

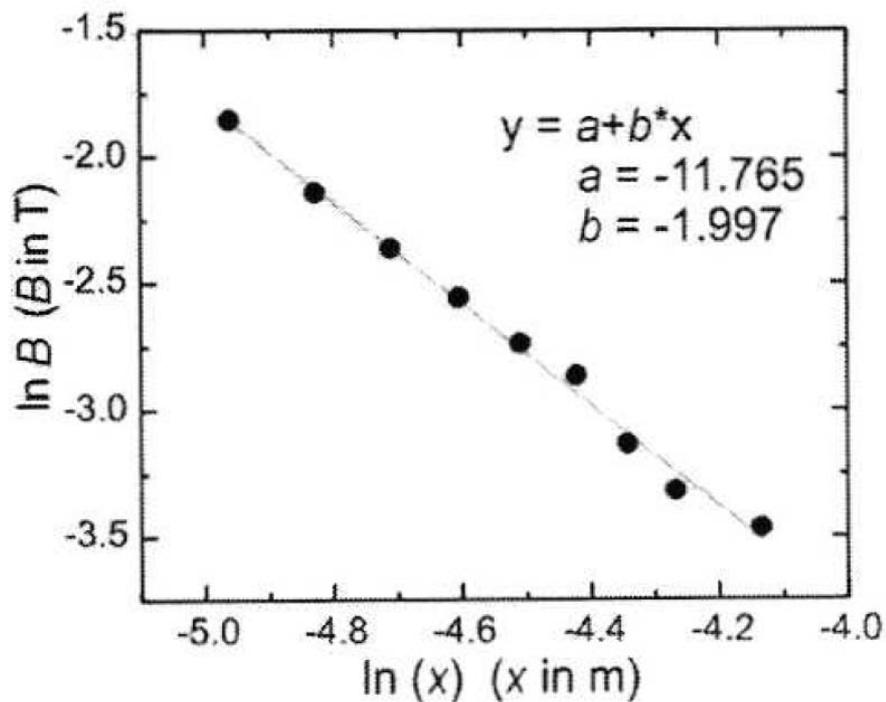
<b>Student Code</b>						
---------------------	--	--	--	--	--	--

平行に並んだ磁気双極子による線状の磁気トラップとその地震計・火山センサーへの応用 (10 points)

## A. PDLトラップの基本的特性

### 1. 磁石の磁化 ( $M$ ) の決定(2.5 pt.)

問題	解答	Marks																																																																																																																		
A.1 0.1 pt.	近くに磁石がない場合のテスラメーターのゼロオフセット( $B_0$ ) を記録しなさい。以下の磁場の測定ではこの値を差し引くこと。  $B_0 =$ 例 0.86 mT																																																																																																																			
A.2 1.15 pt.	「近接場」の領域 ( $7 \leq x \leq 16$ mm)において、 $x$ に対する磁場 $B$ を測定しなさい。 $x$ は磁石の中心から測ること。解答用紙に結果を記録しグラフを書きなさい。下の「ヒントと指示」に従うこと。  <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th><math>\Delta x</math> (mm)</th> <th><math>x</math> (mm)</th> <th><math>B_{raw}</math> (mT)</th> <th><math>B</math>(mT)</th> <th><math>\ln(x)</math> <small><math>x</math> in m</small></th> <th><math>\ln(B)</math> <small><math>B</math> in T</small></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>3</td><td>7</td><td>0.1576</td><td>0.3424</td><td>-4.962</td><td>-1.853</td></tr> <tr><td>4</td><td>8</td><td>0.1186</td><td>0.2367</td><td>-4.828</td><td>-2.139</td></tr> <tr><td>5</td><td>9</td><td>0.0951</td><td>0.1567</td><td>-4.710</td><td>-2.362</td></tr> <tr><td>6</td><td>10</td><td>0.0785</td><td>0.1177</td><td>-4.605</td><td>-2.556</td></tr> <tr><td>7</td><td>11</td><td>0.0657</td><td>0.0942</td><td>-4.510</td><td>-2.736</td></tr> <tr><td>8</td><td>12</td><td>0.0579</td><td>0.0776</td><td>-4.423</td><td>-2.864</td></tr> <tr><td>9</td><td>13</td><td>0.0445</td><td>0.0648</td><td>-4.343</td><td>-3.132</td></tr> <tr><td>10</td><td>14</td><td>0.0371</td><td>0.0570</td><td>-4.269</td><td>-3.318</td></tr> <tr><td>12</td><td>16</td><td>0.0321</td><td>0.0436</td><td>-4.135</td><td>-3.466</td></tr> <tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr> </tbody> </table>	$\Delta x$ (mm)	$x$ (mm)	$B_{raw}$ (mT)	$B$ (mT)	$\ln(x)$ <small><math>x</math> in m</small>	$\ln(B)$ <small><math>B</math> in T</small>	3	7	0.1576	0.3424	-4.962	-1.853	4	8	0.1186	0.2367	-4.828	-2.139	5	9	0.0951	0.1567	-4.710	-2.362	6	10	0.0785	0.1177	-4.605	-2.556	7	11	0.0657	0.0942	-4.510	-2.736	8	12	0.0579	0.0776	-4.423	-2.864	9	13	0.0445	0.0648	-4.343	-3.132	10	14	0.0371	0.0570	-4.269	-3.318	12	16	0.0321	0.0436	-4.135	-3.466																																																							
$\Delta x$ (mm)	$x$ (mm)	$B_{raw}$ (mT)	$B$ (mT)	$\ln(x)$ <small><math>x</math> in m</small>	$\ln(B)$ <small><math>B</math> in T</small>																																																																																																															
3	7	0.1576	0.3424	-4.962	-1.853																																																																																																															
4	8	0.1186	0.2367	-4.828	-2.139																																																																																																															
5	9	0.0951	0.1567	-4.710	-2.362																																																																																																															
6	10	0.0785	0.1177	-4.605	-2.556																																																																																																															
7	11	0.0657	0.0942	-4.510	-2.736																																																																																																															
8	12	0.0579	0.0776	-4.423	-2.864																																																																																																															
9	13	0.0445	0.0648	-4.343	-3.132																																																																																																															
10	14	0.0371	0.0570	-4.269	-3.318																																																																																																															
12	16	0.0321	0.0436	-4.135	-3.466																																																																																																															

