

# 物理チャレンジ2018

## 理論問題

2018年8月20日(月)

理論問題にチャレンジ 8:40~13:40

理論問題にチャレンジする前に下記の<注意事項>をよく読んでください。

問題は、大問4題からなります。問題は、一見難問にみえても、よく読むとわかるようになっています。どの問題から取り組んでも結構です。最後まであきらめずにチャレンジしてください。

### <注意事項>

1. 開始の合図があるまで問題冊子を開けないこと。また解答用紙にも手を触れないこと。
2. 問題冊子は18ページである。解答冊子は16枚である。
3. すべての解答は、解答用紙に記入すること。解答用紙の各ページに、必ずチャレンジ番号と氏名を記入すること。
4. 解答は、最終的な答えのみではなく、解答に至る道筋も詳しく記述すること。
5. 気分が悪くなったときやトイレに行きたくなったとき、または質問がある場合は旗をあげて監督者に知らせること。
6. チャレンジ開始から200分(3時間20分)経過するまでは、原則として、途中退出はできない。200分経過(12:00)後は、退出希望者は旗をあげて監督者に知らせ、すべての解答用紙(無解答の用紙も含む)は、チャレンジ番号・氏名の記入を確認の上、机の上に置いて退室すること。
7. 他の参加者の迷惑にならないように静粛に解答をすすめること。迷惑行為があった場合は退出させる。
8. 終了の合図があったら、ただちにすべての解答用紙(無解答の用紙も含む)は、チャレンジ番号・氏名の記入を確認の上、机の上に置いて、監督者の指示を待つこと。
9. 問題冊子ならびに計算用紙は、持ち帰ること。

## 第1問 (60点)

磁場中において2本のレールの上を滑る2本の金属棒の運動について考えよう。

図1のように、水平に固定されている2本の平行なレールの上を、2本の金属棒がレールと直角な関係を保ち電氣的に接触して摩擦なく滑ることができる。2本のレールの間隔は  $a$ 、各金属棒の質量は  $m$  である。また各金属棒の電気抵抗は  $R$  ( $R > 0$ ) で、レールの電気抵抗は無視できる。2本の金属棒ははじめ静止しており、その間隔は  $l$  である。なお金属棒とレールから構成される回路のインダクタンスは無視できるとする。

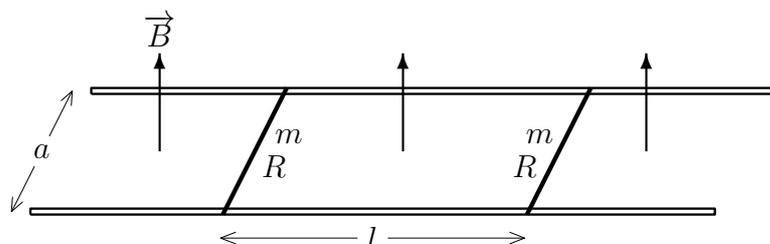


図1 磁場の向きは「下から上へ」の場合

- 問1 はじめ空間に磁場はなかったが、レールを含む面に垂直な方向に一様な磁場が加わり、その磁束密度の大きさ  $B$  が時間に比例して急激に増加し、微小時間  $\Delta t$  経ったときに  $B_0$  になった。この間、金属棒の移動はほとんど無視でき、間隔  $l$  は変わらないとする。この微小時間の間に金属棒を流れる電流の大きさ  $I$  を求めよ。
- 問2 電流を流す金属棒は磁場中で力を受ける。磁場が図1のように下から上へ加わったとしても、図1とは逆に上から下へ加わったとしても、金属棒に作用する力は、金属棒の間隔を広げる向きに作用するか、狭める向きに作用するかのいずれかである。力の方向が磁場の向きによらない理由を述べ、広げる向きか狭める向きか答えよ。
- 問3 この微小時間  $\Delta t$  の間に、各金属棒に作用する力積の大きさを求めよ。
- 問4 前問の力積を受けて2つの金属棒は対称的に動き出す。各金属棒が動き出す速さ  $v_0$  を求めよ。
- 問5 その後、空間の磁場の方向、磁束密度の大きさ  $B_0$  は一定に保たれた。初速度  $v_0$  で動き出した金属棒の速さが  $v$  になったとき、金属棒を流れる電流の大きさ  $I$  を求めよ。またこのとき金属棒に作用する力の大きさ  $F$  を求めよ。
- 問6 金属棒には電気抵抗があるので、電流が流れると熱エネルギーを発生する。このため金属棒の運動エネルギーは失われ、十分な時間が経つと金属棒は静止する。金属棒が動き始めてから静止するまでの間について、金属棒の運動方程式を書け。ただし金属棒の速度を  $v$ 、加速度を  $\frac{dv}{dt}$  とする。
- 問7 十分に時間が経って金属棒が静止したときの2つの金属棒の間隔を求めよ。
- 問8 2つの金属棒が静止するまでに金属棒で発生した全熱エネルギーを  $a, l, m, R, B_0$  を用いて表せ。
- 問9 以上では、問1に述べたように、磁束密度の大きさ  $B(t)$  は0から  $B_0$  まで、 $\Delta t$  の間に時間に比例して増加するとした。しかし、実は、磁束密度の大きさが0から  $B_0$  まで増加すれば、 $B(t)$  が時間に比例しなくても、金属棒が動き出す速さ  $v_0$  は問4の結果と同じである。この訳を説明せよ。

## 第2問 (100点)

人工衛星を打ち上げたロケットの残骸などのスペースデブリ(宇宙ゴミ)が地上500 km から40,000 km にわたり広がっている。観測されている直径10 cm以上のスペースデブリの数は約20,000個, 直径1 cmから10 cmの数は約500,000個に達する。

