$ , 物質量を  $N$  とおく.

$$V = \frac{4\pi}{3}r^3, \quad P = \frac{4\sigma}{r}, \quad \text{ゆえに } T = \frac{PV}{RN} = \frac{1}{RN} \frac{16\pi\sigma}{3} r^2.$$

今回求めるモル比熱を  $c$  とする.

シャボン玉に入れられた熱は, 気体の内部エネルギーと表面張力エネルギーになるので,

$$cNdT = d\left(\frac{5}{2}RNT\right) + d(\sigma 8\pi r^2)$$

ここで  $\sigma 8\pi r^2 = \frac{3}{2}RNT$  だから,

$$cNdT = \frac{5}{2}RNdT + \frac{3}{2}RNdT = 4RNdT. \quad \text{ゆえに } c = 4R = 33.2(\text{J/mol} \cdot \text{K}).$$

2

気体の熱容量がシャボン液の熱容量より十分小さいので, シャボン液が気体に対し熱浴のように働き, 気体は等温であると見なせる.

図のように, 小さな仰角  $\alpha$  で覗かれる部分に限定して考えよう. 振動していない時, この部分の面積は  $S = \pi(\alpha r)^2$  で求まり, その質量は  $m = \rho Sh$  で求まる.

$x$  を, シャボン玉の半径の変位としよう. また, 現在の圧力, 面積をそれぞれ  $P', S'$  とおく.

運動方程式を立てると,  $m\ddot{x} = P'S' - F_{\text{surf}}$ .

ここで  $F_{\text{surf}}$  は表面張力による縮ませる向きの力.

まず  $S' = \pi((r+x)\alpha)^2 = S(1 + 2\frac{x}{r})$  であり,

気体が定温なため  $P'V' = PV$  であることから  $P' = P \frac{1}{(1+\frac{x}{r})^3} \approx \frac{4\sigma}{r} (1 - 3\frac{x}{r})$  と求まり,

$F_{\text{surf}}$  は領域境界にかかる表面張力の射影の和で表され,  $F_{\text{surf}} = F_{\text{ST}}\alpha = 2(\sigma 2\pi(r+x)\alpha)\alpha$ .

以上をまとめ,  $\rho Sh\ddot{x} = \frac{4\sigma}{r} S(1 - \frac{x}{r}) - 4\pi\sigma(r+x)\alpha^2$ .

両辺を  $S = \pi(\alpha r)^2$  で割り,  $\rho h\ddot{x} = \frac{4\sigma}{r} (1 - \frac{x}{r}) - 4\sigma \frac{1}{r} (1 + \frac{x}{r}) = -\frac{8\sigma}{r^2} x$ .

したがって,  $\omega = \sqrt{\frac{8\sigma}{\rho hr^2}} = 108(\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})$ .

## Part C

### 解 1:直接的な解法

コイルに流れる電流が最大の  $I_0$  となった瞬間, コイルの起電力は 0 になり, ゆえに 2 つのコンデンサにかかる電圧は同じ大きさの逆向きになる. それを  $V$  とおく.

電荷保存則より  $q_0 = 2CV + CV$ , よって  $V = \frac{q_0}{3C}$ .

またこの時, エネルギー保存則より  $\frac{q_0^2}{2 \cdot 2C} = \frac{LI_0^2}{2} + \frac{2LI_0^2}{2} + \frac{CV^2}{2} + \frac{2CV^2}{2}$ .

これらを解くと,  $I_0 = \frac{q_0}{3\sqrt{2LC}}$ .

ここで, S を閉じる前の回路も, 閉じた後の各部分回路も固有角振動数は  $\frac{1}{\sqrt{2LC}}$  であることから, これを  $\omega$  とおいておく.

S を閉じる. この瞬間を  $t = 0$  とする. 上半分の電流を下向き  $I_1$ , 下半分の電流を下向き  $I_2$  とおく.

実際に式を立てると确实だが, 上半分の回路も下半分の回路もそれぞれ通常の LC 回路の式に従うことが確認できる.

振動数は明らかにいずれも  $\omega$ , 振幅はそれぞれ  $J_1, J_2$  とおく.

