力学２題（10 点）

問題を解き始めるまえに、別の封筒のなかに入った「全般的な注意」を読みなさい。

Part A.　隠された円盤（3.5 点）

半径 r_1 、厚さ h_1 の固い木製円柱を考える。この木製円柱の内部のどこかに半径 r_2、厚さ h_2 の金属の円盤が入っている。金属円盤の中心軸 B は、木製円柱の中心軸 S と平行であり、また、金属円盤は木製円柱の上面と下面から等距離の所に置かれている。S と B の距離を d、木の密度を ρ_1 、金属の密度を ρ_2 として、$\rho_2 > \rho_1$ とする。木製円柱と金属円板の質量の合計を M とする。

この問題では、この木製円柱を基盤の上に置き、円柱が左右に自由に転がることができるようにする。図 1 は横から見た図（a）と真上から見た図（b）である。

Part A のゴールは、金属円盤の大きさと位置を求めることである。

以下の問題では、

$$r_1,\ h_1,\ \rho_1,\ \rho_2, M \tag{1}$$

という量は与えられているものとして、間接的な測定によって、r_2, h_2, d を求めることが目的である。

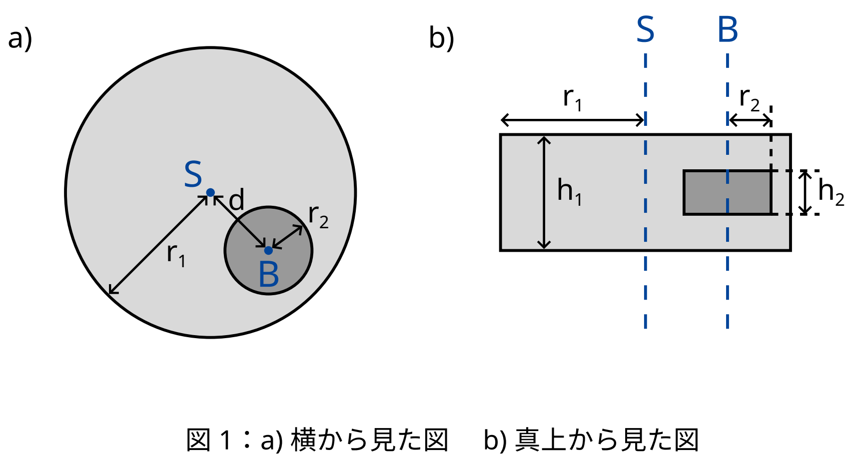

図 1：a) 横から見た図　b) 真上から見た図

全体の重心 C と木製円柱の中心軸 S との間の距離を b とする。この距離 b を求めるために、以下の実験を行う。まず、この木製円柱を水平な基盤の上に置いて、安定な平衡状態にあるようにする。次に、この基盤をゆっくりと傾けて、その角を Θ にする（図２）。静摩擦のために、木製円柱はすべることなく自由に転がる。木製円柱は傾斜を角度 ϕ まで転がって後安定な平衡状態となる。この角度 ϕ を測定する。