スペースデブリの分布を図1に示す。スペースデブリは地球周回軌道を秒速3~8 kmで飛んでおり, 中には人工衛星との相対速度が弾丸よりはるかに高速な10 km/s以上のものもある。もし10 cm級の大きなスペースデブリが衝突すれば, 人工衛星は完全に破壊されると予測されている。そのため, スペースデブリの軌道の観測が常時行われており, 衝突を回避するようにしている。同時に, スペースデブリを地上に向けて落したり, 地球重力圏外に放出したりする方法について, 研究が進められている。

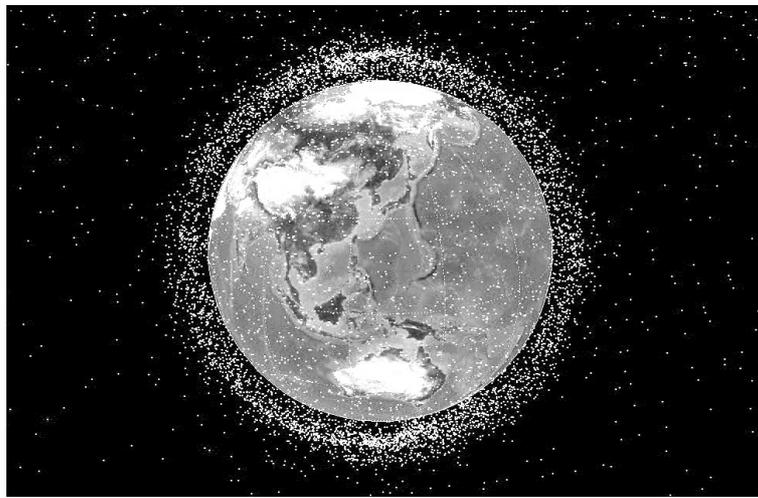


図1 <http://fanfun.jaxa.jp/faq/detail/338.html> から引用

この問題では, スペースデブリの運動を解析し, スペースデブリを除去する方法について考えてみよう(以下ではスペースデブリを単にデブリとも呼ぶ)。ただし, 地球は完全な球で, 外部の物体に働く重力(万有引力)は全質量が中心に集中している場合と等しいとする。また, 地球の半径を  $R_E = 6.4 \times 10^3$  km, 地表での重力加速度の大きさを  $g = 9.8$  m/s<sup>2</sup> とする。

### スペースデブリの軌道

スペースデブリは地球の重力により, 地球の中心を1つの焦点とする楕円軌道上を運動する(ケプラーの第1法則)。図2のように, 地球の中心Eを原点とし, 楕円軌道の長径(図2のQ'Q)の方向に  $x$  軸, 長径に垂直に  $y$  軸をとる。楕円のもう一つの焦点を  $E'$ , 長径の長さを  $2R (= \overline{QQ'})$  とすると, 焦点E,  $E'$  から楕円上の点Pまでの距離  $r = \overline{EP}$ ,  $r' = \overline{E'P}$ の間には次の関係がある。

$$r + r' = 2R \quad (1)$$

EPが  $x$  軸に対してなす角を  $\theta$  とすると, 点Pの座標  $(x, y)$  は

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (2)$$

と表すことができる。直交座標  $(x, y)$  に対して, 中心からの距離  $r$  と  $x$  軸から反時計回りの角度  $\theta$  を変数とする座標  $(r, \theta)$  を極座標と呼ぶ。

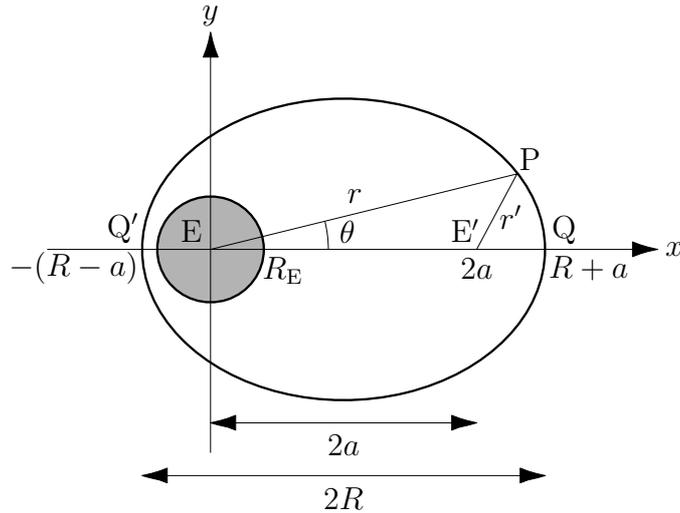


図 2

問 1 焦点 E, E' の距離を  $2a (= \overline{EE'})$  とすると, 式 (1) の楕円は極座標で

$$r = \frac{R^2 - a^2}{R - a \cos \theta} \quad (3)$$

と表されることを示せ。

式 (3) において  $\theta = 0$  または  $\theta = \pi$  とすると,  $\overline{EQ}$ ,  $\overline{EQ'}$  の長さが次のように表されることがわかる。

$$\overline{EQ} = R + a, \quad \overline{EQ'} = R - a$$

スペースデブリに地球から働く力は, 地球の中心 E に向き, その大きさは E からの距離  $r$  ( $> R_E$ ) の 2 乗に反比例する。スペースデブリの質量を  $m$  とすると, 地球の中心から距離  $r$  の点 P にあるスペースデブリに働く力の大きさは, 地表における重力加速度の大きさ  $g$ , 地球の半径  $R_E$  を使って

$$F = mg \left( \frac{R_E}{r} \right)^2$$

と書ける。スペースデブリの加速度の  $x, y$  成分は  $\left( \frac{d^2x(t)}{dt^2}, \frac{d^2y(t)}{dt^2} \right)$  であり, 力の  $x, y$  成分は  $(-F \cos \theta, -F \sin \theta)$  であるから, スペースデブリの運動方程式の  $x$  成分,  $y$  成分は次のようになる。