振幅を求めよう. エネルギー保存則より

$$\begin{aligned}\frac{2CU^2}{2} + \frac{LI_0^2}{2} &= \frac{LJ_1^2}{2}, \\ \frac{CU^2}{2} + \frac{2LI_0^2}{2} &= \frac{2LJ_2^2}{2}.\end{aligned}$$

したがって  $J_1 = \sqrt{5}I_0, J_2 = \sqrt{2}I_0$ .

$I_1$  と  $I_2$  はいずれも角振動数が  $\omega$  であることから,

$$I_1(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

$$I_2(t) = D \cos(\omega t) + F \sin(\omega t)$$

とおける.

ここに条件

$$I_1(0) = A = I_0$$

$$\max I_1 = \sqrt{A^2 + B^2} = J_1$$

$$I_2(0) = D = I_0$$

$$\max I_2 = \sqrt{D^2 + F^2} = J_2$$

が成り立つのがわかって,

$$A = I_0, B = 2I_0, D = I_0, F = -I_0. \text{ (符号は定性的に判断した)}$$

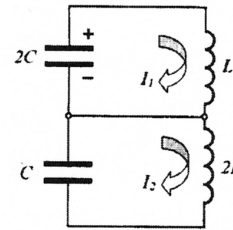
したがって

$$I_1 = \frac{2}{3}q_0\omega \sin(\omega t) + \frac{1}{3}q_0\omega \cos(\omega t),$$

$$I_2 = -\frac{1}{3}q_0\omega \sin(\omega t) + \frac{1}{3}q_0\omega \cos(\omega t).$$

以上より, S を流れる電流は  $I_S(t) = I_1(t) - I_2(t) = 3I_0 \sin(\omega t)$ .

$$\text{よって } I_{\max} = 3I_0 = \frac{q_0}{\sqrt{2LC}}.$$



## 解 2:ベクトル図を使った解法

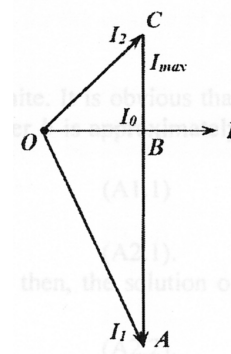
右図のようなものが使える。

$A$  は  $O$  から距離  $\sqrt{5}$  のところを角速度  $\omega$  で回転しており、ベクトル  $OA$  の  $I$  軸への射影が  $I_1$ 、

$C$  は  $O$  から距離  $\sqrt{2}$  のところを角速度  $\omega$  で回転しており、ベクトル  $OC$  の  $I$  軸への射影が  $I_2$ 、

したがってベクトル  $AC$  の  $I$  軸への射影が  $I_S$

と考えるのである。



$t = 0$  の時点では、各点は図の通り。(上にあるか下にあるかは定性的に判断できる。)

すべての点はただ角速度  $\omega$  で回転するだけなので、 $I_S$  の最大値は  $3I_0$  だと容易にわかる。

## 解 3:ヒューリスティックな解法

$I_S(0) = 0$  を根拠に  $I_S = I_{\max} \sin(\omega t)$  と決めつけてしまう。

$\dot{I}_S(0) = \dot{I}_1(0) - \dot{I}_2(0) = \frac{q_2(0)}{2LC} - \frac{q_1(0)}{2LC} = \frac{q_0}{2LC}$  だから、( $q_2, q_1$  はそれぞれ  $2C, C$  にある電荷)

$I_{\max}\omega = q_0\omega^2$ . ゆえに  $I_{\max} = q_0\omega = \frac{q_0}{\sqrt{2LC}}$ .

## Problem2. Van der Waals 状態方程式

### 解答

#### PartA. 実在気体の状態方程式

**A1.** もし  $V \rightarrow b+0$  とすると, 気体の圧力は  $P \rightarrow \infty$  となる. これは明らかに分子がとてもきつく詰まったときの瞬間である. それゆえ, パラメータ  $b$  は近似的にすべての分子の体積と等しい, すなわち,

$$b = N_A d^3 \quad (\text{A1.1})$$

注) ここでは, あくまで近似的な見積りなので, 球の最適充填問題など考える必要は無い

**A2.**  $P_c, T_c$  のときの Van der Waals 状態方程式は次のように書かれる.

$$P_c V^3 - (RT_c + bP_c)V^2 + aV - ab = 0 \quad (\text{A2.1})$$

このとき, 直線 AB が消える (つまり, 方程式 (A2.1) の解  $V$  が 3 つの異なる実数解を持たなくなった瞬間である) ので, (A2.1) の解は三重根でなくてはならない. すなわち, 状態方程式は次のように書かれる.

