

物理チャレンジ2016

理論問題

2016年8月20日(土)

理論問題にチャレンジ 8:40~13:40

理論問題にチャレンジする前に下記の<注意事項>をよく読んでください。

問題は、大問4題からなります。問題は、一見難問にみえても、よく読むとわかるようになっています。どの問題から取り組んでも結構です。最後まであきらめずにチャレンジしてください。

<注意事項>

1. 開始の合図があるまで問題冊子を開けないこと。また解答用紙にも手を触れないこと。
2. 問題冊子は24ページである。解答冊子は17枚である。
3. すべての解答は、解答用紙に記入すること。解答用紙の各ページに、必ずチャレンジ番号と氏名を記入すること。
4. 解答は、最終的な答のみではなく、解答に至る道筋も詳しく記述すること。
5. 気分が悪くなったときやトイレに行きたくなったとき、または質問がある場合は旗をあげて監督者に知らせること。
6. チャレンジ開始から200分(3時間20分)経過するまでは、原則として、途中退出はできない。200分経過(12:00)後は、退出希望者は旗をあげて監督者に知らせ、すべての解答用紙(無解答の用紙も含む)は、チャレンジ番号・氏名の記入を確認の上、机の上に置いて退室すること。
7. 他の参加者の迷惑にならないように静粛に解答をすすめること。迷惑行為があった場合は退出させる。
8. 終了の合図があったら、ただちにすべての解答用紙(無解答の用紙も含む)は、チャレンジ番号・氏名の記入を確認の上、机の上に置いて、監督者の指示を待つこと。
9. 問題冊子ならびに計算用紙は、持ち帰ること。

第1問 A (30点)

傘を持たないで横断歩道を渡るとき，できるだけ濡れないためには走った方がよいか，歩いた方がよいか考えよう。

図1のように人は距離 D の横断歩道を A から B まで速さ v で渡るとする (z 軸は鉛直軸)。風が前方または後方から水平に風速 w で吹いている場合を考える ($w > 0$ は真正面からの向かい風， $w < 0$ は真後ろからの追い風である)。雨粒の一定の落下速度を u ，単位体積あたりの雨粒の数 (数密度) を n とする。なお雨粒の運動は人によって乱されないものとする。

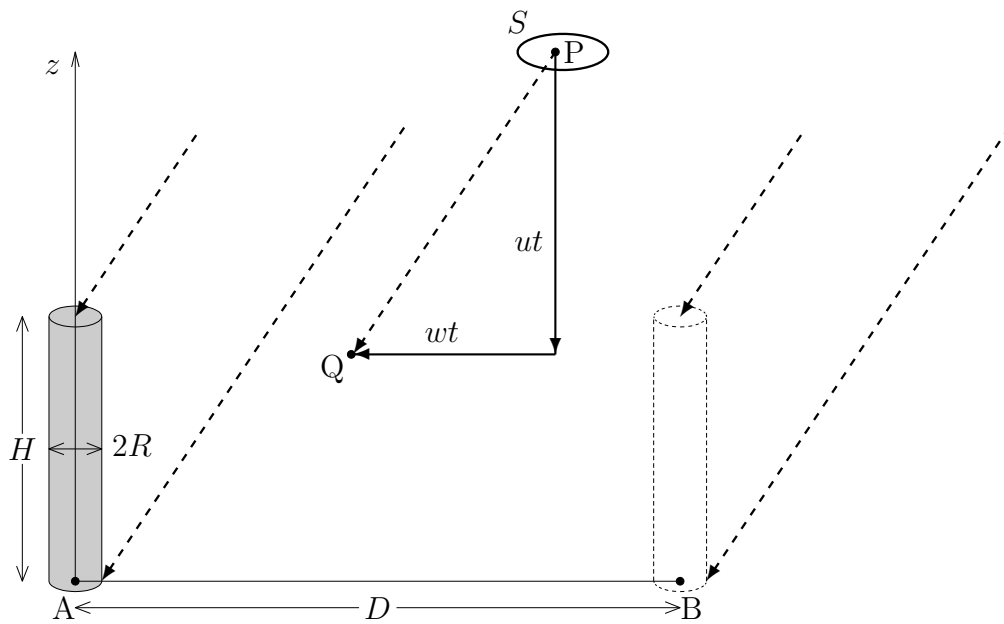


図 1

- 問1 (a) 図のように，雨粒の一つが，水平な静止した面積 S の仮想的な面上の点 P を通過し，鉛直方向に一定の速さ u で落ち，風に流されて水平方向に速さ w で進み，時間 t の後に点 Q に達したとする。この間に面積 S の水平面を通過した雨粒の数は $nSut$ であることを説明せよ。ただし S は， $nSut$ が 1 に比べて十分に大きな面積であるとする。
- (b) 面積 S の面が風向に垂直な静止した鉛直面である場合には，時間 t の間にこの鉛直面を通過する雨粒の数は $nS|w|t$ であることを説明せよ。
- 問2 以下，人を背丈に等しい高さ H で，半径 R の円柱で近似する。横断歩道を渡る間に，円柱の側面にあたる雨粒の数を求めよ。
[ヒント] 人が速度 v で移動するとき，人と風の相対速度は $v + w$ である。
- 問3 風がない ($w = 0$) とき，向かい風 ($w > 0$) のとき，追い風 ($w < 0$) のときに，体 (円柱) の側面が最も濡れないように横断歩道を渡るには，どのような速さで移動すればよいか。

- 問4 頭部(円柱の上面)にあたる雨粒も考慮して、横断歩道を渡る間に、体全体(円柱全体)にかかる雨粒の総数を求めよ。
- 問5 体全体にかかる雨粒の数を $2nHRD$ で割ったものを y 、移動の速さと雨粒の落下速度の比 $\frac{u}{v}$ を x とする。 $\frac{R}{H} = 0.1$ として、向かい風の $\frac{w}{u} = 0.4$ の場合と追い風の $\frac{w}{u} = -0.4$ の場合について y を縦軸、 x を横軸にとってグラフを描け。
- 問6 体全体が最も濡れないで横断歩道を渡るには、どのような速さで移動すればよいか。風がないときまたは向かい風するとき ($w \geq 0$) と追い風するとき ($w < 0$) とで分けて答えよ。

第1問B (40点)

[I] 剛体の運動は、剛体の重心の運動（並進運動と呼ぶ）と、剛体に固定された回転軸のまわりの回転運動の組み合わせで表すことができる。この、剛体の回転運動の運動方程式について、簡単な例で考えよう。

まず、平面上で、質量 m の点状の物体 P が固定点 O から一定の距離 r を保って回転の速さが変化する円運動をしているときの、物体 P の運動方程式を考える。物体 P には向心力の他に、円軌道の接線方向に大きさ F の力が働いているとする。円運動の角速度を ω とすると、円運動の速度 v は $v = r\omega$ と表される。加速度 \vec{a} は速度 \vec{v} を用いて $\frac{d\vec{v}}{dt}$ と書けるので、軌道の接線方向の加速度の大きさは、 $a = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt}$ と書ける。 $\frac{d\omega}{dt}$ は角速度の時間変化の割合を表しており、角加速度と呼ばれる。これより、物体 P の接線方向の運動方程式は、

$$mr \frac{d\omega}{dt} = F \quad (1)$$

と書ける。ここで、この式の両辺に r をかけると、

$$mr^2 \frac{d\omega}{dt} = rF \quad (2)$$

となる。(2) 式の右辺 rF は、回転軸 O のまわりの力のモーメントと呼ばれ、それを以下では N と表す。 N の符号は、角速度を増加させる場合は正、減少させる場合は負である。この式の力のモーメント N 、角加速度 $\frac{d\omega}{dt}$ と左辺の mr^2 の関係は、並進運動の場合の力 F 、加速度 a と質量 m の関係に対応しているので、 mr^2 は、並進運動における質量 m と同様に、回転運動における慣性を表している。回転運動における慣性とは、「角速度の変わりにくさ」を表しており、慣性モーメントと呼ばれる。慣性モーメント $I = mr^2$ と力のモーメント $N = rF$ によって、物体 P の回転の運動方程式は、

$$I \frac{d\omega}{dt} = N \quad (3)$$

と表すことができる。

次に、剛体を n 個の質量をもった点のあつまりと考え、それぞれの点の質量を m_i 、回転軸 O からの距離を r_i ($i = 1, 2, \dots, n$) とおく。剛体全体の回転の運動方程式は、 n 個のすべての点の回転の運動方程式の和をとれば求められる。角速度 ω はすべての点について等しいので、剛体に外部から働く力の、点 O のまわりのモーメントの総和を N とするとき、剛体の回転の運動方程式は、

$$\sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \frac{d\omega}{dt} = N \quad (4)$$

となる。剛体には、外部から働く力(外力)以外に、剛体を構成する点どうしの間にも力(内力)が働いているが、剛体内部で働く内力は、全体の和をとる際に作用反作用の法則によって打ち消しあうので、(4) 式の N には影響を与えない。(4) 式より、剛体の慣性モーメント I は

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \quad (5)$$

と表すことができる。

この、(4)、(5) 式を用いて、次のような運動について考えよう。

[II] 新体操のフープ（輪の形の手具）の競技でよく見られる、水平な床の上をすべらせたフープが、いったん止まった後、再び選手の方へ戻ってくるという運動について考えよう（図1参照）。ただしフープは鉛直面内で運動するものとする。