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -mg \left( \frac{R_E}{r} \right)^2 \frac{x}{r} \quad (4a)$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg \left( \frac{R_E}{r} \right)^2 \frac{y}{r} \quad (4b)$$

問2 (a) スペースデブリの運動エネルギー  $K$  は次の式で与えられる。

$$K = \frac{m}{2} \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \right]$$

運動エネルギーの時間変化について

$$\frac{dK}{dt} = -mg \left( \frac{R_E}{r} \right)^2 \frac{dr}{dt}$$

が成り立つことを運動方程式から導け。

(b) 地球の重力(万有引力)による位置エネルギーは、無限遠を基準として次のように表すことができる。

$$U = -\frac{mgR_E^2}{r}$$

このことを用いて、全エネルギー  $W = K + U$  が保存される(一定である)ことを示せ。

次に、スペースデブリの軌道について、面積速度の保存則(面積速度が一定であること、ケプラーの第2法則)を運動方程式(4a), (4b)から導く。面積速度とは、図3で、 $EP$ ,  $EQ$ , および軌道  $\widehat{QP}$  で囲まれた灰色部分の面積  $S$  の時間的増加率である。微小時間  $\Delta t$  の間にデブリが  $P$  から  $P'$  に移動して角  $\theta$  が  $\theta + \Delta\theta$  に増加するときの  $S$  の増加  $\Delta S$  は近似的に  $\frac{1}{2}r^2\Delta\theta$  であるから、面積速度を  $\dot{S}$  と書くと

$$\dot{S} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} \tag{5}$$

と表される。

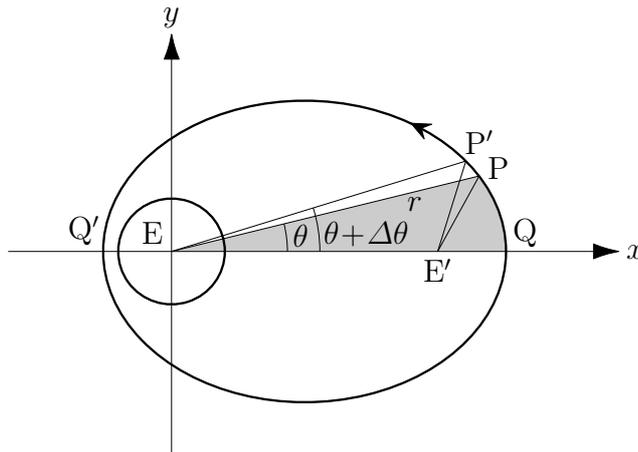


図3

問3 (a)  $(x, y)$  と  $(r, \theta)$  の関係 [(2) 式] に注意して, 次の式を示せ。

$$2\dot{S} = x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}$$

(b) 運動方程式 (4a), (4b) を用いて面積速度の保存則

$$\frac{d\dot{S}}{dt} = 0$$

を導け。

(c) 運動エネルギー  $K$  が次のように表されることを示せ。

$$K = \frac{m}{2} \left[ \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \left( r \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = \frac{m}{2} \left[ \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \left( \frac{2\dot{S}}{r} \right)^2 \right]$$

問4 全エネルギー  $W = K + U$ , 面積速度  $\dot{S}$  と, 楕円軌道の長径  $2R$ , 焦点間距離  $2a$  との間には, 次の関係があることを示せ。

$$2R = -\frac{mgR_E^2}{W} \quad (6)$$

$$2a = \left[ \left( \frac{mgR_E^2}{W} \right)^2 + \frac{8m(\dot{S})^2}{W} \right]^{1/2} \quad (7)$$

[ヒント] スペースデブリが  $Q$  または  $Q'$  にあるときは,  $\frac{dr}{dt} = 0$  である。

問5 デブリの近地点は図2の  $Q'$  である。地表から近地点までの距離  $d$  を  $m, g, R_E, W, \dot{S}$  で表せ。

軌道を変えることによるスペースデブリの除去

スペースデブリの速さは遠地点でもっとも小さくなるので, 遠地点において適当な力積を加え軌道を変えることによってスペースデブリを除去することが考えられる。これには, 地球の大気圏に突入させる方法と, 地球の重力圏から出す方法がある。以下ではこれらについて調べて比較する。

簡単のために, スペースデブリの軌道は半径  $R_0$  の円軌道で, 速さは  $v_0$  であるとする。また, このとき, 全エネルギーを  $W_0$ , 面積速度を  $\dot{S}_0$  とする。

問6 全エネルギー  $W_0$  を  $m, g, R_0, R_E$  で, 面積速度  $\dot{S}_0$  を  $v_0, R_0$  で, それぞれ表せ。

スペースデブリの減速と大気圏への突入

図4のように, 点  $Q$  において, スペースデブリは  $y$  方向の速度をもつ。点  $Q$  において, スペースデブリに  $-y$  方向に力積を与えて軌道を破線のような楕円軌道とし, 近地点  $P$  に達したときに大気圏に突入させるとしよう。