$$P_c(V - V_c)^3 = 0 \quad (\text{A2.2})$$

(A2.1) と (A2.2) を係数比較することで, 次の方程式が得られる

$$\begin{cases} 3P_c V_c = RT_c + bP_c \\ 3P_c V_c^2 = a \\ P_c V_c^3 = ab \end{cases} \quad (\text{A2.3})$$

(A2.3) を解いて,

$$a = \frac{27R^2 T_c^2}{64P_c} \quad (\text{A2.4})$$

$$b = \frac{RT_c}{8P_c} \quad (\text{A2.5})$$

別解 臨界状態のパラメータは, 等温線上での変曲点である. (また明らかにそのときの等温線の傾きは 0 である.) 一階微分と二階微分が 0 となるので, つぎのように書かれる.

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = 0 \quad (\text{A2.6})$$

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_T = 0 \quad (\text{A2.7})$$

(これに状態方程式を付け加えることで,) 次の連立方程式が得られる.

$$\begin{cases} -\frac{RT_c}{(V_c - b)^2} + \frac{2a}{V_c^3} = 0 \\ \frac{2RT_c}{(V_c - b)^3} - \frac{6a}{V_c^4} = 0 \\ \left(P_c + \frac{a}{V_c^2}\right)(V_c - b) = RT_c \end{cases} \quad (\text{A2.8})$$

これから, (A2.4) と (A2.5) と同じ解が得られる.

**A3.** 水について数値計算すれば, (A2.4), (A2.5) より,

$$a = 0.56 \text{ m}^6 \text{ Pa/mol}^2 \quad (\text{A3.1})$$

$$b = 3.1 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{mol} \quad (\text{A3.2})$$

となる。

**A4.** (A1.1) と (A3.2) から, 次がわかる。

$$d_w = \sqrt[3]{\frac{b}{N_A}} = 3.7 \cdot 10^{-10} \text{ m} \approx 4 \cdot 10^{-10} \text{ m} \quad (\text{A4.1})$$

### Part B. 気体と液体の性質

**B1.** 不等式  $V_G \gg b$  を使って, Van der Waals 状態方程式はこのように書かれる。

$$\left(p_0 + \frac{a}{V_G^2}\right) V_G = RT \quad (\text{B1.1})$$

これは次の解をもつ。

$$V_G = \frac{RT}{2p_0} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4ap_0}{R^2T^2}}\right) \quad (\text{B1.2})$$

ここで, 負のほうの根は, Van der Waals の式による等温線での傾きが正な不安定な状態の体積を与える。  $a = 0$  とすると理想気体の体積の表現が得られるべきであるので, 気体の体積は, 正のほうの根である。 すなわち,

$$V_G = \frac{RT}{2p_0} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4ap_0}{R^2T^2}}\right) \quad (\text{B1.3})$$

与えられたパラメーターを用いて,  $\frac{ap_0}{(RT)^2} = 5.8 \cdot 10^{-3}$  が得られる。 よって,  $\frac{ap_0}{(RT)^2} \ll 1$  が言えて, (B1.3) は次の形をとる。

$$V_G \approx \frac{RT}{p_0} \left(1 - \frac{ap_0}{R^2T^2}\right) = \frac{RT}{p_0} - \frac{a}{RT} \quad (\text{B1.4})$$

**B2.** 理想気体では,

$$V_{G0} = \frac{RT}{p_0} \quad (\text{B2.1})$$

よって,

$$\left(\frac{\Delta V_G}{V_{G0}}\right) = \frac{V_{G0} - V_G}{V_{G0}} = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4ap_0}{R^2T^2}}\right) \approx \frac{ap_0}{R^2T^2} = 0.58\% \quad (\text{B2.2})$$