A.3  
0.75 pt.

両辺の自然対数をとると

$$B = \frac{\mu_0 m}{2\pi L} \frac{1}{x^p}$$

$$\ln(B) = \ln A - p \ln x$$

ここで,

$$A = \frac{\mu_0 m}{2\pi L}$$

である。  $y = a + bx$  の直線で回帰分析すると、  $a = -11.765, b = -1.997$  となる。従って、指数は  $p = -b = 2.0$  が得られる。これは、磁気双極子の磁束密度が、近距離 ( $x < L$ ) で  $r^2$  に反比例することとよく一致している。

A.4  
0.5 pt.

$$m = \frac{2\pi L}{\mu_0} \exp(a) = 0.987 \text{ Am}^2$$

$$M = \frac{m}{\pi^2 RL} = 1.2 \times 10^6 \text{ A/m}$$

より正確な結果では  $M = 1.1 \times 10^6 \text{ A/m}$  となる。以下ではこの値を用いる。

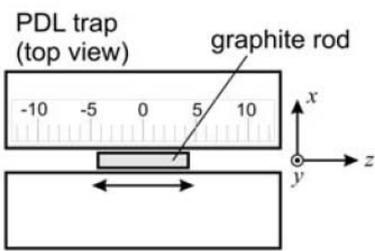
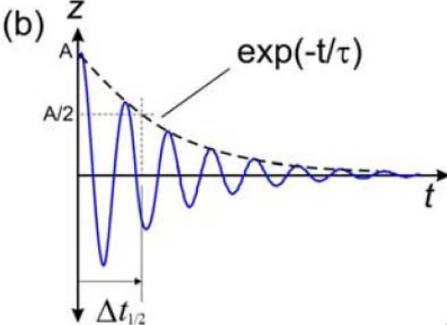
## 2. 磁気浮上効果と磁化率 ( $\chi$ ) (1.0 pt.)

問題	解答	Marks
<p>A.5 0.1 pt.</p>	<p>長さ8 mm のグラファイトの棒HB/0.5を磁気浮上させよ。その時の棒の浮上している高さ<math>y_0</math> を測定しなさい。(図7aを参照。) ヒント：図7bに示されている定規を使いなさい。グラファイトの棒の位置を読むために磁石に定規を押し付けて測りなさい。</p> <p><math>y_0 =</math>            例 2.2 mm</p>	
<p>A.6 0.8 pt.</p>	$mg = F_y = -\frac{\mu_0 M^2 \chi V_R R^4}{2 a^5} f_Y(y_0/a)$ $\chi = -\frac{2\rho g a^5}{\mu_0 M^2 R^4 f_Y(y_0/a)}$ $a = R + g_M/2 = (3.2 + 1.5/2) \text{ mm} = 3.95 \text{ mm}$ <p><math>y_0 = 2.2 \text{ mm}</math> を用いると,</p> $f_Y(u) = \frac{4u(3-u^2)(1-u^2)}{(1+u^2)^5}$ $f_Y(y_0/a) = f_Y(2.2/3.95) = 1.07$ <p><math>M = 1.1 \times 10^6 \text{ A/m}</math>, <math>R = 3.2 \text{ mm}</math>, <math>\rho = 1680 \text{ kg/m}^3</math> を用いて,</p> $\chi = -2 \times 10^{-4}$	
<p>A.7 0.1 pt.</p>	<p>グラファイトは以下のどの磁氣的性質を持った物質か？一つ選びなさい。</p> <p>(i)強磁性 (ii)常磁性 (iii)反磁性</p> <p>(iii) 反磁性</p> <p>理由：</p> <p>(1) グラファイトが磁場に反発すること。</p> <p>(2) <math>\chi</math> の符号が負であること。</p>	