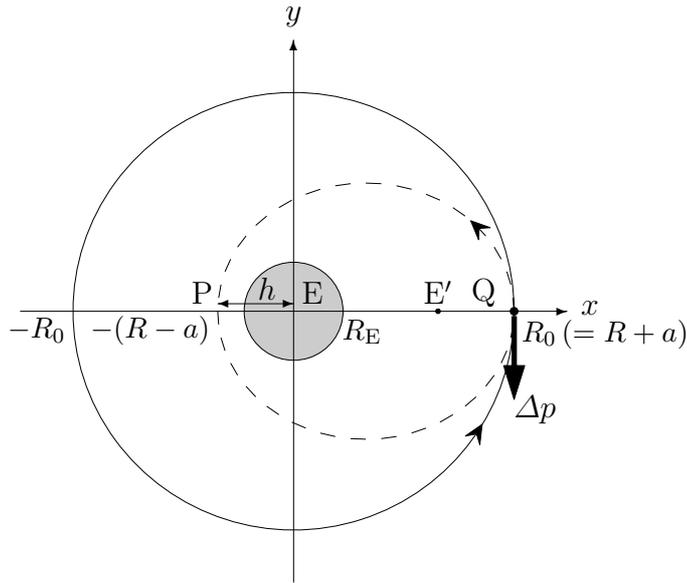


図 4

点 Q において，スペースデブリに与える  $-y$  方向の力積の大きさを  $\Delta p$  とする ( $y$  方向の運動量は  $-\Delta p$  だけ変化する)。力積を受けた後の楕円軌道の長径 PQ の長さを  $2R$ ，2つの焦点 E, E' の距離を  $2a$ ，全エネルギーを  $W$ ，面積速度を  $\dot{S}$  とすると， $R, a, W, \dot{S}$  の間には問 4 の (6), (7) が成り立っている。

問 7 大気圏に突入させるために必要な力積の大きさ  $\Delta p$  を求めよう。

(a)  $(\dot{S})^2$  を  $R, a, g, R_E$  で表せ。

(b) 近地点 P が地球大気の上限より低くなれば大気圏に突入したと考える。大気圏の上限と地球の中心 E との距離を  $h$  とするとき， $\frac{\Delta p}{mv_0}$  を円軌道の半径  $R_0$  と  $h$  で表せ。

[ヒント]  $R_0$  と  $h$  は  $R$  と  $a$  により  $R_0 = R + a, h = R - a$  と書ける。また，力積を受ける前後の面積速度の比  $\frac{\dot{S}}{\dot{S}_0}$  は  $\frac{\Delta p}{mv_0}$  を使って  $\frac{\dot{S}}{\dot{S}_0} = 1 - \frac{\Delta p}{mv_0}$  と表せる。

問 8 デブリの質量  $m$  が  $1.0 \text{ kg}$ ，円軌道の半径  $R_0$  が  $7.0 \times 10^3 \text{ km}$  であるとする。

(a) 地表から大気圏の上限までの距離 (高度) を  $1.0 \times 10^2 \text{ km}$  とする。デブリの近地点がこの高度になるために必要な力積の大きさを求めよ。

(b) 力積を受けた前後のデブリの速さの差および力積を受けた直後のデブリの速さを求めよ。

### スペースデブリの加速と重力圏外への打ち出し

次に，スペースデブリを加速して，地球の重力圏外に出す方法について考える。

問 9 図 5 のように，半径  $R_0$  の円軌道にある速さ  $v_0$  のデブリに，点 Q で回転方向 ( $y$  方向) に力積を与えて加速し，全エネルギー  $W$  を 0 として重力圏外へ出したい。  $W = 0$  とするための力積を加えた直後の速さを  $v_1$  とするとき， $\frac{v_1}{v_0}$  を求めよ。

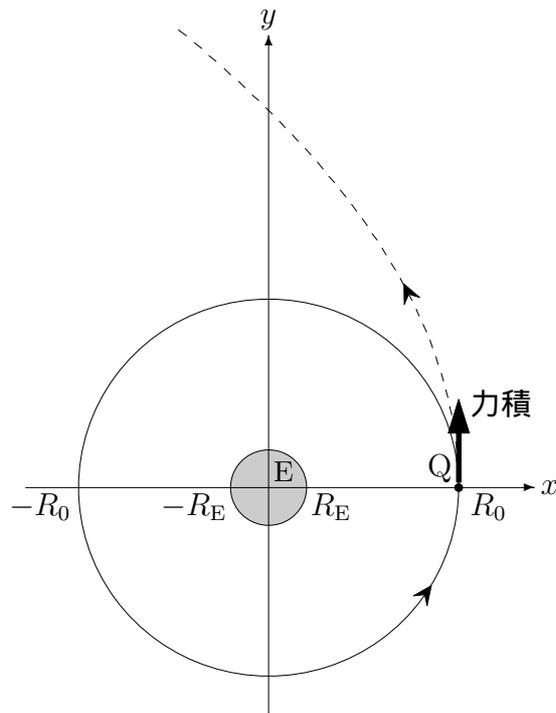


図 5

地球の重力による円軌道のうち，24 時間で地球の自転と同じ向きに一周する軌道 (静止衛星の軌道) を静止軌道と呼ぶ。

- 問 10 (a) 静止軌道の半径  $R_0$  の数値を求めよ。  
 (b) 質量が  $1.0 \text{ kg}$  のデブリが静止軌道にある場合，全エネルギーを 0 にして重力圏外に出すために必要な力積の大きさの数値を求めよ。