**B3.** 熱力学系の力学的安定の条件はつぎのように与えられる。

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T < 0 \quad (\text{B3.1})$$

気体状態として存在できる最小の体積は, 次のときの値と一致する。

$$V_{Gmin} \rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = 0 \quad (\text{B3.2})$$

Van der Waals 状態方程式を使うと, (B3.2) は次のように書かれる。

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -\frac{RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3} = 0 \quad (\text{B3.3})$$

(B3.2) と (B3.3) から,  $V_{Gmin} \gg b$  を使って,

$$V_{Gmin} = \frac{2a}{RT} \quad (\text{B3.4})$$

が分かる。 よって,

$$\frac{V_G}{V_{Gmin}} = \frac{R^2T^2}{2ap_0} = 86 \quad (\text{B3.5})$$

**B4.** 不等式  $P \ll a/V^2$  をつかって, Van der Waals 状態方程式は次のように書かれる.

$$\frac{a}{V_L^2}(V_L - b) = RT \quad (\text{B4.1})$$

この答えは,

$$V_L = \frac{a}{2RT} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4bRT}{a}} \right) \quad (\text{B4.2})$$

この場合,(B4.1) より  $T \rightarrow 0$  のとき液体の体積は  $V_L = b$  とならなければならないから, 負のほうの根をとるべきである.

$$V_L = \frac{a}{2RT} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4bRT}{a}} \right) \approx b \left( 1 + \frac{bRT}{a} \right) \quad (\text{B4.3})$$

注) 最後の近似は後の問題のためなので不等式  $\frac{bRT}{a} \ll 1$  を使って,  $T$  が残るように ( $T$  の項は B6 で必要) ルートの部分の近似を二次までした.

**B5.**(B4.3) は 1mol の水の体積を与えるので, 密度は簡単に分かる.

$$\rho_L = \frac{\mu}{V_L} = \frac{\mu}{b(1 + \frac{bRT}{a})} \approx \frac{\mu}{b} = 5.8 \cdot 10^2 \text{kg/m}^3 \quad (\text{B5.1})$$

**B6.**(B4.3) にしたがって, 体積膨張率は,

$$\alpha = \frac{1}{V_L} \frac{\Delta V_L}{\Delta T} = \frac{bR}{a + bRT} \approx \frac{bR}{a} \approx 4.6 \cdot 10^{-4} \text{K}^{-1} \quad (\text{B6.1})$$

である.

**B7.** 蒸発熱は, 分子間力による圧力  $a/V^2$  に逆らって液体が気体に転移する際になされる仕事である. それゆえ,

$$E = L\mu \approx \int_{V_L}^{V_G} \frac{a}{V^2} dV = a \left( \frac{1}{V_L} - \frac{1}{V_G} \right) \quad (\text{B7.1})$$

$V_G \ll V_L$  を使って,(B7.1) から,

$$L = \frac{a}{\mu V_L} = \frac{a}{\mu b \left( 1 + \frac{bRT}{a} \right)} \approx \frac{a}{\mu b} = 1.0 \cdot 10^6 \text{J/kg} \quad (\text{B7.2})$$

注) ここでは圧力による仕事より内部エネルギー (分子間力による寄与) のほうが十分大きいと考えている. ちなみに, 熱力学の関係式を使って,  $\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p = \frac{a}{V^2}$  であることが分かるので, そこから蒸発熱は内部エネルギーの項のみを評価することになれば解答と同じ結果が得られる.

**B8.** 厚さ  $d$  の一層の水分子膜をつくるとき, 表面張力の仕事は,

$$A = 2\sigma S \quad (\text{B8.1})$$

この水分子膜をつくるためのエネルギーは水蒸気が凝結する際に放出される潜熱 (その値は蒸発熱に等しい) によって供給される.

$$Q = Lm \quad (\text{B8.2})$$

ここで質量は次の式で与えられる.

$$m = \rho Sd \quad (\text{B8.3})$$

(A4.1a),(B5.1),(B7.2) を使って, 次の結果が得られる.

$$\sigma = \frac{a}{2b^2} d_w = 0.12 \cdot 10^{-2} \text{N/m} \quad (\text{B8.4})$$