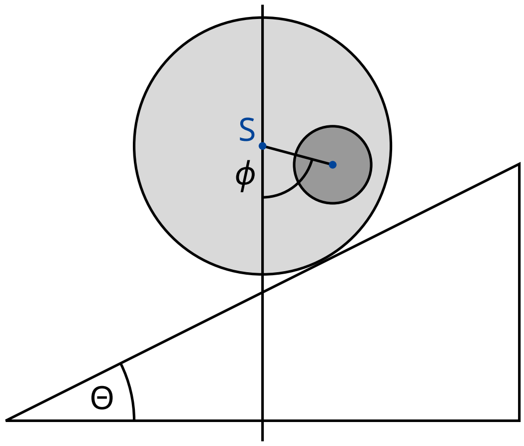

図 2：傾いた基盤の上にある円柱。

A.1	(1) で示した量と角度 ϕ と基盤の傾斜角 Θ の関数として、b を表せ。	0.8pt

以下では、b は知られているものと仮定する（解答中に用いてよい）。

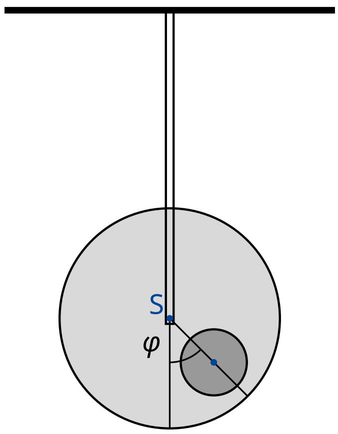

図 3：吊るされた円柱。

次に、この木製円柱の中心軸 S のまわりの慣性モーメント I_S を測定する。そのために、この木製円柱を中心軸 S のところで、固定した棒にとりつける。ただし S のまわりで木製円柱は回転できる。その木製円柱をつりあいの状態から小さな角度 φ だけ回してから放す（図 3 を見よ）。このとき、φ は周期 T で周期的に変化する。

A.2	φ に対する運動方程式を求めよ。木製円柱の中心軸 S のまわりの慣性モーメント I_S を、T, b と (1) に示された量を用いて表せ。つりあいの状態からのずれ φ は常に小さいものとする。	0.5pt

問題 A.1 と**問題 A.2** の測定結果から、円柱内部の金属円盤の形状と位置を求めたい。

A.3	中心軸の位置 d を、b と (1) で示された量で表せ。この結果に r_2 と h_2 を変数として含んでもよい（これらは**問題 A.5** で求める）。	0.4pt

A.4	慣性モーメント I_S を b および (1) の量で表せ。解答には、r_2 と h_2 が変数として含まれていてもよい（これらは**問題 A.5** で求める）。	0.7pt

A.5	これまでに求めたすべての結果を用いて、h_2 と r_2 を b, T および (1) の量を用いて表せ。h_2 を r_2 の関数として表してもよい。	1.1pt

Part B. 回転する宇宙ステーション（6.5 点）

アリスは宇宙ステーションに住む宇宙飛行士である。宇宙ステーションは半径 R の巨大な車輪のようになっていて、中心軸のまわりに回転している。それによって、宇宙飛行士たちにとっての人工的な重力が与えられている。宇宙飛行士たちは、宇宙ステーションの外輪の内側に住む。宇宙ステーションによる万有引力と、床の曲率は無視できる。

B.1	宇宙飛行士が地球上の重力加速度 g_E と同じ加速度を感じるとき、宇宙ステーションの角速度 ω_{ss} を求めよ。	0.5pt

宇宙飛行士どうしの友人アリスとボブは議論をしている。ボブは宇宙ステーションに住んでいることが信じられず、じつは地球上に住んでいるのではないかと疑っている。アリスはボブが回転する宇宙ステーションに住んでいることを物理を使って示したいと思っている。そのために、彼女は質量 m の物体をばね定数 k のばねに取り付けて振動させることを思いついた。物体は鉛直方向にしか振動せず、水平方向には動くことができないものとする。

B.2	地球表面における重力は一定であるとして、その加速度を g_E とするとき、地球上にいる人が測定する振動の角振動数 ω_E を求めよ。	0.2pt

B.3	宇宙ステーションのなかで、アリスが測定した場合の振動の角振動数 ω を求めよ。	0.6pt

アリスは、回転する宇宙ステーションに宇宙飛行士たちがいるということが実験によって証明されると確信している。しかし、ボブは納得しなかった。彼は、もし地表面での高度による重力変化を考慮したら、同じ結果が得られるのではないかと考えた。

以下の問題で、ボブの疑問が正しいかどうか考えよう。

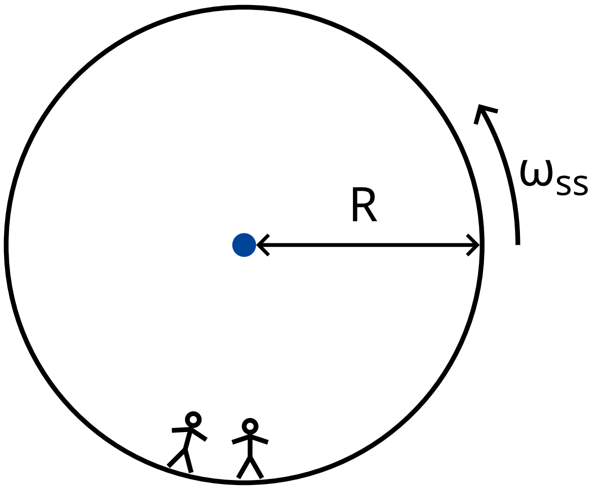

図４：宇宙ステーション

B.4	地球表面から小さな高さ h における重力加速度 $g_E(h)$ の表式を求めて、振動する物体の角振動数 $\tilde{\omega}_E$ を求めよ（線形近似で十分である）。地球の半径を R_E とする。地球の自転は無視せよ。	0.8pt