## 2 つの方法の比較

問 7 と問 9 により，円軌道にあるスペースデブリに対して，大気圏に突入させる方法と重力圏外に出す方法のそれぞれに必要な力積の大きさがわかる。

- 問 11 円軌道の半径  $R_0$  が与えられたとき，大気圏に突入させる方法と重力圏外に出す方法のどちらが適当であるかについて述べよ。ただし，大気圏に突入させる場合，地表からの高度を  $1.0 \times 10^2 \text{ km}$  とすればよいとする。また，考察する現象はこの問題で考えた範囲でよい。

### 第3問 (70点)

我が国のエネルギー総消費量のうち約半分はものづくり，あと半分は日々の暮らしにつかわれている。日々の暮らしのうち家庭やオフィスの暖房・給湯や冷房・冷蔵と照明に使われているのはそのうち約6割に達する。これらを効率よく行うことは重要である。このうち暖房・給湯および冷房・冷蔵を行う装置としてヒートポンプがある。これは仕事を与えて低温熱源から高温熱源に熱を移動する装置であり，すでに我々の日常生活ではエアコンや給湯機としてほぼすべての家庭・オフィスに存在する。これは熱(不規則な運動)と仕事(規則的な運動)のあいだのエネルギー変換であり，熱力学の問題である。また以下の考察で重要な役割をはたす物理量エントロピーの物理的な意味についての理解を深める。

[I]

一般に熱エネルギーを仕事に変換する装置を熱機関(図1(a))と呼ぶ。一方，仕事を加えて加熱または冷却といった熱の移動をおこなう装置をヒートポンプ(図1(b))と呼ぶ。これらは高温熱源と低温熱源の間で以下に述べる作業物質を用いて循環過程(Cycle: C)を繰り返す。ヒートポンプは効率よく温度差をつくる装置といってもよい。この問題では我々の日々の暮らしに重要な暖房・給湯および冷房・冷蔵の問題の物理を統一的に理解するためにヒートポンプの物理を取り上げよう。

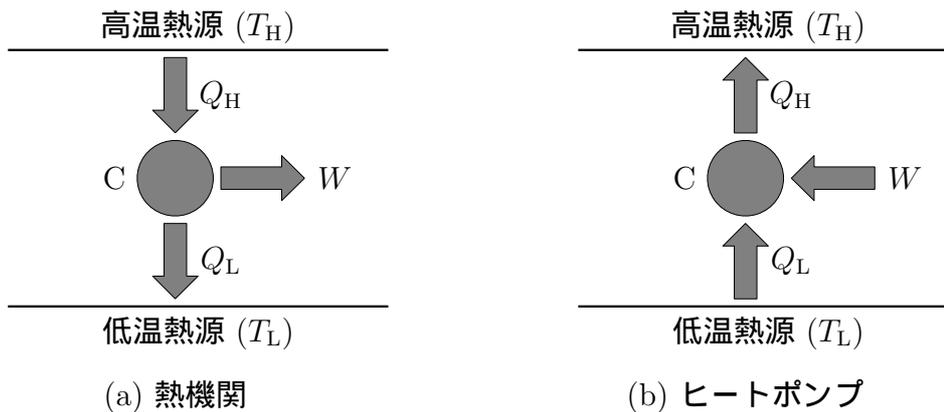


図1 熱機関とヒートポンプ

これからしばらく理想化したヒートポンプを考える。例として，滑らかに動くピストンで気体を閉じこめた図2のようなシリンダーを考える。左側の壁は熱を通すことができ，それを一定温度の熱源に接触させることによりシリンダー内の気体の温度を制御できるものとする。シリンダーの側壁やピストンは熱を通さない断熱材でできているものとする。この気体のように熱機関やヒートポンプで使われる物質を作業物質という。

シリンダーの中の気体の状態は圧力  $P$ ，体積  $V$ ，絶対温度  $T$  (以下単に温度という。なお  $0^\circ\text{C} = 273\text{K}$  である。) で指定される。この気体がもつエネルギーを内部エネルギー  $U$  と呼ぶ。気体の内部エネルギー  $U$  は気体の状態を指定すれば決まる物理量で， $P, V, T$  と同様に状態量である。気体の状態がどのような道筋を経て変化してもそれが始めの状態に戻れば，状態量の値は始めの値に戻る。ある系が状態変化をしたとき「この系の状態量である内部エネルギーの変化  $\Delta U$  はその状態変化の間にこの系に吸収された熱量  $Q$  と外部からなされた仕事  $W$  の和に等しい ( $\Delta U = Q + W$ )」。これを熱力学第1法則と呼ぶ。熱はエネルギーの一形態であり，この法則はエネルギーの保存則に他ならない。

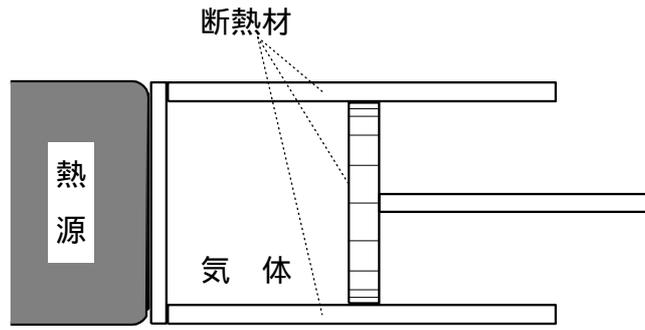


図2

ヒートポンプは図3の  $PV$  図において、シリンダーの中の作業物質としての気体に外部から仕事  $W (> 0)$  を行い、低温熱源 (温度  $T_L$ ) から熱  $Q_L$  を汲み上げ、高温熱源 (温度  $T_H$ ) に熱  $Q_H$  を放出するサイクルである。熱機関では図3において気体の状態変化の循環過程は時計まわりに行われるが、ヒートポンプでは反時計まわりに行われる。具体的には気体はAの始状態から出発し、B、C、Dを経由して次の4つの準静的過程 (状態の変化が平衡状態から極めてわずかしかずれないような“ゆっくり”した変化の過程) を経て始状態Aに戻る。