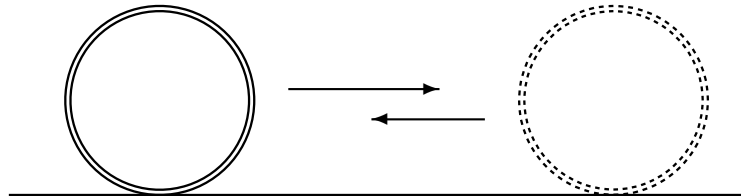


図1

一様な細いフープの質量を M 、半径を R とし、フープと床の間の動摩擦係数を μ とする。時刻 0 に、このフープを反時計回りに回転させながら右向きにすべり出させるとする。床をすべっている間はフープには動摩擦力が働いているので、床に対するフープの接地点の速さはだんだん小さくなり、やがては 0 になって、フープはすべらずに転がるようになる。フープがすべらずに転がる際の摩擦力（転がり摩擦力）の影響は小さいので、これ以降、フープはほぼ一定の速さで転がりながら進む。

最初、フープの重心の速度は v_0 、回転の角速度は ω_0 であったとし、時刻 t での回転の角速度を ω 、重心の速度を v と表す（図2参照）。ただし、角速度は反時計回りを正とし、重心の速度は右向きを正とする。なお、必要であれば重力加速度の大きさを g と表せ。

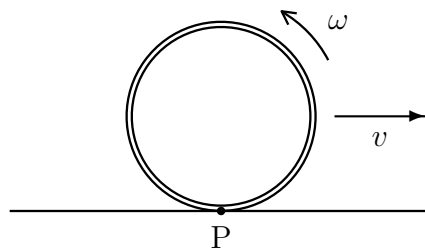


図2

- 問1 フープの重心の加速度が $\frac{dv}{dt}$ と表せることを用いて、床をすべっているときの、フープの重心の運動方程式を書け。
- 問2 フープを n 個の微小部分に分割すると、この微小部分はすべてフープの回転軸から距離 R の所にあるので、微小部分1個の、中心軸のまわりの慣性モーメントは、 $\frac{M}{n}R^2$ と表せる。これを n 個の微小部分について和をとることで、フープ全体の中心軸のまわりの慣性モーメント I を求めよ。また、床をすべっているときの、フープの回転の運動方程式を書け。
- 問3 問1の重心の運動方程式より、加速度 $\frac{dv}{dt}$ が求められることから、時刻 t での速度 v を表す式を求めよ。また、同様にして、問2の回転の運動方程式より、時刻 t での角速度 ω を表す式を求めよ。ただし、時刻 t はフープがすべらずに転がるようになる以前の時刻とする。

問4 フープがすべっているとき，フープの接地点 P の床に対する速度 u (右向きを正とする) を ω, v を用いて表せ。

新体操の演技のように，フープが重心運動の向きを変えて戻ってくるためには，回転の角速度が 0 になる前に，フープの重心の速度が 0 になる必要がある。

問5 床をすべりながら進んでいる途中に，フープの重心の速度 v が 0 になったとする。このときの時刻 t_1 と，そこまでに重心の進む距離 l を求めよ。

問6 フープがすべらずに転がるようになる時刻 t_2 と，時刻 t_2 での重心の速度 v_2 を求めよ。また，右に進んだフープが左向きに動き出すためには，最初の角速度 ω_0 と重心の速度 v_0 の間にどのような関係が成り立てばよいか。

問7 動摩擦係数 $\mu = \frac{1}{4.9}$ ，重力加速度 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ のとき，半径 $R = 0.40 \text{ m}$ ，質量 $M = 0.30 \text{ kg}$ のフープを回転させながら右向きにすべらせたところ，1.0 s 後まで右向きに進み，その後，左向きに進んだ。フープがすべらずに転がるようになったのは最初から 1.5 s 後であった。このとき，最初のフープの角速度 ω_0 と重心の速度 v_0 の値をそれぞれ求めよ。

第2問 (80点)

雪の結晶は6回対称の様々な美しい形態(図1, 2)を見せ, 人々を魅了する。また, 図3の立方体は身近な食塩の結晶である。

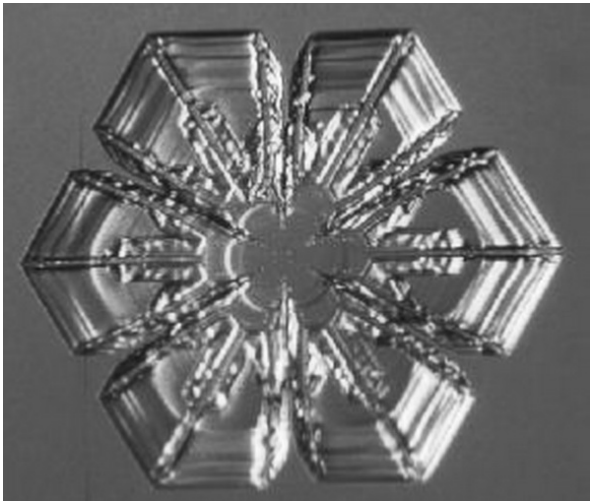


図1. 雪の結晶^{*1}

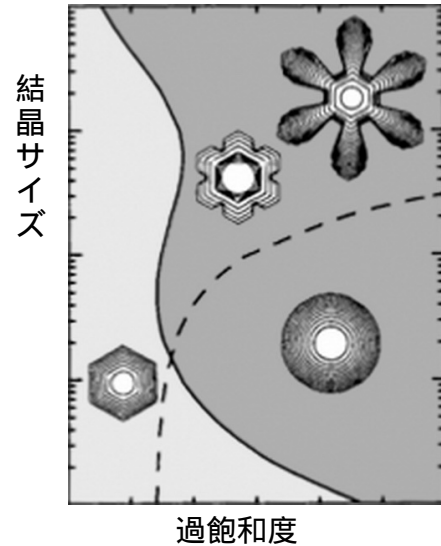


図2. 雪の結晶の相図^{*2}

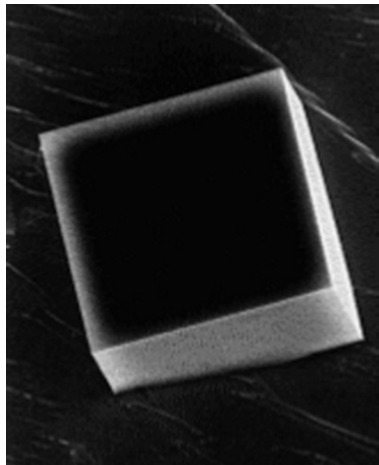


図3. NaCl 結晶^{*3}

それにとどまらず, 結晶の成長過程や形は物理学者をも夢中にさせる。結晶は原子, 分子レベルの相互作用が目に見える状態に反映されたもので物理的に非常に興味深い。ここでは, 結晶の大きさ, 形に関して簡単なモデルを用いて考えてみる。

^{*1}北海道大学低温研究所相転移ダイナミクス分野の HP より

^{*2}E. Yokoyama and T. Kuroda, Phys. Rev. A41 (1990) 2038

^{*3}J. C. Heyraud and J. J. Metois, J. Cryst. Growth 84 (1987) 503

分子 (原子) レベルで平らな面 (ファセット面) の結晶成長は平らな 2 次元面上に, 成長の種となる安定した核が形成されることから始まる (図 4 参照)。

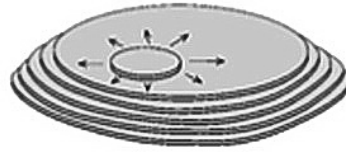


図 4. ファセット面の 2 次元核による成長

核が形成されると図 5 のように核の端に新たな分子が結合することにより, 下のファセット面を覆うように成長していく。

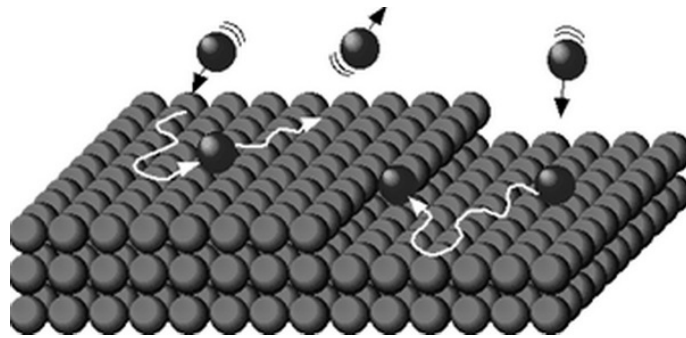


図 5. ファセット面の成長の分子過程

大きなファセット面上で成長している 2 次元の核を考え, 話を簡単にするために, 下地となるファセット面の影響を無視し, 完全な 2 次元系として扱うことにする。

[I] 容器に密封した 1 個の結晶について考えよう。ただし, 問題を簡単にするために, 分子 (原子) は結晶か気体かどちらかの状態のみをとるものとする。この場合, 真空の容器に結晶を入れたとすると, 結晶は気化し, その蒸気圧が飽和蒸気圧に達したとき, 結晶のサイズが変化しない平衡状態になる。ここでは, 平衡状態にある結晶の大きさについて考える。

二酸化炭素 (CO_2) の固体 (ドライアイス) を常温で空气中に放置するとすべて昇華してしまう。しかし, 容器の中に密封すると, 一部は昇華して気相の二酸化炭素 (炭酸ガス) が容器内に充満するが, 温度が十分低い場合には残りは固相のまま残り, 温度を一定に保つと, それ以上変化しない平衡状態 (熱平衡状態) に達する。熱平衡状態で固相と気相がどのように共存するかは温度によって決まる。この問題では, 簡単なモデルを使って固体と気体の中の分子のエネルギーと分子配置の乱雑さを定量化しながら, 容器の中に閉じ込められた分子の結晶と蒸気の物理的性質について考える。

