T2　解答
地震・火山・津波

A.　メラピ火山

A.1（0.5 点）

平衡温度を求める。

$$m_w c_{vw}(T_e - T_w) + m_m c_{vm}(T_e - T_m) = 0$$

よって，

$$T_e = \frac{m_w c_{vw} T_w + m_m c_{vm} T_m}{m_w c_{vw} + m_m c_{vm}}$$

A.2（0.3 点）

理想気体の状態方程式は，$p_e v_e = RT_e$，よって，

$$p_e = \frac{R}{v_e} \frac{m_w c_{vw} T_w + m_m c_{vm} T_m}{m_w c_{vw} + m_m c_{vm}}$$

A.3（0.5 点）

噴出ガスの相対速度 u_{rel} は，次のように示される。

$$u_{rel} = \kappa p^{\alpha} V^{\beta} m^{\gamma}$$

ここで，κ は無次元の定数，

次元解析により，

$$\mathrm{LT^{-1}} = \mathrm{M}^{\alpha+\gamma}\mathrm{L}^{-\alpha+3\beta}\mathrm{T}^{-2\alpha}$$

$$\alpha + \gamma = 0$$

$$-\alpha + 3\beta = 1$$

$$-2\alpha = -1$$

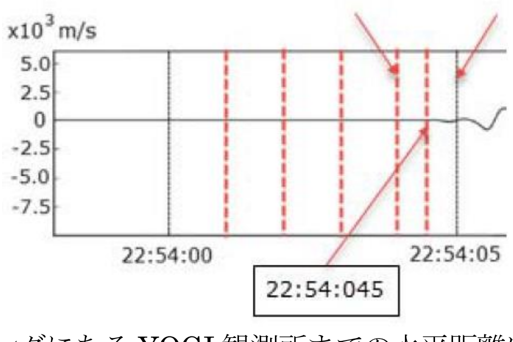
ゆえに，

$$u_{rel} = \kappa p^{1/2} V^{1/2} m^{-1/2}$$

B.　ジョグジャカルタ地震

B.1（0.5 点）

与えられた図 2 の震動図から，地震が震源で発生した後，P 波は 2:54:045 または (4.5 - 5.5)秒に到達したことがわかる。



震央からギャンピングにある YOGI 観測所までの水平距離は 22.5 km であり，震源の深さは 15 km であるから，震源から観測点までの距離は，

$$\sqrt{22.5^2+15^2}\ \mathrm{km}=27.04\mathrm{km}$$

よって，P 波の速度は，

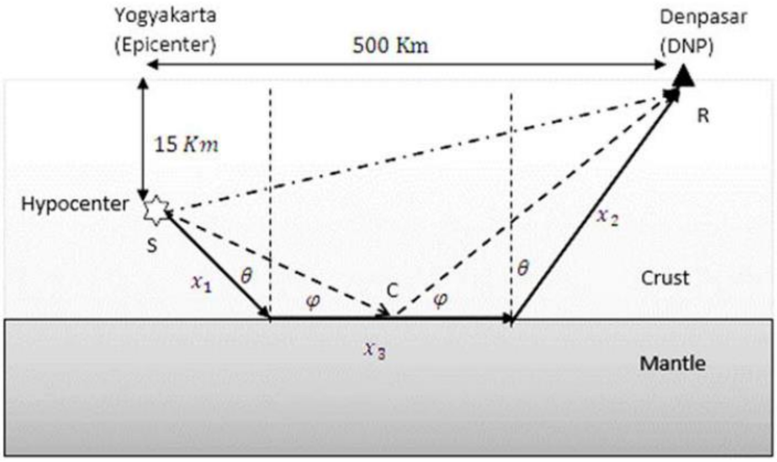
$$v_\mathrm{p}=\frac{27.04\,\mathrm{km}}{4.7\,\mathrm{s}}=5.75\,\mathrm{km/s}$$