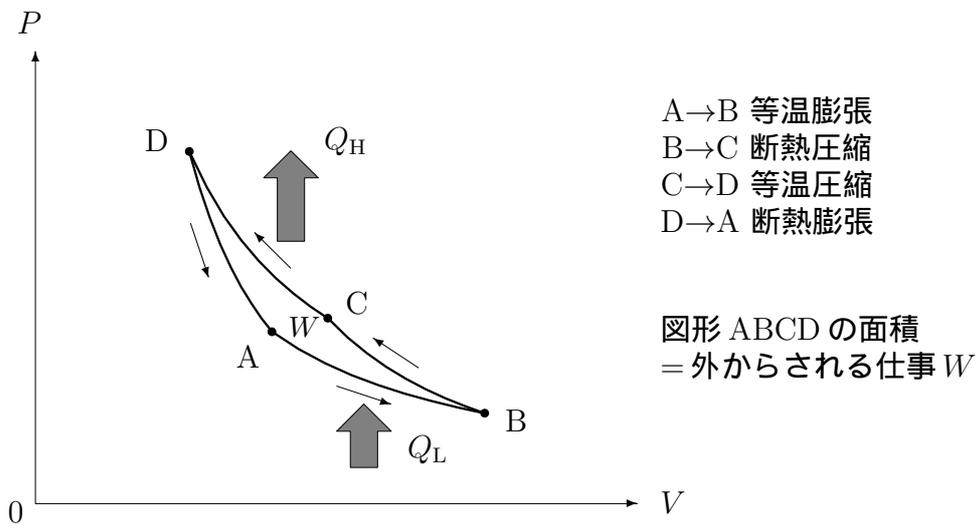


図3 ヒートポンプ

- A → B: シリンダーの左側の壁を低温熱源 (温度  $T_L$ ) に接触させ、気体の温度を  $T_L$  に保ったまま等温膨張させる。このとき気体は正の熱量  $Q_L$  を吸収する。
- B → C: シリンダーを熱源から離し、気体を断熱的に圧縮し、温度を  $T_H$  まで上げる。
- C → D: シリンダーの左側の壁を高温熱源 (温度  $T_H$ ) に接触させ、気体の温度を  $T_H$  に保ったまま、等温圧縮する。このとき気体は正の熱量  $Q_H$  を放出する。
- D → A: シリンダーを熱源から離し、気体を断熱膨張させ、温度を  $T_L$  まで下げる。

ヒートポンプの場合、シリンダー中の気体は  $A \rightarrow B$ ,  $D \rightarrow A$  の膨張過程では外部に仕事をし、 $B \rightarrow C$ ,  $C \rightarrow D$  の圧縮過程では外部から仕事をされる。この差し引きが気体に対して外部からされた正味の仕事  $W$  であり、図3の図形 ABCD の面積で表される。なおサイクルの各

過程での変化が準静的過程であれば可逆サイクルといわれる。ヒートポンプの1サイクルの間の、気体の内部エネルギーの変化  $\Delta U$  を  $Q_H, Q_L, W$  で表せば

$$\Delta U = Q_L + W - Q_H$$

である。内部エネルギー  $U$  が状態量であることを考慮すれば、気体は始めの状態に戻っているから  $\Delta U = 0$  であるので

$$Q_L + W = Q_H \quad (1)$$

が成り立つ。

高温の物体と低温の物体とを接触させると、やがて2つの物体は同じ温度になるが、熱が逆の方向に流れて物体の温度がもとに戻ることはない。すなわち、温度差のある2物体の間の熱の流れは不可逆な過程である。われわれはこれと類似のことを多く経験している。前述の準静的な変化は可逆過程であるが、これはある種の理想化である。熱現象の不可逆性はクラウジウスとトムソン(後のケルビン卿)により研究され、熱力学第2法則として以下の互いに同等な2つの原理として記述される。

#### クラウジウスの原理

「低温の物体(低温熱源)から高温の物体(高温熱源)に熱を移すほかに、外に対して何も変化を残さないような過程は不可能である」

#### トムソンの原理

「一つの熱源から熱をとり、外に対して正の仕事をするだけでほかに何も変化をもたらない過程は不可能である」

クラウジウスはこの不可逆性を定量的に記述するために以下のように定義されるエントロピー  $S$  を導入し、 $S$  が状態量である(状態によって決まった値をもち、その状態の履歴には依存しない)ことを示した。温度  $T$  の系が熱量  $\Delta Q$  を吸収したとき、この系のエントロピーの変化  $\Delta S$  は次式で与えられる。

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} \quad (2)$$

また温度の異なるいくつかの部分からなる系のエントロピーは各部分のエントロピーの和である。

「閉じた系(熱の出入りも、物質の出入りもない系)ではエントロピーは増大するか不変にとどまり、減少することはない。」これをエントロピー増大の法則という。したがって、断熱膨張過程や断熱圧縮過程が準静的におこなわれれば、可逆的なのでエントロピーは変化しないが、不可逆的であればエントロピーは増大する。詳しい議論によるとエントロピー増大の法則は熱力学第2法則のもう一つの表現になっている。

