

電気回路における非線形ダイナミクス (10 点)

問題を解き始めるまえに、別の封筒のなかに入った「全般的な注意」を読みなさい。

イントロダクション

双安定な（ふたつの安定な状態をもつ）非線形半導体素子は、スイッチや電磁振動の発生器として、電子工学でひろく使われる。そのような素子の例として、サイリスタ (thyristor) がある。サイリスタの最も重要な応用分野は、電力工学において交流電流を制御することである。例えば、サイリスタはメガワットのスケールで交流電流を直流電流に整流することができる。また、双安定な素子は、物理学のなかでも (Part B)、生物学のなかでも (Part C)、あるいはその他の現代の非線形科学のなかでも、自己組織化現象のモデルとして用いられる。

ゴール

非線形な $I-V$ 特性をもった素子を含む回路の、不安定性と非自明なダイナミクスについて考える。そのような回路の、工学的な応用と、生物系のモデリングへの応用を見出す。

Part A. 定常状態と不安定性 (3 点)

図1が示しているのは、非線形素子 X の、いわゆる **S字型 $I-V$ 特性**である。 $U_h = 4.00 \text{ V}$ (保持電圧、the holding voltage) から $U_{th} = 10.0 \text{ V}$ (しきい電圧、the threshold voltage) までの電圧領域では、この $I-V$ 特性は、ひとつの電圧に対して複数の電流をとる。簡単のため、図1のように、特性曲線は折れ線であるとみなす (グラフのそれぞれの部分は直線とみなしてよい)。なお、上側の部分は、延長すると原点を通っている。この近似は、実際のサイリスタの特徴を説明するのに、よい近似となっている。

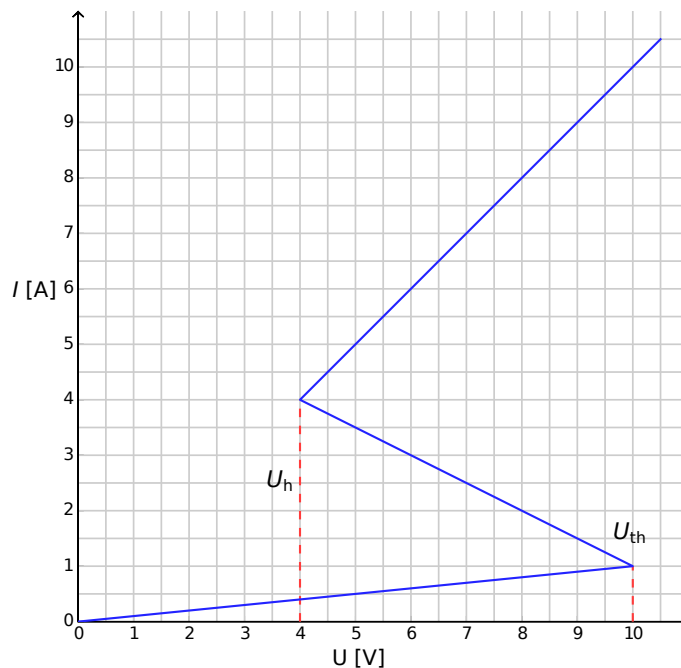


図1：非線形素子 X の $I-V$ 特性。

- A.1** 図1のグラフを用いて、 $I-V$ 特性の上側の部分における、素子 X の抵抗 R_{on} の数値を求めよ。同様にして、下側の部分における抵抗 R_{off} の数値を求めよ。また、中間の部分は、次の式で記述される： 0.4pt

$$I = I_0 - \frac{U}{R_{\text{int}}} \quad (1)$$

このとき、パラメーター I_0 と R_{int} の数値を求めよ。

非線形素子 X は、抵抗 R 、コイル L 、理想的な電圧源 \mathcal{E} と直列につながっている (図2)。回路が定常状態にあるとは、電流が時間変化せずに一定になること ($I(t) = \text{const}$) と定義する。