注意: 炭酸飲料用の PET ボトルの耐圧性はおよそ 6 気圧程度と推定されているが, PET ボトルにドライアイスを密封したことによる破裂事故が少なくない。絶対にしないこと。

さて, N 個の単一物質の分子を容器に閉じ込めるとすると, これらの分子は結晶と蒸気に分かれる。結晶中の分子を結晶分子, 蒸気中の分子を気体分子と呼ぶ。結晶分子の数を N_c と表すと気体分子の数は $N - N_c$ である。ここで N, N_c は 1 に比べて十分に大きい ($N \gg 1, N_c \gg 1$ と表す)。

計算を簡単にするために、図6のように、容器の中を多数の小さな立方体に分割し、それぞれの立方体をセルと呼ぶ。セルのサイズは非常に小さく分子の大きさの程度なので、セルの総数 V はアボガドロ数くらいの大きな数である。また、それぞれのセルにはたかだか1個の分子しか入れないものとする。

結晶は互いに隣り合った N_c 個のセルからなり、これらのセルには1個ずつの分子が入っている。結晶のサイズは容器に比べて十分小さく、容器の中央付近に静止しているとする。

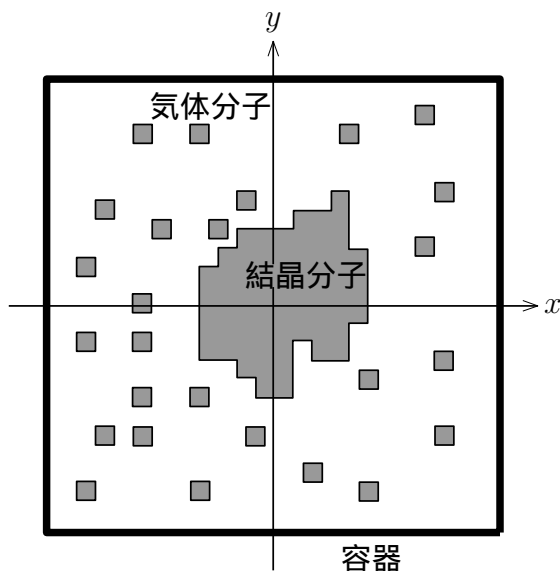


図6.

結晶を除く残りの空間は $V - N_c$ 個のセルからなり、これらのセルには $N - N_c$ 個の気体分子が散らばっている。 V は N に比べてはるかに大きい ($V \gg N$) と考えてよいので、これらのセルの大部分は空である。

実際の物質中では分子は動き回っているが、このモデルでは、分子は1つのセルの中で静止しているとする。したがって、気体分子も結晶分子も運動エネルギーは持たないものとする。また、気体分子は位置エネルギーも持たないが、結晶分子は周りの分子と結合して1個あたり $-\mu$ ($\mu > 0$) の位置エネルギーを持つとする。

このモデルに関する以下の問いに答えよ。

問1 このモデルによると、この分子の集合の内部エネルギー U は

$$U = -\mu N_c \quad (1)$$

と書けることを説明せよ。

結晶のサイズは昇華や凝結によって変化できる。にもかかわらず N_c が一定値を保つのが相平衡状態である。容積と温度が一定の密封された容器中で蒸気と相平衡状態にある結晶の分子数 N_c は、絶対温度を T として、次の式で定義される $F(N_c)$ を最小にするように決まる。

$$F(N_c) = U(N_c) - TS(N_c) \quad (2)$$

ここに出てきた内部エネルギー U の関数形は問1で与えたものである。 $S(N_c)$ はエントロピーと呼ばれるもので、今の場合、「容器の中に分子数 N_c の結晶がある」という巨視的条件を満たして、 N 個の分子を容器内のセルに配分する仕方の数 $W(N_c)$ により、

$$S(N_c) = k_B \log W(N_c) \quad (3)$$

で定義される。ここで、 k_B はボルツマン定数である。また、 $\log x$ は自然対数を表す。

そこで、多数のセルに分子を配分する仕方の数を考える。結晶中では N_c 個の分子を N_c 個のセルに配分する仕方は1通りだから、気体分子を残りのセルに配分する仕方を考えればよい。

問2 上記のようにエントロピーを考えて

$$S(N_c) = k_B \log \frac{(V - N_c)!}{(V - N)! (N - N_c)!} \quad (4)$$

を導け。

大きな整数 N があるとき、次の近似式を使うことができる(この式はスターリングの公式と呼ばれる)。

$$\log N! \approx N \log N - N$$

これを(4)式の右辺に使うと、エントロピーについて次の式が導ける。

$$S(N_c) = k_B [(V - N_c) \log(V - N_c) - (N - N_c) \log(N - N_c) - (V - N) \log(V - N)] \quad (5)$$

$F(N_c)$ が最小になるところで熱平衡状態が実現される。

問3 温度 T のもとで熱平衡状態を考えるために

$$\frac{dF(N_c)}{dN_c} = k_B T \left(-\frac{\mu}{k_B T} + f(N_c) \right)$$

と書くとき、 $\frac{N_c}{N}$ を横軸にとり、 $f(N_c)$ の概形を描け。

問4 結晶の分子数 N_c を変数として $F(N_c)$ が極値を持つ条件は

$$\frac{dF(N_c)}{dN_c} = 0$$

である。問3のグラフから、この条件を満たす N_c の値 N_c^* はどのように与えられるか説明せよ。また、グラフを用いて $N_c = N_c^*$ である点が $F(N_c)$ の最小値を与えることを説明せよ。

問5 $\frac{\mu}{k_B T}$ の関数として結晶の分子数 N_c^* のグラフ ($\frac{N_c^*}{N}$ を横軸、 $\frac{\mu}{k_B T}$ を縦軸とせよ) の概形を描きなさい。また、 $\frac{\mu}{k_B T}$ が変化したとき、結晶の分子数 N_c^* はどのように変化するか説明せよ。

問6 すべての分子が昇華して $N_c^* = 0$ となる温度 T_0 を求め、 $k_B T_0$ が1分子あたりの昇華熱(蒸発熱) μ に比べてかなり小さいことを確かめよ。

[II] 平衡状態にある結晶は決まった形を保つ。その形は表面張力により決定され、表面張力の異方性(方向依存性)に強く影響される。ここからは、結晶の表面張力の異方性と結晶の形について考える。ただし、温度は0Kとし、気体分子のエントロピーは考えない。また、2次元の結晶を考える。したがって結晶の表面は一般に曲線である。

結晶の形を考える前にこのモデルの表面張力について考える。表面張力は無限に長い直線に沿って分子間の結合を切るのに必要な単位長さあたりのエネルギーとして定義される。

問7 図7のように，正方格子の格子点に分子が並んだ2次元の結晶がある。隣りあう分子の間隔は a である。結晶分子は最隣接の格子点上の結晶分子のみと結合し，1つの結合でエネルギーが ε だけ下がるものとするとき，格子の軸に平行な方向 ($\theta = 0$ ，図7(a)) の表面張力と対角線方向 ($\theta = \frac{\pi}{4}$ ，図7(b)) の表面張力を求めよ。ただし，分子数は十分大きいとする。

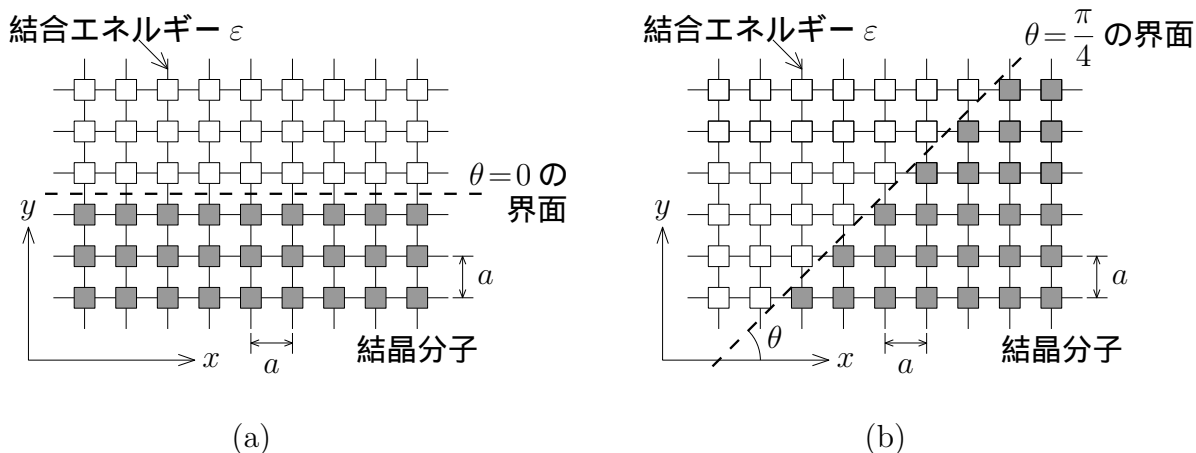


図7.