ここで、ヒートポンプの循環過程に戻ろう。ヒートポンプの1サイクルの間の各過程が準静的にすなわち可逆的に行われるとき、1サイクルの間の気体のエントロピーの増減を考慮すると、エントロピー変化  $\Delta S$  は

$$\Delta S = \frac{Q_L}{T_L} - \frac{Q_H}{T_H} \quad (3)$$

となる。エントロピーは状態量であり，系は始めの状態に戻るから  $\Delta S = 0$  である。すなわち，

$$\frac{Q_L}{T_L} = \frac{Q_H}{T_H} \quad (4)$$

なる関係式が得られる。

問1 室内を低温熱源，屋外を高温熱源として，ヒートポンプを冷房装置として使う。一般的に，冷房装置の冷却の効率を  $\varepsilon_r = \frac{Q_L}{W}$  と定義し (r: refrigeration 冷却)，特に可逆的なヒートポンプの冷却の効率を  $\eta_r$  とする。上記の関係を用いて， $\eta_r$  を温度  $T_H, T_L$  のみで表せ ( $\varepsilon, \eta$  はギリシャ文字でそれぞれイプシロン，イータ)。

ここまでは循環過程のすべての過程が可逆過程であると仮定してきた。現実には摩擦等の不可逆性により状態変化の過程でエントロピーがつねに生成される。これを考慮すると一般的なヒートポンプの冷却の効率は，可逆的なヒートポンプに比較してつねに小さく，可逆的なヒートポンプは理想的な冷却装置であることを示すことができる。すなわち不等式

$$\varepsilon_r < \eta_r \quad (5)$$

が一般的に成立する。なおここで議論している可逆サイクルは逆カルノーサイクルとも呼ばれており， $\eta_r$  はヒートポンプの冷却効率の理論的な上限であることが知られている。

問2 (a) 屋外を温度  $35.0^\circ\text{C}$  の高温熱源とし，室内を温度  $25.0^\circ\text{C}$  の低温熱源とするとき，冷却の効率の理論的上限  $\eta_r$  を計算せよ。室内の温度を高め設定し， $28.0^\circ\text{C}$  に変更したとき冷却の効率の理論的上限  $\eta_r$  はどのように変化するか。  
(b) また室内から毎秒  $1000\text{ J}$  の熱を取り出すための必要な最小の電力はそれぞれ何 W か。

ここまでの考察は暖房・給湯の場合にも基本的には同様に成り立つ。暖房を例にとれば室内を高温熱源，屋外を低温熱源と考えればよい。一般に暖房の際の加熱の効率を  $\varepsilon_h = \frac{Q_H}{W}$  とし，可逆的なヒートポンプの暖房の際の加熱の効率を  $\eta_h$  とすれば (h: heating 加熱)，冷房・冷蔵のときと同じく不等式

$$\varepsilon_h < \eta_h \quad (6)$$

が成り立つ。

問3 (a) 関係式  $\eta_h = \eta_r + 1$ ， $\varepsilon_h = \varepsilon_r + 1$  が成り立つことを示せ。  
(b) 可逆的なヒートポンプの  $\eta_h$  を  $T_H, T_L$  で表せ。

問4 室温を  $25.0^\circ\text{C}$ ，屋外の気温を  $5.0^\circ\text{C}$  としたとき毎秒  $1000\text{ J}$  のエネルギーを屋外からくみ取り室内の暖房に使用する。このために最小何 W の電力が必要か。この結果毎秒何 J の熱エネルギーが室内にもちこまれるか。

問5 一般に夏季の冷房より冬季の暖房のほうがエネルギーの消費量 (すなわち電力消費量) が多いといわれる。これまでの議論を参考にして，この理由について考察せよ。

我々が日常生活している温度は  $T \approx 300\text{ K}$  の近傍であり，ここまで考えた問題では高温熱源と低温熱源の温度もそれに近い温度領域にある。一方，ヒートポンプは冷却能力をもっている。可逆なヒートポンプを用いて  $T \approx 300\text{ K}$  の状態から極低温の状態を生成する場合を考察してみよう。

- 問6 (a)  $T = 10 \text{ K}$  の低温熱源から毎秒  $1000 \text{ J}$  の熱をくみ出し,  $T = 300 \text{ K}$  の高温熱源に移動させるとき,  $\eta_r$  を計算せよ。
- (b) このときこれを実行するために必要な最小の電力は何  $\text{W}$  か。また高温熱源にもちこまれる熱エネルギーは毎秒何  $\text{J}$  か?
- (c) 極低温を目指して高温熱源と低温熱源の温度差を増大させると熱の移動に必要な仕事量に関してどのような傾向が生ずるか。ここで扱った場合の  $\eta_r$  の値の変化に注目して考察せよ。

参考：ヒートポンプの効率を実用上はエネルギー消費効率 (Coefficient of Performance : 略称 COP, または成績係数ともいう) と呼び, 我々が日常, 家庭で使用しているエアコンの性能を示す重要な指標である。現在市販されているエアコンのエネルギー消費効率は 6 程度で, 可逆的なヒートポンプの効率 [(5), (6) 式参照] に比べてかなり低い。エネルギーの有効利用のためにはヒートポンプの効率をそれらの理論的上限に近づける (すなわち, 不可逆性に起因する損失を減らす) 技術的な側面からの努力が必要である。

## [II]

ここまでは我々の日常生活に直結したエネルギー消費の問題を熱力学の応用問題としてとらえ, 熱力学の基本的法則すなわち, エネルギー保存に基づく熱力学第 1 法則, 不可逆過程の存在に基づく熱力学第 2 法則, 特に, エントロピー  $S$  なる状態量を導入 [(2) 式参照] することによりこの問題を考察してきた。ここで, エントロピー  $S$  の物理的内容の理解をさらに深めるために, 我々が身近に経験する 2 つの不可逆過程の例