B.2（0.6 点）

直接到達した P 波は，$v_\mathrm{p}=v_1$ とおいて，

$$t_\mathrm{direct}=\frac{\mathrm{SR}}{v_1}=\frac{\sqrt{500^2+15^2}}{v_1}=\frac{502.021}{5.753}\mathrm{s}=86.9\mathrm{s}$$

光波の場合と同様に，反射の法則は地震波にも適用可能である。



伝播する P 波の図

反射して到達した P 波：

$$t_\mathrm{reflected}=\frac{\mathrm{SC}}{v_1}+\frac{\mathrm{CR}}{v_1}$$

$$\mathrm{SC}\cos\varphi+\mathrm{CR}\cos\varphi=500 \quad\Rightarrow\quad \tan\varphi=\frac{45}{500} \quad\Rightarrow\quad \sin\varphi=\frac{45}{\sqrt{500^2+45^2}}$$

$$t_\mathrm{reflected}=\frac{45}{v_1\sin\varphi}=87.3\,\mathrm{s}$$

B.3（1.2 点）

マントル中の P 波の速度をv_2 とする。マントルを横切る最も速い波は，マントル上部に沿って伝播する波である。

屈折波の図から，

$$\frac{\sin\theta}{v_1}=\frac{1}{v_2}\ ;\quad \sin\theta=\frac{v_1}{v_2}\ ;\quad \cos\theta=\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2}$$

$$\cos\theta=\frac{15}{x_1}\ ;\quad x_1=\frac{15}{\cos\theta}\mathrm{km}\ ;\quad x_2=\frac{30}{\cos\theta}\mathrm{km}$$

$$x_3=500-(x_1+x_2)\sin\theta=500-45\tan\theta$$

総伝播時間：

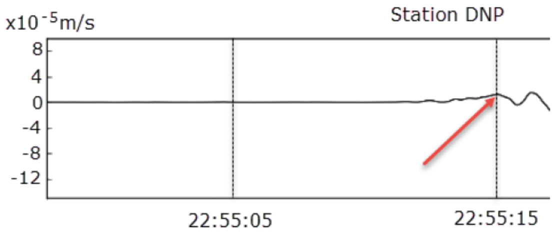
$$t=\frac{x_1+x_2}{v_1}+\frac{x_3}{v_2}=\frac{45}{v_1\cos\theta}+\frac{500}{v_2}-\frac{45\tan\theta}{v_2}$$

ここで，$u_1=1/v_1$，$u_2=1/v_2$ とし，方程式を整理すると，

$$(500^2+45^2)u_2^2-2t\cdot 500u_2+t^2-45^2u_1=0$$

この解は,

$$v_2=\frac{500tv_1^2+45v_1\sqrt{(45^2+500^2)-t^2v_1^2}}{t^2v_1^2-45^2}$$



地震波形から，最も速い波が 22:55:15 にデンパサールに到着したことがわかる。これはジョグジャカルタの地震の発生時刻から $t=75$ 秒後である。よって,

$$v_2=7.1\,\mathrm{km/s}$$

B.4（1.4 点）

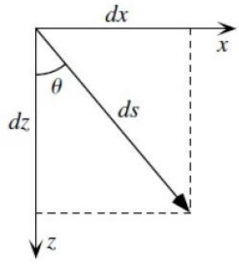
$p=\sin\theta/v$，$u=1/v$ と定義すると,

$$p\equiv u(0)\sin\theta_0=u(z)\sin\theta\ ;\qquad \sin\theta=\frac{p}{u(z)}$$

$u(z)=1/v(z)$ であり，θ_0 は地震波の方向の初期角度である。

$$\frac{dx}{ds}=\sin\theta=\frac{p}{u(z)}\ ;\qquad \frac{dz}{ds}=\cos\theta=\sqrt{1-\left(\frac{p}{u(z)}\right)^2}$$

$$\frac{dx}{dz}=\frac{dx}{ds}\frac{ds}{dz}=\frac{p}{u}\frac{u}{\left(u^2-p^2\right)^{1/2}}=\frac{p}{\left(u^2-p^2\right)^{1/2}}\qquad \therefore\quad x=\int_{z_1}^{z_2}\frac{p}{\left(u^2-p^2\right)^{1/2}}dz$$