問8 $\tan \theta = \frac{M}{N}$ (M, N は自然数) の方向の界面の表面張力 γ が

$$\gamma(\theta) = \frac{\varepsilon}{a}(\cos \theta + \sin \theta) \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

となることを示せ。

$\gamma(\theta)$ は結晶格子の対称性を反映する。問7, 8の場合には，格子は x, y 軸，および直線 $y = x$ に関して対称であるから，一般の θ に対しては $\gamma(\theta) = \frac{\varepsilon}{a}(|\cos \theta| + |\sin \theta|)$ となる。

結晶の形は与えられた体積(今の場合面積)の下で，表面張力によるエネルギーを最小にするように決まる。また，そのようにして決まる結晶の形は $\gamma(\theta)$ を通して格子の対称性を反映する。例えば， γ が θ に依存しない場合の結晶の形は円になる。

問9 (a) 問7, 8の場合には，結晶の形は x, y 軸，および直線 $y = x$ に関して対称になる。したがって，結晶の形を考えると，図8のような頂角 $\frac{\pi}{4}$ の結晶の部分について考えればよい。

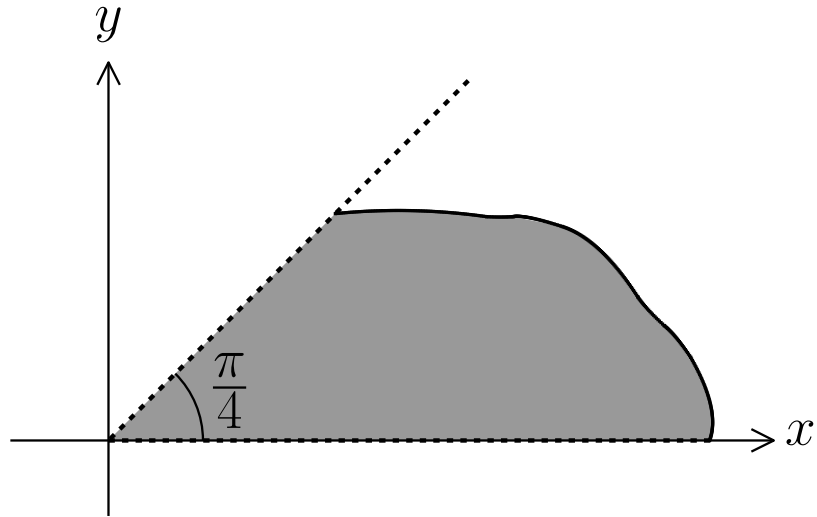


図 8.

特に，ここでは多角形結晶を考え，図 9 のようにこの部分の表面が線分であるとする。線分の長さを l ，線分と x 軸の角を θ ($0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$) として，図 9 の灰色部分の結晶の面積 S を求めよ。

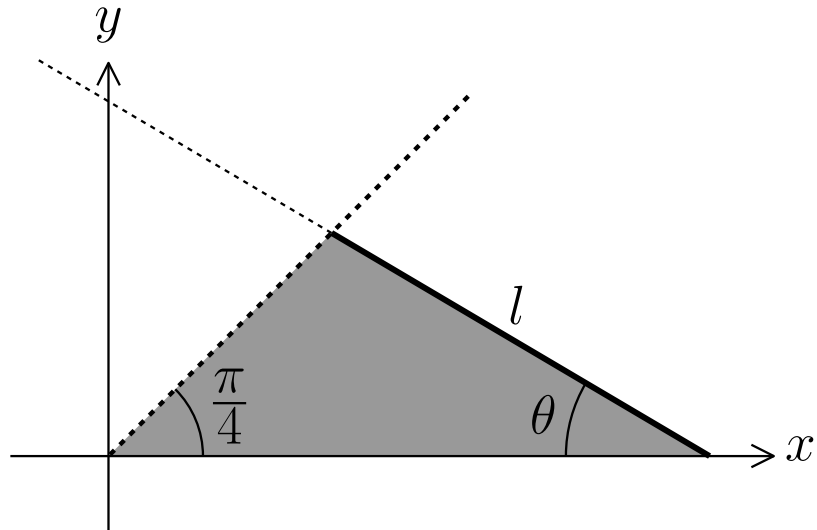


図 9.

- (b) 表面張力によるエネルギー E は $E = \gamma(\theta) l = \frac{\varepsilon l}{a} (\cos \theta + \sin \theta)$ である。 S 一定の条件下で， E が最小になるのは

$$\frac{\cos \theta + \sin \theta}{\sin \theta}$$

が最小になるときであることを説明せよ。

- (c) S を一定として， E を最小にする θ を求めよ。
 (d) 結晶全体はどのような形になるか。

問 9 では表面が線分と仮定したが，曲線と仮定しても (d) と同じ結果が得られる。

問 10 問 7 の結晶が，どのような形になるかという問いについて，問 9 では $\gamma(\theta)$ を用いて考えた。同じ問いについて別の考え方があればそれを説明せよ。

第3問 (80点)

原点に電気量が q の点電荷があるとき、位置 \vec{r} にある点 P にできる電場と、無限遠を基準とする電位は ϵ_0 を電気定数 (真空の誘電率) として、

$$\vec{E}(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad V(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (1)$$

と表される。

多数の電荷 $q_1, q_2, q_3, \dots, q_N$ があり、それぞれの電荷が点 P に作る電場を $\vec{E}_1(P), \vec{E}_2(P), \vec{E}_3(P), \dots, \vec{E}_N(P)$ とし、電位を $V_1(P), V_2(P), V_3(P), \dots, V_N(P)$ とするとき、点 P の電場と電位は

$$\vec{E}(P) = \sum_{k=1}^N \vec{E}_k(P), \quad V(P) = \sum_{k=1}^N V_k(P) \quad (2)$$

となる。これを重ね合わせの原理という。この原理は基本法則の (1) 式にも含まれている。実際 (1) 式によると、原点に電荷 $2q$ があるとき、位置 \vec{r} には電荷 q が作る電場 2 つを重ね合わせた電場ができる。

[I] 説明したい実験事実

2枚の導体板 (以下ではこれを極板と呼ぶ) からなるコンデンサーがある。極板の面積を A 、極板の向かい合った面の間隔を d とする。これを起電力が V_0 の電池に図 1(a) のようにつないだところ、電池から導体板に電気量が $\pm Q$ の電荷が流れ込み、流れ込んだ電荷は図 1(a) のように導体の向かい合った面の表面に分布した。

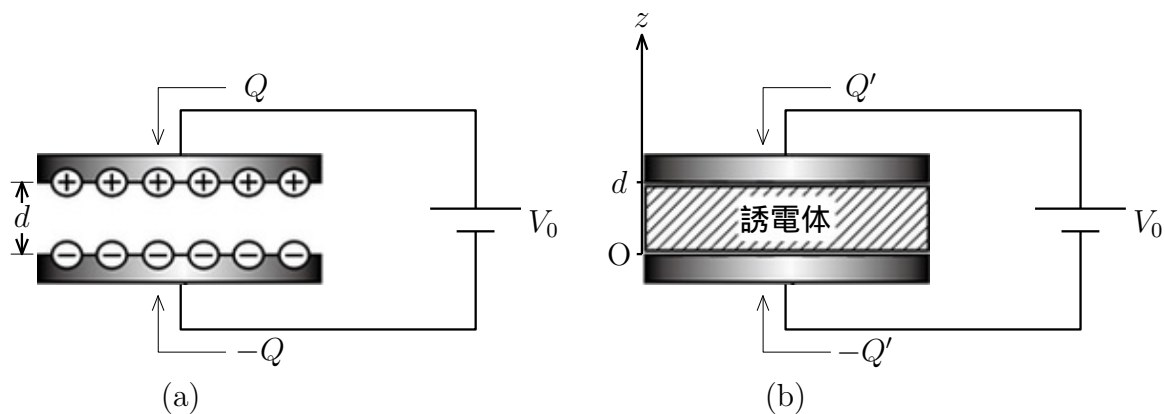


図 1.

このときの Q と V_0 の比

$$C = \frac{Q}{V_0} \quad (3)$$

をこのコンデンサーの電気容量と呼ぶ。 C は極板の面積 A に比例し、極板間の距離 d に反比例する。このときの比例係数は ϵ_0 である。なお、以下では常に $Q > 0$ である。

このコンデンサーの極板の間隙を図 1(b) のように誘電体 (不導体) で満たして同じ電池につないだときに電池から極板に流れ込む電気量を $\pm Q'$ とする。図 1(b) の z 座標については問 2

のすぐ前で説明する。一般に、 $Q' (> 0)$ は Q より大きい。図 1(a) と (b) で加えている極板間の電位差は同じだから、この実験事実は誘電体を挟むとコンデンサーの電気容量が増えるということの意味する。この問題では、その理由を考察する。

なお、以下では、図 1(a) の極板の間には一様な電場ができるとする。図 1(b) の誘電体の中にできる電場については、問 1 の後で説明する。

問 1 図 1(b) のコンデンサーの誘電体を変え、同じ極板に同じ電圧を加えながら Q' の測定を繰り返したところ、比

$$\bar{\epsilon} = \frac{Q'}{Q} \quad (4)$$

の値は誘電体の種類によって決まる定数であることが分かった。図 1(b) のコンデンサーの電気容量 C' を極板の面積 A 、極板間の距離 d 、および $\bar{\epsilon}$ を含む式で表せ。

ここに出てきた $\bar{\epsilon}$ はその誘電体の比誘電率と呼ばれる無次元の量である。また $\epsilon = \epsilon_0 \bar{\epsilon}$ は誘電体の誘電率と呼ばれ、単位は電気定数と同じ F/m である。

図 1(b) の誘電体中の電場は、極板上の電荷が作るものと誘電体中の分子の電荷が作るものとの重ね合わせである。前者は、図 1(a) と同様に一様な電場を作る。後者は誘電体分子の分布の微視的構造が原因で大変複雑であり、したがって、それらを合わせた誘電体中の電場は直接観察する手段もない。