## PartC. 液体と気体の系

**C1.** 液体とその蒸気が飽和した図3の状態を考える．平衡のとき，すべての深さにおいて気体の圧力と液体の圧力は等しい．深さ  $h$  の流体中の圧力は，水面上の飽和水蒸気圧と次の式で関係付けられる．

$$p = p_0 + \rho_L gh \quad (\text{C1.1})$$

表面張力による寄与は Laplace の公式によって与えられる．

$$\Delta p_L = \frac{2\sigma}{r} \quad (\text{C1.2})$$

深さ  $h$  の流体中の圧力は，液体の曲面上の蒸気圧と，その曲率半径に依存して，

$$p = p_h + \frac{2\sigma}{r} \quad (\text{C1.3})$$

となる．さらに，違う高さでの蒸気圧は次の式で求まる．

$$p_h = p_0 + \rho_S gh \quad (\text{C1.4})$$

(C1.1)~(C1.4) を解いて，次の式が分かる．

$$h = \frac{2\sigma}{(\rho_L - \rho_S)gr} \quad (\text{C1.5})$$

よって，求める圧力の差は，

$$\Delta p_T = p_h - p_0 = \rho_S gh = \frac{2\sigma}{r} \frac{\rho_S}{\rho_L - \rho_S} \approx \frac{2\sigma}{r} \frac{\rho_S}{\rho_L} \quad (\text{C1.6})$$

となる．曲面上の飽和蒸気圧のほうが通常の平らな面の圧力より大きいことに注意すること．

**C2.**  $P_e$  を温度  $T_e$  のときの飽和水蒸気圧， $P_e - \Delta P_e$  を温度  $T_e - \Delta T_e$  のときの飽和水蒸気圧とする．文中の式 (3) から，周囲の温度が  $\Delta T_e$  だけ下がったときの飽和水蒸気圧の変化量は，( $\Delta P_e$  を微小と考えて微分を行って，)

$$\Delta P_e = P_e \frac{a}{bRT_e^2} \Delta T_e \quad (\text{C2.1})$$

となる．**C1** で得られた Thomson の公式にしたがって，水滴表面の飽和水蒸気圧は  $\Delta p_T$  だけ増える．水滴が小さいとき，周囲の水蒸気圧は飽和水蒸気圧より小さく，蒸発が進んで水滴はさらに小さくなる．水滴が大きいとき，周囲の水蒸気圧は飽和し，水蒸気が液化し水滴はさらに大きくなる．

温度低下後，水滴が成長するための半径の最小値を求めるために，温度低下後の水滴表面の飽和水蒸気圧が，周囲の水蒸気圧に等しいとおいて，

$$P_e - \Delta P_e + \Delta p_T = P_e \quad (\text{C2.2})$$

蒸気はほとんど理想気体であるとみなすと，密度は

$$\rho_S = \frac{\mu P_e}{RT_e} \ll \rho_L \quad (\text{C2.3})$$

であることが分かる．式 (C2.1)-(C2.3),(B5.1),(C1.6) から，

$$\frac{2\sigma}{r} \frac{\mu P_e}{RT_e} \left(\frac{\mu}{b}\right) = P_e \frac{a \Delta T_e}{bRT_e^2} \quad (\text{C2.4})$$

よって，次の式が得られる．

$$r = \frac{2\sigma b^2 T_e}{a \Delta T_e} = 1.5 \cdot 10^{-8} \text{m} \quad (\text{C2.5})$$



### Problem 3 ガス放電の最も単純なモデル

#### Part A 自己持続的でないガス放電

##### A1.

まず、電子の数密度の時間変化を記述する方程式を導く。これは、2つの過程によって決定される。1つ目は、外部からイオン化を行う装置によって電子とイオンのペアを生成する過程である。2つ目は、電子とイオンが再結合する過程である。1つ目のイオン化の過程では電子とイオンが1つずつ対で生成され、2つ目の再結合の過程では電子とイオンは1つずつ対で消滅する。したがって、電子とイオンの数密度は常に等しい。つまり、任意の時刻  $t$  において次式が成立する。