波の方向のイラスト

震源と観測所の間の距離 X は，震源から地震波が到達する最深部の点（TP）までの水平距離の 2 倍に等しい。

TP では $\theta=90$ 度である。したがって，TP の深さを z_t とすると,

$$p=u(z_t)=\frac{1}{v_0+az_t}\ ;\qquad z_t=\frac{1-pv_0}{ap}$$

$$X = 2\int_0^{z_t} \frac{p(v_0 + az)}{(1 - p^2(v_0 + az)^2)^{1/2}} dz = -\frac{2}{ap}\left(\sqrt{1 - p^2(v_0 + az_t)^2} - \sqrt{1 - p^2 v_0^2}\right)$$
$$= \frac{2}{ap}\sqrt{1 - p^2 v_0^2}$$

B.5（1.0 点）

微小な伝播時間に対して,

$$dt = \frac{ds}{v(z)} \quad ; \qquad \frac{dt}{ds} = u(z)$$

ゆえに,

$$\frac{dt}{dz} = \frac{dt}{ds}\frac{ds}{dz} = \frac{u^2}{(u^2 - p^2)^{1/2}}$$

よって,

$$T = 2\int_0^{z_t} \frac{u^2}{(u^2 - p^2)^{1/2}} dz = 2\int_0^{z_t} \frac{1}{(v_0 + az)} \frac{1}{(1 - p^2(v_0 + az)^2)^{1/2}} dz$$

B.6（1.0 点）

震源からデンパサールまでの総伝播時間は，以前の関係を使用して計算できる。

$$T(p) = 2\int_0^{z_t} \frac{u^2(z)}{\left(u^2(z) - p^2\right)^{1/2}} dz$$

これは連続である $u(z)$ に対して有効であり，単純化された均質な層（図 4）では，積分の式は総和で表される。

$$T(p) = 2\sum_i^N \frac{u_i^2 \Delta z_i}{\left(u_i^2 - p^2\right)^{1/2}}$$
$$T(p) = 2\frac{u_1^2 \Delta z_1}{\left(u_1^2 - p^2\right)^{1/2}} + 2\frac{u_2^2 \Delta z_2}{\left(u_2^2 - p^2\right)^{1/2}} + 2\frac{u_3^2 \Delta z_3}{\left(u_3^2 - p^2\right)^{1/2}}$$
$$= \frac{2\times(0.1504)^2\times 6}{\left(0.1504^2 - 0.143^2\right)^{1/2}} + \frac{2\times(0.1435)^2\times 9}{\left(0.1435^2 - 0.143^2\right)^{1/2}} + \frac{2\times(0.1431)^2\times 15}{\left(0.1431^2 - 0.143^2\right)^{1/2}}$$
$$= 151.64\,\mathrm{s}$$

震源地からデンパサールまでの実際の所要時間は 75 秒である。観測された移動時間の適切な値に至るまで，速度と深度のパラメータを変えることによって，物理学者は地球の構造を知ることができる。

（訳者補足）上記の解法以外にもいくつかの解法がある。B3 と同様にして、上から第 3 層目の上部を水平方向に伝搬する波を考えてもよい。この場合は所要時間が７５秒に近くなる。また第 3 層目とマントルの間で反射が起きると考えても、それほど変わらない答えが得られる。なお、解答と同じ方法で計算した場合、第 3 項の分母が非常に小さくなるため、四捨五入の仕方によって値がかなり変わる。解法が正しければ、正答としてよいだろう。