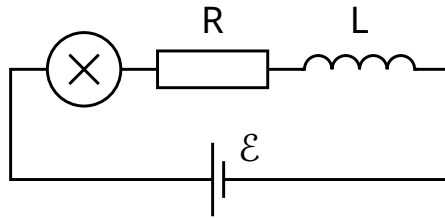


図2：素子 X 、抵抗 R 、コイル L 、電圧源 \mathcal{E} によって構成された回路。

- A.2** 図2の回路で、 \mathcal{E} の値が適当に固定され、 $R = 3.00 \Omega$ である場合に、定常状態となりえる状態の数は何個か？ また、 $R = 1.00 \Omega$ である場合には、定常状態の数はどうに変わるか？ 1pt

- A.3** 図2の回路で、 $R = 3.00 \Omega$, $L = 1.00 \mu\text{H}$, $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$ とする。定常状態において、電流 $I_{\text{stationary}}$ の数値と、素子 X にかかる電圧 $V_{\text{stationary}}$ の数値を求めよ。 0.6pt

図2の回路が $I(t) = I_{\text{stationary}}$ という定常状態にあるとする。電流の値が定常状態の値からわずかに離れたときに (定常状態の値からわずかに増加あるいは減少したときに)、定常状態に戻る向きに状態が変化するならば、定常状態は「安定である (stable)」と定義する。定常状態から離れる向きに状態が変化するならば、定常状態は「不安定である (unstable)」と定義する。

- A.4** 問題 A.3 で設定された数値の場合に、定常状態 $I(t) = I_{\text{stationary}}$ の安定性について考える。定常状態は安定か、あるいは不安定か？ 1pt

Part B. 物理学のなかの双安定非線形素子：無線送信機 (5点)

次に、新しい回路を考える (図3)。この場合には、非線形素子 X は、静電容量 $C = 1.00 \mu\text{F}$ をもつコンデンサーと並列につながれている。そして、この非線形素子とコンデンサーは、抵抗 $R = 3.00 \Omega$ と電圧源 $\mathcal{E} = 15.0 \text{ V}$ と直列につながれている。この場合には、回路は振動することがわかっている。その振動の1周期において、非線形素子 X は、 $I-V$ 特性曲線のひとつの直線部分からべつの直線部分へと不連続的にジャンプする。

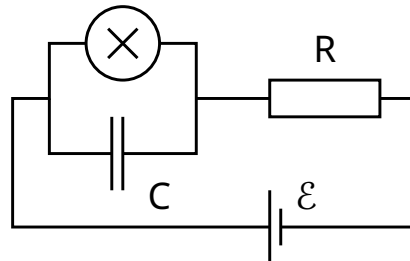


図3：素子 X 、コンデンサー C 、抵抗 R 、電圧源 ε によって構成された回路。

B.1 振動の1周期の状態の変化を、 $I-V$ グラフのなかに描け。振動の向き（時計回りか反時計回り）もグラフのなかに示すこと。また、式とスケッチ（概略図）を用いて、そのように状態が変化する理由も説明せよ。 1.8pt

B.2 振動の1周期において、 $I-V$ グラフの一方の直線部分と他方の直線部分にいる時間 t_1 と t_2 をそれぞれ求めよ。表式だけではなく、数値も求めること。また、 $I-V$ グラフのなかで一方の直線部分から他方の直線部分へとジャンプする時間は無視できるとしたとき、振動の周期 T の数値を求めよ。 1.9pt

B.3 振動の1周期において、非線形素子が消費する平均の電力（パワー） P を概算せよ。オーダーの評価のみで十分である。 0.7pt

図3の回路は、無線送信機（ラジオ送信機）をつくるときに用いられる。無線送信機をつくるときには、素子 X は長さ s の長い直線状のアンテナに取り付けられる。このとき、素子を取り付けた端と逆側の端は自由端になる。アンテナのなかでは、電磁波の定在波が形成されている。アンテナを伝わる電磁波の速さは、真空中のものと同じである。また、送信機は、問題 B.2 で得られた周期 T をもつ系の基本周波数を用いている。