$$n(t) = n_e(t) = n_i(t) \quad (1.1.1)$$

これより、電子とイオンの数密度の時間変化を記述する方程式が次のようになることが導かれる。

$$\frac{dn(t)}{dt} = Z_{ext} - rn(t)^2 \quad (1.1.2)$$

$t \rightarrow 0$  のとき、関数  $\tanh bt \rightarrow 0$  であることは明かなので、初期条件  $n(0) = 0$  を考慮すると、

$$n_0 = 0 \quad (1.1.3)$$

式 (A1.1) に  $n_e(t) = a \tanh bt$  を代入し、独立な関数の項に分けて係数比較すれば、

$$a = \sqrt{\frac{Z_{ext}}{r}} \quad (1.1.4)$$

$$b = \sqrt{rZ_{ext}} \quad (1.1.5)$$

を得る。

##### A2.

(1.1.4) によると、定常状態における電子の数密度は外部のイオン化装置の働きに依存し、以下のように表される。

$$n_{e1} = \sqrt{\frac{Z_{ext1}}{r}} \quad (1.2.1)$$

$$n_{e2} = \sqrt{\frac{Z_{ext2}}{r}} \quad (1.2.2)$$

$$n_e = \sqrt{\frac{Z_{ext1} + Z_{ext2}}{r}} \quad (1.2.3)$$

したがって、次のようなピタゴラスの定理に対応する等式が得られる。

$$n_e = \sqrt{n_{e1}^2 + n_{e2}^2} = 20.0 \times 10^{10} \text{ cm}^3 \quad (1.2.4)$$

### A3.

定常状態において、筒内部の電子の平衡とイオンの平衡を記述する方程式は次のようになる。

$$Z_{ext}SL = rn_en_iSL + \frac{I_e}{e} \quad (1.3.1)$$

$$Z_{ext}SL = rn_en_iSL + \frac{I_i}{e} \quad (1.3.2)$$

(1.3.1) と (1.3.2) の方程式から、イオンによる電流と電子による電流は等しいことが導かれる。つまり、

$$I_e = I_i \quad (1.3.3)$$

ここで、筒の各断面における全電流は、電子による電流とイオンによる電流を合わせたものであるから、

$$I = I_e + I_i \quad (1.3.4)$$

電流密度の定義より、以下の関係式が成り立つ。

$$I_e = \frac{I}{2} = en_e vS = e\beta n_e ES \quad (1.3.5)$$

$$I_i = \frac{I}{2} = en_i vS = e\beta n_i ES \quad (1.3.6)$$

(1.3.5) と (1.3.6) を (1.3.2) に代入すると、全電流についての以下の2次方程式得られる。

$$Z_{ext}SL = rSL \left( \frac{I}{2e\beta ES} \right)^2 + \frac{I}{2e} \quad (1.3.7)$$

気体中の電場の大きさ  $E$  は、

$$E = \frac{U}{L} \quad (1.3.8)$$

であるので、2次方程式 (1.3.7) の解は下のようになる。

$$I = \frac{e\beta^2 U^2 S}{rL^3} \left( -1 \pm \sqrt{1 + \frac{4rZ_{ext}L^4}{\beta^2 U^2}} \right) \quad (1.3.9)$$

正の平方根の解のみが意味をもつことは明かなので、

$$I = \frac{e\beta^2 U^2 S}{rL^3} \left( \sqrt{1 + \frac{4rZ_{ext}L^4}{\beta^2 U^2}} - 1 \right) \quad (1.3.10)$$

#### A4.

印加電圧が十分に小さいとき，(1.3.10) は近似を用いて次のように簡略化できる。

$$I = 2Ue\beta\sqrt{\frac{Z_{ext}S}{rL}} \quad (1.4.1)$$

これは正にオームの法則であり，よく知られた関係式

$$R = \frac{U}{I} \quad (1.4.2)$$

と

$$R = \rho\frac{L}{S} \quad (1.4.3)$$

を合わせて使うことで，次式を得る。

$$\rho = \frac{1}{2e\beta}\sqrt{\frac{r}{Z_{ext}}} \quad (1.4.4)$$

## Part B 自己持続的なガス放電

#### B1.

位置  $x$  と  $x + dx$  の間にある気体について考える。電子による電流によって微小時間  $dt$  の間に変化する，この部分の電子の数は次のように与えられる。

$$dN_e^I = \frac{I_e(x + dx) - I_e(x)}{e} dt = \frac{1}{e} \frac{dI_e(x)}{dx} dx dt \quad (2.1.1)$$