### 3. 「ラクダの背」ポテンシャル中の振動と磁化率( $\chi$ )

問題	解答	Marks
<p>A.8 0.2 pt.</p>	<p>「HB/0.5」のグラファイトを長さ <math>l = 8 \text{ mm}</math> にしたものを振動させてみなさい。(振動振幅は小さい範囲、例えば <math>A &lt; 4 \text{ mm}</math> に留めなさい)。振動の周期を求めなさい。振動は時間とともに減衰により衰える。この減衰の効果は無視しなさい。)</p> <p>例として、長さ <math>8 \text{ mm}</math> の HB/0.5 の芯を約 <math>3 \text{ mm}</math> 変位させて振動させ、5 回往復する時間を測定した。</p> <p>1回目    <math>6.12 \text{ s}</math>                  2回目    <math>6.13 \text{ s}</math>                  3回目    <math>6.14 \text{ s}</math>                  平均：    <math>T_z = 1.23 \text{ s}</math></p>	
<p>A.9 0.8 pt.</p>	<p>この振動を用いて、グラファイトの磁化率(<math>\chi</math>)を計算しなさい。</p> <p>調和振動子とすると、<math>k_z = m_R \omega^2</math>。これより、</p> $\chi = -\frac{k_z}{C_1 \mu_0 M^2 V_r} = \frac{\omega^2 \rho}{C_1 \mu_0 M^2}$ <p><math>M = 1.1 \times 10^6 \text{ A/m}</math>, <math>C_1 = 198.6/\text{m}^2</math>, <math>T_z = 1.23 \text{ s}</math> を用いると、</p> $\chi = -1.5 \times 10^{-4}$	

### 4. 振動のQ値 (Q) と空気の粘性 $\mu_A$ の測定 (4.0 points)

問題	解答	Marks																																																																																																		
<p>A.10 0.5 pt.</p>	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>(a)</p>  </div> <div style="text-align: center;"> <p>(b)</p>  </div> </div> <p>指数関数的な減衰における半減期を求める方法を用いる。 振幅が半分になるまでの時間 <math>\Delta t_{1/2}</math> を求め、次の式で計算する</p> $\tau = \frac{\Delta t_{1/2}}{\ln 2}$																																																																																																			
<p>A.11 1.5 pt.</p>	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th>Trial</th> <th>Diam.</th> <th>Actual Radius</th> <th><math>\Delta t_{1/2}</math></th> <th>Mean <math>\Delta t_{1/2}</math></th> <th><math>\tau</math></th> <th><math>r^2 \times \ln(0.607 / r)</math></th> </tr> <tr> <td></td> <td>(mm)</td> <td>(mm)</td> <td>(s)</td> <td>(s)</td> <td>(s)</td> <td>(mm<sup>2</sup>)</td> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>0.3</td> <td>0.19</td> <td>3.89</td> <td>3.913</td> <td>5.646</td> <td>0.117</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td>3.97</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td>3.88</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>0.5</td> <td>0.28</td> <td>7.69</td> <td>7.617</td> <td>10.989</td> <td>0.224</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td>7.57</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td>7.59</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>0.7</td> <td>0.35</td> <td>8.77</td> <td>8.82</td> <td>12.73</td> <td>0.322</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td>8.81</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td>8.88</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>0.9</td> <td>0.45</td> <td>12.4</td> <td>11.70</td> <td>16.88</td> <td>0.482</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td>11.33</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td>11.38</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	Trial	Diam.	Actual Radius	$\Delta t_{1/2}$	Mean $\Delta t_{1/2}$	$\tau$	$r^2 \times \ln(0.607 / r)$		(mm)	(mm)	(s)	(s)	(s)	(mm <sup>2</sup> )	1	0.3	0.19	3.89	3.913	5.646	0.117				3.97							3.88				2	0.5	0.28	7.69	7.617	10.989	0.224				7.57							7.59				3	0.7	0.35	8.77	8.82	12.73	0.322				8.81							8.88				4	0.9	0.45	12.4	11.70	16.88	0.482				11.33							11.38				
Trial	Diam.	Actual Radius	$\Delta t_{1/2}$	Mean $\Delta t_{1/2}$	$\tau$	$r^2 \times \ln(0.607 / r)$																																																																																														
	(mm)	(mm)	(s)	(s)	(s)	(mm <sup>2</sup> )																																																																																														
1	0.3	0.19	3.89	3.913	5.646	0.117																																																																																														
			3.97																																																																																																	
			3.88																																																																																																	
2	0.5	0.28	7.69	7.617	10.989	0.224																																																																																														
			7.57																																																																																																	
			7.59																																																																																																	
3	0.7	0.35	8.77	8.82	12.73	0.322																																																																																														
			8.81																																																																																																	
			8.88																																																																																																	
4	0.9	0.45	12.4	11.70	16.88	0.482																																																																																														
			11.33																																																																																																	
			11.38																																																																																																	