そこで、外部から一様な電場が加えられた巨視的に一様な物質を使った実験結果を考察するときは、その物質中にも仮想的に一様な電場が作られると考える。このような仮想的な電場は、物質の微視的構造を無視したものなので巨視的電場と呼び、この問題では \vec{E} と表す。すると、下の極板上の一つの点を原点として上向きに z 軸を選んだとき、誘電体内部の電位は z のみの関数になる。

問 2 図 1(b) の誘電体の中にできる巨視的電場 \vec{E} はどちら向きか。その大きさは、 V_0 、 d 、 A 、 Q を使うとどのように表されるか (この 4 つの文字のすべてを使う必要はない)。また、 $z = \text{一定}$ の平面上の電位を $V(z)$ と表したとき、それと巨視的電場の z 成分 E_z の関係を記せ。ただしこの問 2 では、 $V(0) = 0$ とする。

[II] 1 個の誘電体分子が作る微視的電場

誘電体は多数の分子の集合である。それぞれの分子は $\pm q$ ($q > 0$) の正負の電荷からなり、外から電場が加わらなければそれらの電荷の分布は重なり、各分子は図 2(a) のように電氣的に中

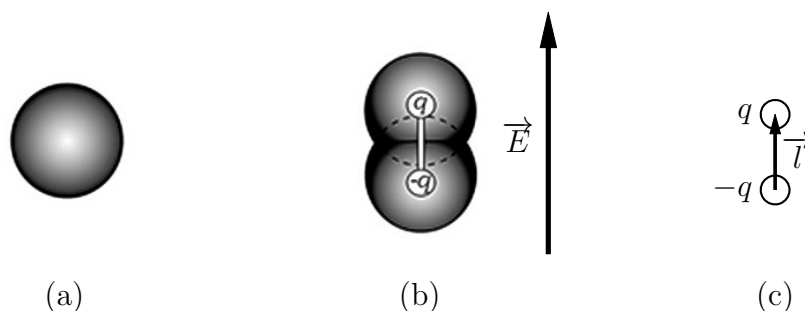


図 2.

性な球になっているとしてよい。その誘電体に図 1(b) のように電場が加わると正電荷と負電荷には互いに反対向きの力が働く。この力と正負の電荷の間の引力が釣り合う位置まで電荷は変位して安定な状態になる (図 2(b) 参照)。分子内で電荷がこのように正負に分れることを電気分極, あるいは単に分極と呼ぶ。

一般に, 正電荷と負電荷の一对の組み合わせは電気双極子と呼ばれる。負電荷の分布の中心から見た正電荷の分布の中心の相対的な位置ベクトル \vec{l} (図 2(c) 参照) を用いて,

$$\vec{p} = q \vec{l} \quad (5)$$

によって定義されるベクトル \vec{p} を電気双極子モーメントと呼び, これによって分子の分極の大きさと向きを表す。

誘電体内部には多数の電気双極子ができるが, まず, 1 個の電気双極子が作る電場について考える。

問 3 点 A $(0, 0, z = \frac{l}{2})$ にある電荷 $q (> 0)$ と点 B $(0, 0, z = -\frac{l}{2})$ にある電荷 $-q$ からなる電気双極子がある (図 3 参照)。原点 O からの距離が l に比べて十分大きい点 C (x, y, z) にこの双極子モーメントが作る電位 $V(C)$ を次にしたがって求めよ。

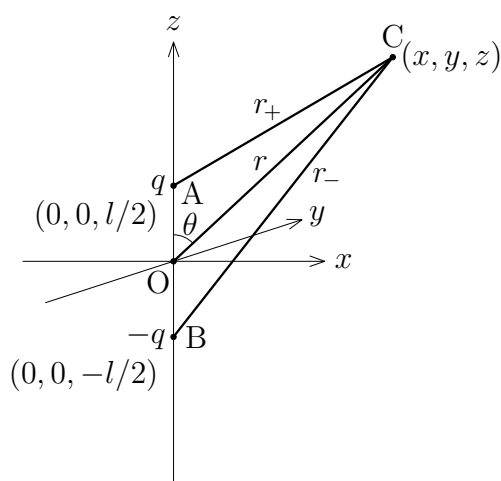


図 3.

- まず, A と C の間の距離を r_+ , B と C の間の距離を r_- として, 点 C の電位 $V(C)$ を r_+ と r_- を使って表せ。
- 原点から点 C までの距離を r , $\angle COA = \theta$ とする。 r は l より十分大きい ($r \gg l$) として $\frac{l^2}{r^2}$ を含む項を無視することによって,

$$V(C) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^2} \cos \theta \quad (6)$$

となることを示せ。ただし, $p = ql$ は, 図 3 の双極子モーメントの大きさである。なお, 必要があれば, 1 に比べて絶対値が十分小さな数 a があるとき, $\sqrt{1+a} \approx 1 + \frac{a}{2}$ と近似できることを使え。

(6) 式のように $V(C)$ が (r, θ) の関数であることを表すために, それを $V(r, \theta)$ と書くことにする。そのとき, 図 4 のように, 座標原点 O から C の方を向く電場の成分を E_r , それに垂

直な方向で θ が増える向きの成分を E_θ と表すと、これらの電場の成分は、次式を使って計算できる。

$$E_r(r, \theta) = - \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{V(r + \Delta r, \theta) - V(r, \theta)}{\Delta r} = - \left(\frac{dV(r, \theta)}{dr} \right)_\theta \quad (7a)$$

$$E_\theta(r, \theta) = - \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{V(r, \theta + \Delta \theta) - V(r, \theta)}{r \Delta \theta} = - \frac{1}{r} \left(\frac{dV(r, \theta)}{d\theta} \right)_r \quad (7b)$$

中辺の式からわかるように、(7a) の最右辺の意味は、関数 $V(r, \theta)$ の θ をあたかも定数であるかのようにみなして r のみについて微分するというものである。(7b) の計算をするときは $V(r, \theta)$ の r を定数とみなして θ について微分すればよい。

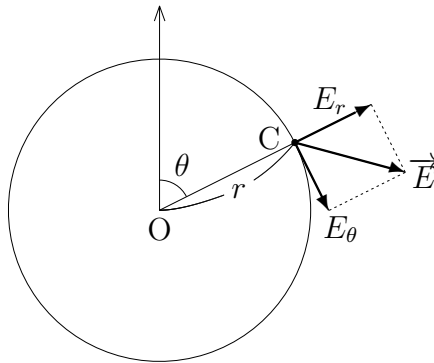


図 4.

- 問 4 (a) 図 4 の C 点における電場の 2 つの成分 $E_r(r, \theta)$ および $E_\theta(r, \theta)$ の表式を求めよ。
 (b) $\theta = 0, \pi$ の方向にある 1 つずつの点と、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ の方向にある 2 つの点が解答用紙に与えられている。これらの 4 つの点それぞれを通る電気力線の概略を描け。

[III] 1 つの電気双極子層が作る電場

次に誘電体中の分子が規則的に並ぶ双極子の層を考える。分極はこの層に垂直に起き (図 5 参照)、その向きに z 軸を選ぶ。この双極子モーメントの層を以下では双極子層と呼ぶ。双極子層の面内の任意の点 O を原点とする x 軸と y 軸を選び、一つの層の双極子モーメントの集合が z 軸上の点 A に作る電位を求めよう。

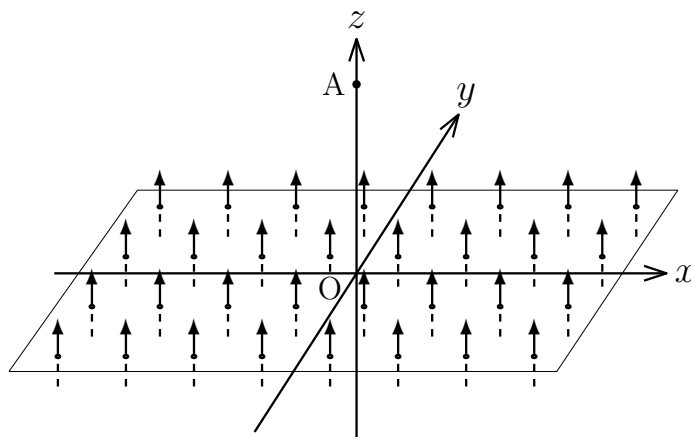


図 5.

点 A と双極子層の距離は隣り合う双極子の間隔に比べて十分大きいとする。そのような遠方から見ると、双極子は連続的に分布して見えるとしてよい。このとき、単位面積内の双極子モーメントの和を \vec{P}_S と表して以下の問に答えよ。

問5 点 A の座標を $(0, 0, z)$ とし、そこでの電位が

$$V(A) = \frac{P_S z}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{2\pi R dR}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \quad (8)$$

と表されることを説明せよ。ただし、 P_S はベクトル \vec{P}_S の大きさで、 R は $x-y$ 平面上の原点 O からの距離である。また、必要なら解答用紙中の図を補いながら説明に使ってよい。

問6 前問の積分は $t = R^2$ という置換をすると計算できる。その計算の結果、双極子層の両側の領域での電位は (x, y) によらず、

$$V(A) = V(z) = \begin{cases} \frac{P_S}{2\epsilon_0} & z > 0 \\ -\frac{P_S}{2\epsilon_0} & z < 0 \end{cases} \quad (9)$$

となることを導け。

(9) 式をグラフにすると図6の実線のようになる。このように、双極子層の両側の電位が z の不連続な関数になったのは、間を空けて分布している双極子モーメントを連続的に分布しているかのように扱ったからである。それが許されるのは上でも述べたように、 $|z|$ が双極子モーメントの間隔より十分大きいときである。双極子層の近くでは、間近にある双極子モーメントが作る電場の複雑な構造の影響が出る。一般に電位は場所の連続関数になるから、 $V(A)$ も z の連続関数になる。

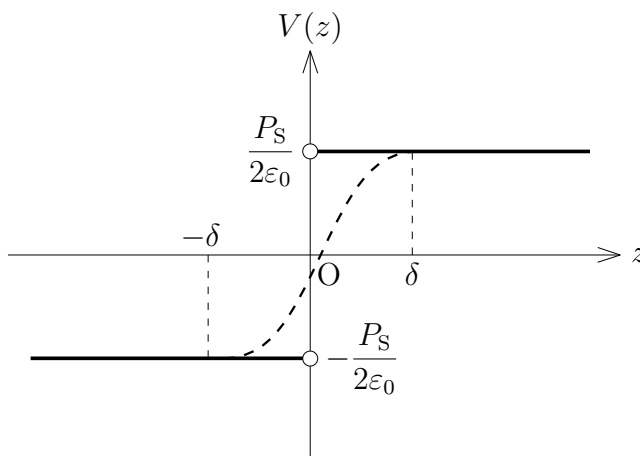


図6.