この変化は外部のイオン化装置の影響と電子雪崩の影響によって生じる。外部のイオン化装置は，体積  $Sdx$  の部分に次の式で与えられる数の電子を生成する。

$$dN_e^{ext} = Z_{ext}Sdxdt \quad (2.1.2)$$

また，電子雪崩によって生じる電子の数は次の式で与えられる。

$$dN_e^a = \alpha N_e dl = reSdxvdt = \alpha \frac{I_e(x)}{e} dx dt \quad (2.1.3)$$

電子の数の平衡を記述する方程式は次のように書かれる。

$$dN_e^I = dN_e^{ext} + dN_e^a \quad (2.1.4)$$

これより，電子による電流についての，下記のような微分方程式が最終的に導かれる。

$$\frac{dI_e(x)}{dx} = eZ_{ext}S + \alpha I_e(x) \quad (2.1.5)$$

ここに， $I_e(x) = C_1 e^{A_1 x} + A_2$  を代入して，

$$A_1 = \alpha \quad (2.1.6)$$

$$A_2 = -\frac{eZ_{ext}S}{\alpha} \quad (2.1.7)$$

を得る。

## B2.

イオンは電子の流れと反対向きに流れるということを考慮すると、イオンの数の平衡を記述する方程式は次のように導かれる。

$$dN_i^I = dN_i^{ext} + dN_i^a \quad (2.2.1)$$

ここで、

$$dN_i^I = \frac{I_i(x) - I_i(x + dx)}{e} = -\frac{I}{e} \frac{dI_i(x)}{dx} dx dt \quad (2.2.2)$$

$$dN_i^{ext} = Z_{ext} S dx dt \quad (2.2.3)$$

$$dN_i^a = \alpha \frac{I_e(x)}{e} dx dx dt \quad (2.2.4)$$

したがって、イオンによる電流についての微分方程式は次のようになる。

$$-\frac{dI_i(x)}{dx} = eZ_{ext}S + \alpha I_e(x) \quad (2.2.5)$$

ここに、イオンによる電流の式  $I_i(x) = C_2 + B_1 e^{B_2 x}$  と、上で得られた電子による電流の式を代入して、

$$B_1 = -C_2 \quad (2.2.6)$$

$$B_2 = \alpha \quad (2.2.7)$$

を得る。

## B3.

イオンは、位置  $x = L$  にある導体板の位置から動き始めるので、次の境界条件が成り立つ。

$$I_i(0) = 0 \quad (2.3.1)$$

## B4.

2次電子放出係数の定義より、以下の境界条件が成り立つはずである。

$$I_e(0) = \gamma I_i(0) \quad (2.4.1)$$

## B5.

筒の各断面における全電流は，電子による電流とイオンによる電流を合わせたものなので，

$$I = I_e + I_i = C_2 - \frac{eZ_{ext}S}{\alpha} \quad (2.5.1)$$

(2.3.1) と (2.4.1) の境界条件を考えて，

$$C_2 - C_1 e^{\alpha L} = 0 \quad (2.5.2)$$

かつ

$$C_1 - \frac{eZ_{ext}S}{\alpha} = \gamma(C_2 - C_1) \quad (2.5.3)$$

(2.5.2) と (2.5.3) を連立して解くと，

$$C_2 = \frac{eZ_{ext}S}{\alpha} \frac{1}{e^{-\alpha L}(1 + \gamma) - \gamma} \quad (2.5.4)$$

を得る。よって，全電流は，

$$I = \frac{eZ_{ext}S}{\alpha} \left( \frac{1}{e^{-\alpha L}(1 + \gamma) - \gamma} - 1 \right) \quad (2.5.5)$$

## B6.

筒の長さが大きくなると，(2.5.1) における分母は小さくなる。このとき，分母が 0 になると，気体中の全電流が自己持続的になり，外部のイオン化装置のスイッチを切ることができる。したがって，

$$L_{cr} = \frac{1}{\alpha} \ln \left( 1 + \frac{1}{\gamma} \right) \quad (2.6.1)$$