

次元解析は、問題を解くとき、解答を確認するときに、とても有力な方法です。身につけておくと便利です。まずは、次の例題を解いてみましょう。

例題 振り子の周期 T が長さ l と重力加速度 g との関数として

$$T = A \times l^x g^y \quad (A \text{ は定数})$$

と与えられるとき x と y の値を求めなさい。

解 与えられた式での両辺の次元は相等しい。すなわち、左辺の次元は時間の次元 $[T]$ なので、右辺の次元も $[T]$ でなければならない。長さの次元を $[L]$ とすれば、

$$l^x = [L^x], \quad g = [L^y T^{-2y}]$$

であるから、

$$[T] = [L^x L^y T^{-2y}] = [L^{x+y} T^{-2y}]$$

となる。この式が成り立つためには、

$$x + y = 0, \quad -2y = 1$$

でなければならない。これより、

$$x = 1/2, \quad y = -1/2$$

が得られ、

$$T = A \sqrt{\frac{l}{g}}$$

となる（次元解析では、無次元の比例定数を求めることはできません）。

例題 万有引力定数 G を長さ $[L]$ 、質量 $[M]$ 、時間 $[T]$ の次元で表しなさい。また、 G の単位を長さ、質量、時間の SI 単位で表しなさい。

解 万有引力の法則

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

より、 G の次元 $[G]$ は、

$$[G] = [F \times L^2 M^{-2}]$$

で表される。力の次元 $[F]$ は、運動方程式より、

$$[F] = [MLT^{-2}]$$

であるから、

$$\begin{aligned} [G] &= [MLT^{-2} \times L^2 M^{-2}] \\ &= [M^{-1} L^3 T^{-2}] \\ &= [L^3 M^{-1} T^{-2}] \end{aligned}$$

となる。これより、 G の単位は、

$$\text{m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$$

となる。

次の問題は、物理チャレンジ 2010 第 1 チャレンジ理論コンテストで出題された問題 (第 2 問 B) です。

国際的に共通して使われている単位系では、長さをメートル (m)、質量をキログラム (kg)、時間を秒 (s)、電流をアンペア (A) として、他の単位はこれらの掛け算で表される。例えば、速さは 1 秒間に進む距離 (m/s) なので、

$$[\text{速さ}] = m^1 \cdot \text{kg}^0 \cdot s^{-1} \cdot A^0$$

と表される。電荷の単位クーロン (C) は $1\text{C} = 1\text{A} \times 1\text{s}$ で定義されるので、

$$[\text{電荷}] = m^0 \cdot \text{kg}^0 \cdot s^1 \cdot A^1$$

と表される。

問 1 バネ定数を同様に書き表した場合、次の a ~ d に入る数字として正しい組み合わせを下の①~⑥の中から 1 つ選びなさい。

$$[\text{バネ定数}] = m^a \cdot \text{kg}^b \cdot s^c \cdot A^d$$

	a	b	c	d
①	1	1	-1	0
②	0	1	-2	0
③	-1	1	-1	0
④	0	1	-2	-2
⑤	2	1	-1	-1
⑥	0	-1	-2	-1

問 2 電圧の単位、ボルト (V) を同様に書き表した場合、次の a ~ d に入る数字として最も適当な組み合わせを下の①~⑥の中から 1 つ選びなさい。

$$[\text{電圧}] = m^a \cdot \text{kg}^b \cdot s^c \cdot A^d$$

	a	b	c	d
①	2	2	-3	1
②	3	2	-2	1
③	1	1	-2	2
④	2	2	-1	-2
⑤	2	1	-3	-1
⑥	2	-1	-3	-1