その一つの例を図6では破線で示したが、この部分は点 A の (x, y) 座標によって変わりうる。ただし、 $V(A)$ の z 依存性が実線から外れるのは双極子モーメントの間隔よりは十分大きい微視的な長さ δ を使って、 $-\delta < z < \delta$ の範囲であり、双極子層からの距離がそれより遠方の場所での電位は (9) 式で与えられる。

[IV] 積み重なった電気双極子層が作る電場

図 1(b) の誘電体は N 層の電気双極子層が z 方向に積み重なってできた板であったとする (図 7 参照)。隣り合う層の間隔を a とすると z 軸方向の結晶の厚さ d は Na であり, 双極子の中心は $z = \frac{a}{2}, \frac{3a}{2}, \frac{5a}{2}, \dots, (N - \frac{1}{2})a$ の面上に分布しているものとする。

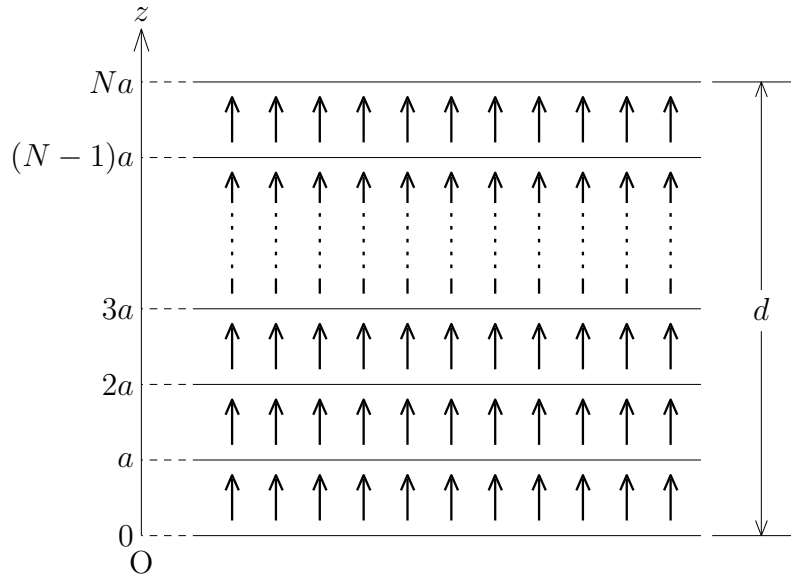


図 7.

- 問 7 (a) まず, 各双極子層はその上下に図 6 に実線で示したような電位分布を作るとしよう。そのとき, N 層の双極子層が $z = \text{一定}$ という面の上に作る電位を $V(z)$ とすると, $(n - \frac{1}{2})a < z < (n + \frac{1}{2})a$ (ただし, $n = 0, 1, 2, \dots, N$) の領域で $V(z)$ は一定である理由を説明し, そのときの $V(z)$ の式を導け。
- (b) また, n が 1 だけ増加するときの $V(z)$ の変化を求め, $z = 0$ と $z = d$ での電位差が $\frac{NP_S}{\epsilon_0}$ になることを導け。

したがって, 横軸に z , 縦軸に問 7 で求めた $V(z)$ をとってグラフを作ると, 段幅が a で段差が $\frac{P_S}{\epsilon_0}$ の階段状のグラフができる。

このような階段構造ができるのは 1 層の双極子の作る電位分布が図 6 の実線のような階段構造をしているとしたからで, 実際は図 6 の破線のように階段の角が取れるから, それらを重ね合わせてできる電位分布のグラフも角のないなめらかな坂道のような構造になる。また, 誘電体の外側の $z = \delta + d$ と $z = -\delta$ の付近で $V(z)$ のグラフの坂道は終わりその両側の電位は問 7 で求めたものになる。この電位分布を巨視的電位分布と呼び, これから計算される電場が図 1(b) の誘電体の分極が作る巨視的電場で, それを以下では \vec{E}_P と表すことにする。

- 問 8 δ は微視的な量だから, 巨視的な電位分布や電場を考えるとときには無視してよいことに注意して, この電位の坂道の平均の勾配を求め, 分極が作る巨視的電場 \vec{E}_P に関する

$$\vec{E}_P = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \quad (10)$$

という表式を導け。ただし, \vec{P} は結晶の単位体積あたりの双極子モーメント \vec{p} の総和である。

(10) 式で表される電場は，分極と反対向きになるという意味で反電場と呼ばれることがある。

[V] 誘電体内部の電場

ここまでは，上向きに分極してできた双極子モーメントの集合が作る電場について考えてきた。ここで図 1(b) の誘電体の内部にできる巨視的電場の性質を考える。

図 1(b) の誘電体中の巨視的電場 \vec{E} は，双極子が作る電場 \vec{E}_P と極板上の電荷が作る電場 \vec{E}_Q の 2 種類の電場を重ね合わせたもので，

$$\vec{E} = \vec{E}_Q + \vec{E}_P \quad (11)$$

が成り立つ。

この問題では，電場 \vec{E} とそれによって作られる誘電体分子の双極子モーメント \vec{p} との間に，

$$\vec{p} = \alpha \vec{E} \quad (12)$$

という関係があるとする。ここに出てきた α は正の値をもつ定数で，分子の分極率と呼ばれる。すると，単位体積中の誘電体分子の数を n と表すと，

$$\vec{P} = n\alpha \vec{E} = \chi_P \vec{E} \quad (13)$$

の関係が成り立つ。ここで， $\chi_P = n\alpha$ によって電気感受率と呼ばれる量を導入した (χ はギリシャ文字のカイ)。これを (10) 式の右辺に代入して \vec{P} を消去し，その結果を使って (11) 式の右辺を書き換え，整理すると

$$\vec{E}_Q = \vec{E} - \vec{E}_P = \left(1 + \frac{\chi_P}{\epsilon_0}\right) \vec{E} \quad (14)$$

を得る。

問 9 図 1(a) のような極板間が真空のコンデンサーを起電力が V_0 の電源で帯電させたのち電源を切り離し，極板の間に電気感受率が χ_P の誘電体を挿入した。このとき，両極間の電位差はいくらになっているか。

ここで，(14) 式の各辺に ϵ_0 をかけ，

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_Q \quad (15)$$

によって定義されるベクトル量を用いて (14) 式を書き直すと，

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = (\epsilon_0 + \chi_P) \vec{E} \quad (16)$$

を得る。 \vec{D} は電束密度と呼ばれる。

問 10 図 1(b) の場合 \vec{D} の大きさ D は上の極板の電荷密度 (単位面積当たりの電気量 $\frac{Q'}{A}$) に等しいことを示せ。

式 (16) に出てきた $\epsilon_0 + \chi_P$ は，問 1 の直後に出てきた誘電体の誘電率 ϵ である。分子の分極率は正であるから，電気感受率 χ_P も正である。したがって，誘電率 ϵ は必ず ϵ_0 より大きい。このことと (4) 式から，誘電体を挟むとコンデンサーの電気容量が増えることが導かれる。

[VI] 電束密度の観測

以上議論してきた誘電体内の電場 E と電束密度 D は比例関係にあった。しかし、チタン酸バリウムのような強誘電体と呼ばれる物質では、 D と E の関係は線形関係を示さず、しかも、 E を増加させるときと減少させるときとは異なる関係で変化する。このような複雑な D と E の関係をオシロスコープで観測するための測定法の原理図を図 8 に示す。

まず、測定対象である誘電体を厚さ d の板状に切り出して、面積が A の平行な 2 枚の金属板に密着させて挟み込む。これは外形は図 1(b) のコンデンサーと同じであるが、 D と E が比例しない。そこで、これは以下では単に試料と呼び、 C と記号をつけたコンデンサーとは区別する。コンデンサー C の電気容量は C とする。

この試料とコンデンサー C を直列につなげた回路を交流電源に接続する。すると、試料の金属板の間の電圧 $V_s(t)$ (s =sample) とコンデンサー C の両端の電圧 $V_c(t)$ (c =capacitor または condenser) は交流起電力と同じ振動数で振動し、同時に、回路の中を同じ振動数で電荷が移動する。

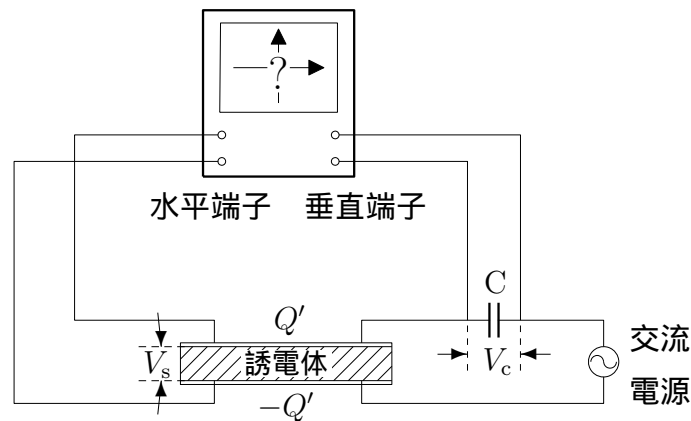


図 8.