A.12 1.0 pt.	$B = \frac{2\rho}{3\mu_A}$ と書くと, $\tau = Br^2 \ln\left(0.607 \times \frac{l}{r}\right)$ $y = A + Bx$ の直線で回帰分析をおこなう.  ここで, $y = \tau$ , $x = r^2 \ln\left(0.607 \times \frac{l}{r}\right)$  $B = 29.02 \text{ s/mm}^2$ より,  $\mu_A = \frac{2\rho}{3B} = 3.86 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$	
-----------------	--	--

## B. PDLトラップの測定器への応用

### 5. PDLトラップ地震計 (0.5 pt.)

問題	解答	Marks
B.1 0.2 pt.	どの直径の棒を選んだか? 最も減衰時間が長く質量の大きな0.9mmの棒を選んだ.	
B.2 0.3 pt.	$\tau = 16.9 \text{ s}, T = 298 \text{ K}, m_R = \rho\pi r^2 l = 8.55 \times 10^{-6} \text{ kg}$ を用いて,  $a_n = \sqrt{\frac{4k_B T \omega_0}{Q m_R}} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\tau m_R}} = 1.5 \times 10^{-8} \text{ m/s}^2 \text{ Hz}^{0.5}$	

### 6. PDLトラップを利用した傾斜計 (2 pt.)

問題	解答	Marks
B.3 0.5 pt.	位置変化 $\Delta z$ と、ネジのピッチ $S$ およびネジの回転数 ( $N$ )との関係を導きなさい。  $k_z = mg \sin \theta = mgNS/D \quad \Delta z = \frac{mgSN}{k_z D}$  Q3 から $k_z = m\omega^2$ なので,  $\Delta z = \frac{gSN}{\omega^2 D}$	

<p>B.4 1.25 pt.</p>	<p>ネジをそっと回転させて、回転数<math>N</math>とグラファイト棒の位置変化<math>\Delta z</math>との関係 を求め、そこからネジのピッチ<math>S</math>を決定しなさい。</p> <table border="1" data-bbox="306 477 858 748"> <thead> <tr> <th><math>\Delta z</math> (mm)</th> <th><math>\phi</math></th> <th>N (turn)</th> <th></th> <th></th> <th></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>0.5</td><td>135</td><td>0.375</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>1</td><td>270</td><td>0.75</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>1.5</td><td>450</td><td>1.25</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>585</td><td>1.625</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2.5</td><td>720</td><td>2.0</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>855</td><td>2.375</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3.5</td><td>945</td><td>2.625</td><td></td><td></td><td></td></tr> </tbody> </table> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: flex-start;"> <div data-bbox="306 779 651 967"> <p>(a)</p> </div> <div data-bbox="651 779 896 990"> <p>(b) Displacement vs. N turn</p> </div> </div> <p><math>D = 22 \text{ cm}</math>, Q3 から, <math>T_z = 1.23 \text{ s}</math> を用いる. <math>y = A + Bx</math> の直線で回帰分 析すると, <math>B = 1.287</math> から</p> $S = \frac{B\omega^2 D}{g} = 0.75 \text{ mm/1 回転}$ <p>実際には <math>S = 0.8 \pm 0.1 \text{ mm/1 回転}</math> である.</p>	$\Delta z$ (mm)	$\phi$	N (turn)				0	0	0				0.5	135	0.375				1	270	0.75				1.5	450	1.25				2	585	1.625				2.5	720	2.0				3	855	2.375				3.5	945	2.625				
$\Delta z$ (mm)	$\phi$	N (turn)																																																						
0	0	0																																																						
0.5	135	0.375																																																						
1	270	0.75																																																						
1.5	450	1.25																																																						
2	585	1.625																																																						
2.5	720	2.0																																																						
3	855	2.375																																																						
3.5	945	2.625																																																						
<p>B.5 0.25 pt.</p>	<p>地面の傾斜が変化した際にそれを楽に読み取れるためには、グラファイト棒が 新たな平衡位置にできるだけ速やかに落ち着く（長時間にわたって振動が持続 するのではなく）ことが望ましい。そのために最適な傾斜計の<math>Q</math>値はいくら か？</p> <p>臨界減衰の条件なので, <math>Q = 0.5 \text{ s}</math></p>																																																							