実際、この宇宙ステーションでは、ばね振り子の振動数はボブが予想したとおりであることを、アリスは確認した。

B.5	地球における角振動数 $\tilde{\omega}_E$ と等しい角振動数 ω でばね振り子が振動するときの、宇宙ステーションの半径 R を求めよ。地球の半径 R_E を用いて表せ。	0.3pt

ボブのがんこさにいらいらしたアリスは、更なる実験をおこなって、ここは宇宙ステーションの中であることを証明することにした。そのために、彼女は宇宙ステーションの床から高さ H の塔にのぼって、物体を落とすことにした。この実験は、慣性系で考えることもできるし、回転座標系で考えることもできる。

一様に（一定の角速度で）回転している座標系では、コリオリ力と呼ばれるみかけの力 $\vec{F}_C$ が宇宙飛行士には見える。一定の角速度 $\vec{\omega}_{ss}$ で回転する座標系において、速度 $\vec{v}$ で運動する質量 m の物体が受けるコリオリ力 $\vec{F}_C$ は、次のように与えられる：

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss} \,. \tag{2}$$

あるいは、スカラー量で表現すると、以下のようになる：

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin\phi \,, \tag{3}$$

ここで ϕ は速度ベクトルと回転軸のなす角である。力の向きは、速度 v と回転軸の両方に垂直である。力の向きは右手の法則にしたがっているが、どちらの向きにとってもかまわない。

B.6	物体が床にぶつかったときの、（塔の真下を基準として塔とは垂直な向きの）物体の水平方向の速さ v_x と物体の水平方向の変位 d_x を求めよ。ただし、塔の高さ H は小さく、物体が落下している間は加速度は一定であるとみなしてよい。また、$d_x \ll H$ としてよい。	1.1pt

良い結果を得るために、アリスはこれまでよりもっと高い塔の上から実験をおこなうことにした。しかし、アリスは驚いたことに、物体は塔の真下に落ちたのであった。つまり、$d_x = 0$ である。

B.7	$d_x = 0$ となるような塔の高さの下限を求めよ。	1.3pt

アリスは、ボブを説得しようと、また別の方法を試みた。コリオリ力の影響を示すために、ばね振り子を用いようとしたのである。そのために、彼女は実験のセットアップを以下の図のように作り変えた：棒の上を x 方向に摩擦なしに動くことができるリングに、さっきのばねを取り付けた。ばね自身は、y 方向に振動する。棒は床に平行で、宇宙ステーションの回転軸に垂直である。したがって、xy 平面は回転軸に垂直であり、y 方向が常に宇宙ステーションの回転の中心を向くようになっている。

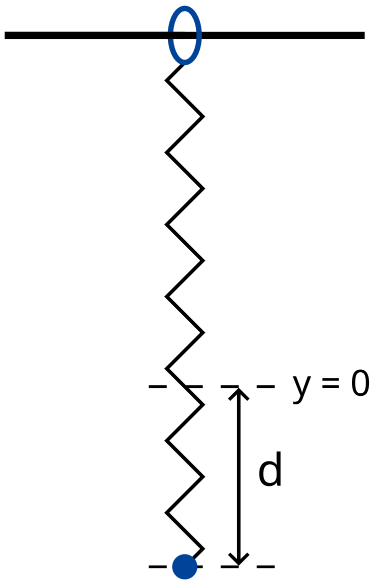

図５：セットアップ

B.8 平衡位置 $x = 0$, $y = 0$ から、アリスは物体を距離 d だけ引き下げて、ばねを離した（図５を見よ）。 1.7pt

- $x(t)$ と $y(t)$ の表式を求めよ。$\omega_{ss}d$ は小さいとしてよい。また、y 方向の運動についてはコリオリ力を無視してよい。
- 軌跡 $(x(t), y(t))$ をスケッチせよ（概略図を描け）。振幅のような、軌跡の重要な特徴はすべて記載すること。

アリスとボブは、議論を続ける……