問 11 V_c と誘電体内の電束密度 D の間に比例関係があることを説明し、 V_c と D の関係式を書け。

[ヒント] 試料の金属板上の電荷とコンデンサー C の電極の電荷との関係を考えよ。

問 12 オシロスコープの横軸と縦軸は、それぞれ、試料の誘電体中の D と E のどちらを表すか。

[参考]

不導体はみな誘電体の性質を備えている。誘電体に対する巨視的な分極 P に対して、図 5 や図 7 のような扱いはあくまで一つのモデルであり、その他に仮想的な分極電荷を導入したモデルなど、誘電体に対する考え方はいろいろある。

誘電体は物質固有の誘電率をもち、その値は様々で、外からの電場に応じた反応の仕方もその程度も多様である。ここでの議論となった無極性の分子の集合体が外部電場により分極するものは誘電率が小さく、水分子のように分子自身が分極している、しかし外部電場がないときには全体としては分極せず、外部電場がかかって分極するものは誘電率が大きい。また [VI] で言及した強誘電体のように外部電場がなくても物体が最初から分極している場合もある。さらに電場だけでなく圧力で分極が大きな変化をする圧電体と呼ばれるものや、温度で大きく変化するものなどがある。誘電体のこのような多様な性質はいろいろなところで応用されている。

第4問 (70点)

[I] 寿命

原子核には放射線を出して崩壊する不安定なものがあり、崩壊によって元の原子核の存在確率は減少する。存在確率が半分になるまでの時間を半減期と呼び $t_{1/2}$ と表す。この代わりに寿命 τ (タウ) を使うこともあり、これらの間には $t_{1/2} = \tau \log 2$ ($\log 2 = 0.6931$) の関係がある。時刻 $t = 0$ に 1 個存在した原子核は時間 t だけ経過すると、その存在確率は、

$$2^{-t/t_{1/2}} = e^{-t/\tau} \quad (1)$$

と指数関数的に減少する。

天然ウランは同位元素 ^{238}U ($t_{1/2} = 44.68$ 億年) を 99.28% と、原子炉の核燃料となる同位元素 ^{235}U ($t_{1/2} = 7.038$ 億年) を 0.72% 含んでいる。通常の水を使った原子炉 (軽水炉) では核分裂反応を継続するために ^{235}U の含有量を 3% に濃縮する必要がある。しかし過去には濃縮しなくても含有量が 3% 以上あった時期があった。そのため、ウラン鉱石とその周囲の水などの環境がよければ天然の原子炉が存在できた。実際、天然の原子炉のあった痕跡が 1972 年にアフリカのガボン共和国のオクロ鉱山で発見されている。

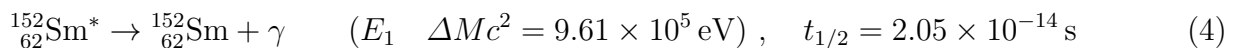
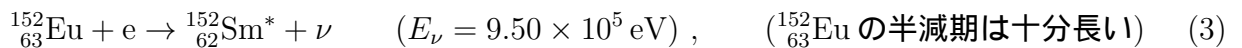
問1 天然の原子炉が発生したのは今からおよそ何年以上前と考えられるか。

量子力学には不確定性原理があり、時刻とエネルギーの両方を同時に厳密に決定できない。不安定な原子核がいつ崩壊するかという時刻の不確かさは原子核の寿命 τ である。一方、不安定な原子核の静止エネルギーは厳密には決まらず、その不確かさを、静止エネルギーの幅 Γ (ギリシャ文字ガンマの大文字) で表すと、寿命 τ との間には、プランク定数を h として、

$$\tau\Gamma = \frac{h}{2\pi}, \quad h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J s} \quad (2)$$

の関係がある。

ユーロピウム原子核 $^{152}_{63}\text{Eu}$ が原子内の電子を吸収して、エネルギーが $9.50 \times 10^5 \text{ eV}$ ($1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$) のニュートリノを放出して崩壊し、サマリウム原子核の励起状態 $^{152}_{62}\text{Sm}^*$ になる。(ニュートリノは電氣的に中性で、静止質量の小さい素粒子で、ギリシャ文字ニューの小文字 ν を用いて ν と表す。以後、 ν の質量はゼロと近似する。) その $^{152}_{62}\text{Sm}^*$ は直ちに半減期 $t_{1/2} = 2.05 \times 10^{-14} \text{ s}$ で $9.61 \times 10^5 \text{ eV}$ のガンマ線 (γ 線) を放出して安定なサマリウム原子核 $^{152}_{62}\text{Sm}$ になる。要約して表すと、



ただし、 ΔM は原子核の $^{152}_{62}\text{Sm}^*$ の静止質量 M_2 と $^{152}_{62}\text{Sm}$ の静止質量 M_1 の差で ($\Delta M = M_2 - M_1$)、 c は光速 ($c = 2.9979 \times 10^8 \text{ m/s}$) である。 γ 線のエネルギー E_γ はほぼ $^{152}_{62}\text{Sm}^*$ と $^{152}_{62}\text{Sm}$ の静止エネルギーの差 $\Delta M c^2$ に等しいが、原子核が動ける場合には、以下で述べるように $\Delta M c^2$ から少し異なる値をとる。

問2 静止している $^{152}_{62}\text{Sm}^*$ がもつエネルギーの不確定の幅 Γ を eV 単位で求めよ。

[II] 反跳

原子核は崩壊して ν や γ 線などの粒子を放出すると、運動量の保存則から崩壊後の原子核は反動により運動量をもつ。この現象を反跳と呼び、反跳した原子核のエネルギーを反跳エネルギーと呼ぶ。上記の過程 (3), (4) ではそれぞれに原子核の反跳が起きている。エネルギーの保存則から、反跳を考慮しない場合に比べ、放出される粒子のエネルギーは反跳エネルギーの分だけ小さくなる。

相対性理論では質量が m 、運動量が p の粒子のエネルギー E は、光速 c を用いて、

$$E = c\sqrt{(mc)^2 + p^2}$$

の関係にある。これから、質量 $m = 0$ としてよい粒子 (γ 線や ν) は、 $E = pc$ であり、質量 m が大きく速度が光速より十分小さい粒子 (ここで扱う原子核など) は、 $E = mc^2 + \frac{p^2}{2m}$ と近似できる ($|a|$ が 1 より十分小さい ($|a| \ll 1$) とし $\sqrt{1+a} \approx 1 + \frac{a}{2}$)。 mc^2 は静止エネルギーと呼ばれる。なお、質量数 A の原子核 (^{235}U は $A = 235$) の静止エネルギーはおよそ次の式で与えられる。

$$mc^2 = A \times 9.31 \times 10^8 \text{ eV} \tag{5}$$

問3 過程 (3) で $^{152}_{63}\text{Eu} + e$ の系の運動量はゼロであると仮定し、過程 (4) で放出される γ 線 (運動量 \vec{p}) の方向が、過程 (3) で放出されたニュートリノ (運動量 \vec{q}) の方向と、同方向の場合と反対方向の場合のそれぞれについて、 γ 線のエネルギー E_γ と ΔMc^2 との差 $E_\gamma - \Delta Mc^2$ を M_1, p, q を用いて表せ。次にそれらの値を計算せよ (図1 参照)。なお $M_1, M_2 \gg \Delta M$ であることに注意せよ。

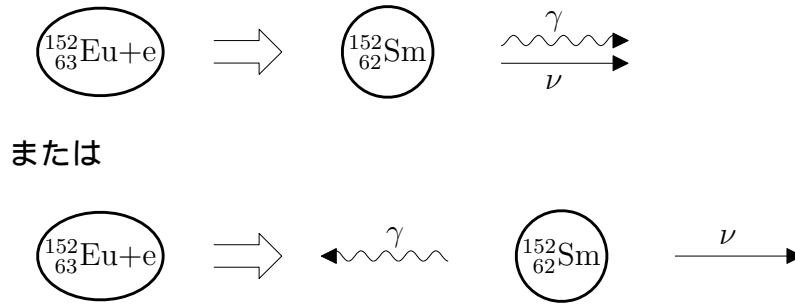


図 1. 静止した Eu 原子核と電子の系の崩壊の模式図：
最終的に γ 線と ν が同じ方向に出る場合 (上) と反対方向に出る場合 (下)
(矢印 \Rightarrow は、矢印の左の状態から右の状態への時間的変化を意味する)