B.4 s は 1 km 以下であるとしたとき、 s として最適な値を求めよ。 0.6pt

Part C. 生物学のなかの双安定非線形素子：ニューリスタ（2点）

この Part では、双安定非線形素子を生物のモデリングに応用することを考える。まず、人間の脳のなかにあるニューロンは、次のような性質をもっている：外部からの信号で刺激されると、1回だけ振動して、もとの状態に戻る。この特徴は興奮性と呼ばれるが、この特徴のために、神経系を構成するニューロンのネットワークのなかでパルスが伝わるのが可能となる。そして、ニューロンの興奮性とパルスの伝達に似た性質をもつように設計された半導体チップのことを、「ニューリスタ（neuristor）」と呼ぶ（ニューロン neuron とトランジスタ transistor を合わせた言葉である）。

これまでに考えてきた非線形素子 X を含む回路を用いて、ニューリスタの簡単なモデルをつくることを考えよう。そのためには、まず、図3の回路のなかにある電圧 ε を、 $\varepsilon' = 12.0 \text{ V}$ までいったん下げる必要がある。そうすると、振動は起こらなくなり、系は定常状態に達する。そして、電圧を再び $\varepsilon = 15.0 \text{ V}$ まで急激に増加させて、時間 τ ($\tau < T$) が経った後に、電圧を ε' まで戻す（図4を見よ）。このとき、 $\tau < \tau_{\text{crit}}$ の場合と $\tau > \tau_{\text{crit}}$ の場合とでは質的に異なる振舞いを示すような、臨界値 τ_{crit} が存在する。

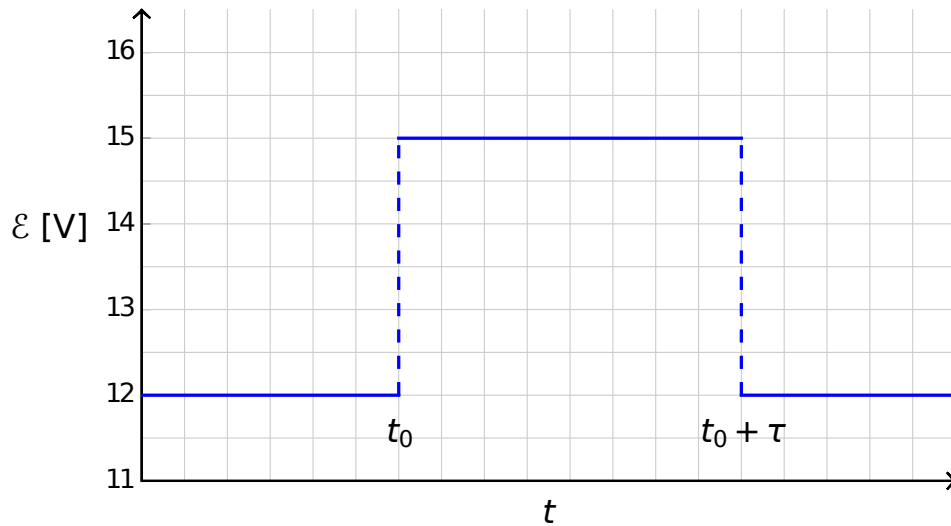


図4：電圧源から発せられる電圧の時間変化。

C.1 $\tau < \tau_{\text{crit}}$ と $\tau > \tau_{\text{crit}}$ のそれぞれの場合について、素子 X を流れる電流 $I_X(t)$ の時間依存性のグラフをスケッチせよ（定性的に描け）。 1.2pt

C.2 臨界値 τ_{crit} の、表式と数値を求めよ。 0.6pt

C.3 $\tau = 1.00 \times 10^{-6}$ s である回路は、ニューリスタとして機能するといえるか？ 0.2pt