C. 1（0.5 点）

海面より上の海水の質量の中心が海面から$h/2$の高さにある。よって，ポテンシャルエネルギーは，

$$E_P = \frac{h^2 \rho \lambda L g}{4} \qquad (\rho \text{ は海水の密度})$$

C.2（1.2 点）

図 5 の津波を考えると，海底から海面までのすべての海水が波動によって動くと考えられる。蓄えられた位置エネルギーが海水の運動エネルギーとなるので，

$$\frac{1}{4}\rho \lambda h^2 L g = \frac{1}{4}\rho d L \lambda U^2$$

ここで，U は海水自体の水平方向の速さである。

海面上の海水の体積$hL\dfrac{\lambda}{2}$は，水平方向に半周期$\tau/2$の間に運動する海水の体積に等しい。よって，

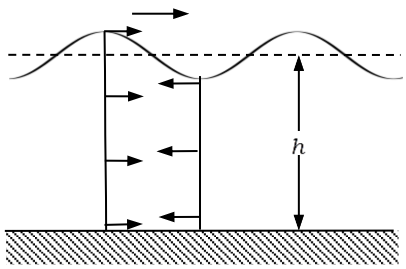
$$hL\frac{\lambda}{2} = dLU\frac{\tau}{2} \qquad \therefore \quad U = \frac{h\lambda}{\tau d}$$

津波の伝播する速さをv とおくと，

$$v = \frac{\lambda}{\tau} = \sqrt{gd}$$

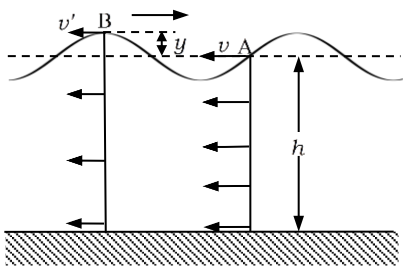
（訳者参考）**浅水波の速さ**

水深が波長と同程度か，それよりも水深の浅いところに生じる浅水波の速さを，一般的に求めてみよう。



この場合，浅水波は，同一鉛直面内にある水面から底までの水が同じ速さで左右に振動している波と見なすことができる（水底で振動する水に作用する摩擦力を無視する）。波の山の部分では，水は波の進行方向に，谷の部分では，水は波の進行方向と逆向きに動いている（右上図）。

波の進行方向を右向きとり，波とともに動く座標系で水の運動を考える。このとき，水は全体として左向きに動いており，平均の水深h の位置 A で水は左向きに波の速さv で動いている。波の山の頂点の位置 B（水深$h+y$）での水の速さをv'（$<v$）とする（右下図）。



水を**非圧縮性流体**とすると，どの断面でも単位時間あたり通過する水の量は等しいから，

$$(h+y)v' = hv$$

が成り立つ。ここで，y がh に比べて十分小さい（$y << h$）とすると，

$$v' = \frac{h}{h+y}v = \left(1+\frac{y}{h}\right)^{-1} v \fallingdotseq \left(1-\frac{y}{h}\right)v \tag{1}$$

と近似される。

次に，水の表面に沿った流線について，ベルヌーイの定理を適用する。浅水波の波長は長いので，水の表面張力は無視でき，水面の圧力はどこでも大気圧に等しく一定である。水の密度をρ，重力加速度の大きさをgとすると，ベルヌーイの定理は，

$$\frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{1}{2}\rho v'^2 + \rho g y \tag{2}$$

となる。(1)式を(2)式に代入して$\left(\frac{y}{h}\right)^2$の項を無視すると，

$$\rho \frac{y}{h} v^2 = \rho g y \qquad \therefore \quad v = \sqrt{gh} \tag{3}$$

を得る。(3)式が，水深hのところに生じる浅水波の速さを与える式である。このとき，波の速さvは，波の波長によらないことに注意しよう。

C.3（1.3 点）

波のエネルギー密度が振幅の 2 乗に比例するので，

$$E = kA^2 \qquad （A \text{ は振幅，} k \text{ は比例定数}）$$

エネルギー流量は一定なので，

$$Eva = E_0 v_0 a \qquad （a \text{：波の通過する面積}）$$

よって，

$$kA^2\sqrt{gd} = kA_0^2\sqrt{gd_0} \qquad \therefore \quad A = A_0\left(\frac{d_0}{d}\right)^{1/4}$$

この結果から，津波は海岸に近づくにつれて振幅が増加し，より間隔が狭くなることがわかる。