[III] 共鳴

過程 (4) で放出された γ 線を静止した $^{152}_{62}\text{Sm}$ の標的に当てる。もし γ 線のエネルギーが



の反応を起こすのにちょうど適していると、図 2 のような散乱をする確率は非常に大きくなる。これは共鳴と呼ばれ、そのような大きな確率の散乱を共鳴散乱と呼ぶ。

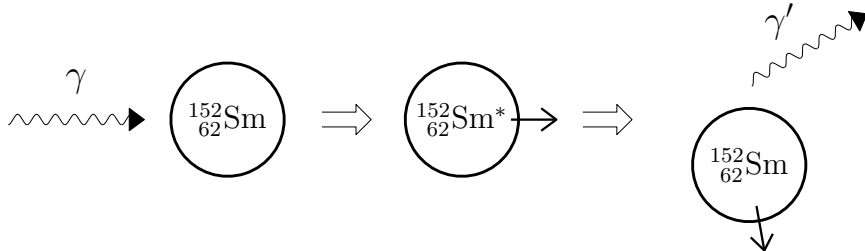


図 2. γ 線が式 (6) の途中経過を経て散乱され、運動量の変化した γ 線 (γ') となる共鳴散乱の模式図

励起状態の原子核 $^{152}_{62}\text{Sm}^*$ は問 2 で求めたように、崩壊寿命による不確定性のため質量の幅をもつ。そのため、上記の式 (6) が起こる条件には幅があり、質量差が ΔM から $\frac{\Gamma}{c^2}$ の数倍異なっている場合にも共鳴を起こし、大きな確率で散乱する。この問題の以下では、 ΔM から $\frac{\Gamma}{c^2}$ の 10 倍以内にある場合は共鳴の条件を満たすとみなすことにする。

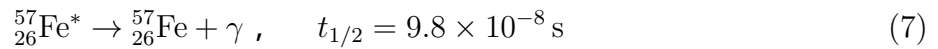
問 4 過程 (4) で放出された γ 線が過程 (6) の反応をし、共鳴の条件を満たすのは、放出された γ 線の方向がニュートリノの方向と同じ場合か逆の場合かを、根拠を示して答えよ。

以上を考慮すると、共鳴散乱したことが観測された場合 (大きな確率で方向を変えた場合) には、ニュートリノを直接観測しなくても (4) の γ 線の放出方向が、(3) のニュートリノの放出方向と同方向か反対方向かの選別をすることができる。ニュートリノは物質と反応しにくいので、観測が大変難しいが、このように、運動量やエネルギーなどの保存則から間接的に、ニュートリノの運動量やエネルギーなどの物理量が観測できる。

γ 線や ν は、右巻き (進行方向に対して右ねじの回転方向) か、または左巻きに、「自転している」(スピンをもっている、光の場合は円偏光をもつ) ことが知られている。アメリカ人 M. Goldhaber 達は、1958 年、上記の共鳴散乱を利用した選別によってニュートリノの放出方向を決定し、かつ、その際の γ 線が進行方向に左巻きのみであったことから、 ν は常に左巻きである、という興味ある性質を発見することができた。

[IV] メスバウアー効果

コバルトの同位元素 $^{57}_{27}\text{Co}$ の原子核は原子内の電子を吸収することにより、半減期 $t_{1/2} = 272$ 日で鉄に崩壊して励起状態の原子核 $^{57}_{26}\text{Fe}^*$ となり、それが半減期 $t_{1/2} = 9.8 \times 10^{-8} \text{ s}$ で γ 線を出して安定な $^{57}_{26}\text{Fe}$ になる。式で表すと



この励起状態 $^{57}_{26}\text{Fe}^*$ が放出する γ 線のエネルギー E_γ は一般に励起状態 $^{57}_{26}\text{Fe}^*$ と基底状態 $^{57}_{26}\text{Fe}$ の原子核の質量差 ΔM と光速 c を用いて決まる次のエネルギーにほぼ等しい:

$$E_\gamma \approx \Delta M c^2 = 1.44 \times 10^4 \text{ eV} \quad (8)$$

問5 過程 (7) で、初めに $^{57}_{26}\text{Fe}^*$ は真空中に静止していたと仮定した場合、 γ 線放出により反跳する $^{57}_{26}\text{Fe}$ の運動エネルギー (反跳エネルギー) ΔE_1 を求めよ。

初めに $^{57}_{26}\text{Fe}^*$ が真空中で静止していた場合には、過程 (7) で放出される γ 線のエネルギー E_1 は式 (8) の値よりも $^{57}_{26}\text{Fe}$ の反跳エネルギーの値 ΔE_1 だけ小さな値になる:

$$E_1 = \Delta M c^2 - \Delta E_1 \quad (9)$$

逆にエネルギー E_2 の γ 線が真空中に静止した基底状態の $^{57}_{26}\text{Fe}$ を標的として反応し、励起状態 $^{57}_{26}\text{Fe}^*$ を作る時、作られた $^{57}_{26}\text{Fe}^*$ が反跳するため、 E_2 は $\Delta M c^2$ より微小な値だけ大きい必要がある ($\Delta E_2 = E_2 - \Delta M c^2 > 0$)。この ΔE_2 はほぼ上で求めた ΔE_1 に等しい。したがって、真空中に静止している原子核 $^{57}_{26}\text{Fe}^*$ から放出される γ 線のエネルギー E_1 と真空中に静止している標的原子核 $^{57}_{26}\text{Fe}$ に吸収されるべき γ 線のエネルギー E_2 の間には、 $E_2 - E_1 = 2\Delta E_1$ の差がある。

以上の考察から、真空中に静止した $^{57}_{26}\text{Fe}^*$ から放出された γ 線は、真空中に静止した $^{57}_{26}\text{Fe}$ を標的として $^{57}_{26}\text{Fe}^*$ を作るにはエネルギーが $2\Delta E_1$ だけ不足することになるため、 $^{57}_{26}\text{Fe}^*$ を作る事ができず、共鳴散乱が起きない。したがって散乱の確率は小さい。

しかし、1958年に、未だ20代の若いドイツ人のメスバウアー (R. L. Mössbauer) は意外なことを発見した。 γ 線を放出する原子核とその γ 線の標的となる原子核が共に固体の結晶の中にある場合には、共鳴散乱が起きることを発見したのである。固体の中にある原子核では、どうして反跳エネルギー $2\Delta E_1$ を無視したようなことが起こり得るのだろうか?

固体の中の原子は周囲の原子と格子状に結晶を作り、自由に動きまわることができない。そのため、原子核の重心の運動は制限されていて、 γ 線を放出しても、反跳した原子核の運動量が小さい場合には、原子の振動を励起できず、反跳の効果が現れない。いわば結晶全体で反跳し、結晶全体の質量は大きいので、 γ 線の放出で生じる反跳エネルギーが無視できるほど小さくなり得る。そのため反跳が無視できる現象が起きたのだ、と考えられる。この現象は発見者の名によりメスバウアー効果と呼ばれている。

アメリカ人 R. Pound とその大学院生 G. A. Rebka, Jr. は1959年に、重力の影響で光の振動数が変わるというアインシュタインの予言を確かめる巧妙な実験をメスバウアー効果を使って行った。

彼らは $^{57}_{26}\text{Fe}^*$ を生じる放射線源 ($^{57}_{27}\text{Co}$) を実験室の高さ h_1 に置き、そこで生じた $^{57}_{26}\text{Fe}^*$ が放出する γ 線を受ける標的として安定な $^{57}_{26}\text{Fe}$ を高さ h_2 に置いた。高さが等しければ ($h_1 = h_2$)、メスバウアー効果により、放出される γ 線も散乱される γ 線もエネルギーは等しく ΔMc^2 であるから、共鳴散乱が起きる。では、高さに差がある場合は、重力の影響で共鳴する γ 線の振動数に差が生じるであろうか。これを調べるため、標的の $^{57}_{26}\text{Fe}$ を音響スピーカーに埋め込んで放射線源の真下または真上に置き、スピーカーの振動によって標的が振動するために起こるドップラー効果を観測した (図3)。その結果、 g を地表の重力加速度の大きさとして、共鳴が起こる条件はスピーカーの振動する速さ v が $v = \frac{g}{c}|h_1 - h_2|$ のときであること、および、 $h_1 > h_2$ の場合には飛んでくる γ 線と $^{57}_{26}\text{Fe}$ の運動方向が同方向のときであり、 $h_1 < h_2$ の場合は γ 線と $^{57}_{26}\text{Fe}$ の運動方向が逆方向のときであることを確かめた。

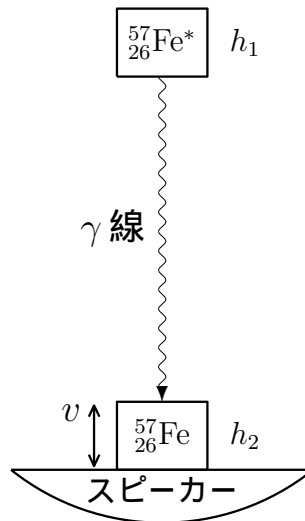


図3. Pound と Rebka の実験

以下 γ 線の飛来方向と測定器 (標的) の動く方向が共に鉛直方向で、同一直線上にあるとする。

問6 振動数が f の γ 線が速さ v で動く測定器に当たるとき、その測定器で振動数を測ると、測定値は f からずれるだろう。速さ v が光速 c に比べて十分小さい場合には、 γ 線の振動数のずれは音のドップラー効果と同様に考えて求めてよいと仮定して、スピーカーの速度が γ 線の飛来方向に速さ $v = \frac{g}{c}(h_1 - h_2)$ のとき生じる振動数のずれ Δf はどれだけか。 $h_1 > h_2$ の場合に求めよ。

アインシュタインは、一定の重力加速度 g があるとき、その加速度 g で自然落下する観測者は (周囲の景色は動いて見えても) 重力のない慣性系 (静止系または静止系に対して等速直線運動をする系) にいると感じるだろうと考えた。このような考え方は一般相対性理論では基本的に等価原理と呼ばれている。

問7 $h_1 > h_2$ の場合に Pound と Rebka の実験結果を等価原理で説明せよ。