- 1) 高温物体から低温物体への熱の移動
- 2) 気体の混合

についてエントロピーの変化を考察しよう。なお 2 つの系があるとき, 全体のエントロピーはそれぞれのエントロピーの和である。

問7 温度  $T_H$  と温度  $T_L$  ( $T_H > T_L$ ) の 2 つの物体を短時間接触させたところ微小な熱  $Q$  が高温の物体から低温の物体に移動した。

- (a) このとき 2 つ物体の全体のエントロピー変化  $\Delta S$  を  $T_H, T_L, Q$  で表せ。ただしこれらの物体の熱容量は十分大きく, 両物体の温度は変わらないものとする。また, つねに  $\Delta S > 0$  であることを説明せよ。
- (b)  $T_H = 300 \text{ K}, T_L = 273 \text{ K}, Q = 100 \text{ J}$  の場合に  $\Delta S$  を計算せよ。

問8  $n$  モルの理想気体がある。その定積熱容量を  $C_v$  とする。

- (a) 体積  $V$  を一定にして温度を  $T$  から  $T + \Delta T$  まで微小変化させるとき, 理想気体に加わる熱量はいくらか。
- (b) 体積を一定値  $V_0$  に保って, 温度を  $T_0$  から  $T$  にゆっくり, すなわち準静的に変化させた。温度  $T$ , 体積  $V$  のときのエントロピーを  $S(T, V)$  で表すと, このときのエントロピー変化が次の式で与えられることを説明せよ。

$$S(T, V_0) - S(T_0, V_0) = C_v \log \frac{T}{T_0}$$

- (c) 次に温度  $T$  , 体積  $V_0$  から温度を一定に保って , 体積  $V$  に準静的に変化させた。このときのエントロピー変化が次の式で与えられることを説明せよ。

$$S(T, V) - S(T, V_0) = nR \log \frac{V}{V_0}$$

ここで  $R$  は気体定数 ( $R = 8.314 \text{ JK}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ ) である。

前問の結果から , 温度  $T_0$  , 体積  $V_0$  の状態から温度  $T$  , 体積  $V$  の状態へ準静的に変化させるときのエントロピーの変化  $\Delta S$  は次式で与えられることがわかる。

$$\Delta S = S(T, V) - S(T_0, V_0) = C_v \log \frac{T}{T_0} + nR \log \frac{V}{V_0} \quad (7)$$

図4の左側のように , 箱を衝立で仕切り , 2種類の理想気体 A , B がそれぞれ容積  $V_A$  ,  $V_B$  の容器にはいつているとしよう。それぞれのモル数は  $n_A$  ,  $n_B$  であり , 温度は  $T$  で等しく , 体積とモル数は比例する ( $\frac{n_A}{V_A} = \frac{n_B}{V_B}$ ) とする。従って気体 A , B の圧力は等しい。

図4の右側のように , A , B を隔てる壁を取り除くと A , B の分子は混じりあい , どちらの分子も体積  $V_A + V_B$  のなかに一様に分布する。このときこの系のエントロピーはどのように変化するのであろうか。

問9 理想気体では気体分子間の相互作用はない。複数種の気体の混合であっても理想気体として扱うならば , それぞれ気体は他種の気体の存在と関係なく振る舞う。これらを考慮して , 混合したときのエントロピーの変化を求めよう。ここで理想気体 A , B のエントロピーを  $S_A$  ,  $S_B$  と表す。

- 理想気体 A に着目すると , 温度は一定で体積が準静的に  $V_A$  から  $V_A + V_B$  に変化した。このときの  $S_A$  の変化  $\Delta S_A$  を求めよ。
- 理想気体 B に着目すると , 温度は一定で体積が  $V_B$  から準静的に  $V_A + V_B$  に変化した。このときの  $S_B$  の変化  $\Delta S_B$  を求めよ。
- この気体の混合によるエントロピー変化  $\Delta S$  は上記エントロピー変化  $\Delta S_A$  と  $\Delta S_B$  の和で与えられる。混合によるエントロピーの変化  $\Delta S$  をモル数  $n_A$  ,  $n_B$  により表せ。  $n_A$  ,  $n_B > 0$  であれば , これが正であることを示せ。
- 理想気体の混合の際のエントロピー変化  $\Delta S$  を  $n_A = n_B = 1.0 \text{ mol}$  の場合について計算せよ。混合の際のエントロピーの増加  $\Delta S$  は混合のエントロピーと呼ばれる。

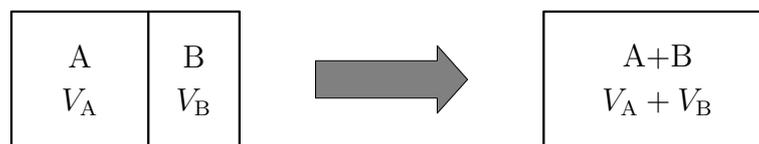


図4 理想気体の混合

ここで取り上げた2つの不可逆過程においてはエントロピーが増加することがわかる。さらにここで考えた2つの系からなる系全体を孤立系とみなせばエントロピー増大の法則が成立していることが理解できる。

## 第4問 (70点)

空間の一点における状態変化が次から次へと周囲に伝わる現象を波または波動という。波動が伝わる媒体を媒質という。我々を取り巻く自然界には媒質の違いにより様々な波動が存在する。たとえば、水の波や音波などはその例である。また、波として伝わる振動の方向と波の伝搬する方向が一致するような波動を縦波といい、音波は縦波の代表的な例である。一方、振動方向と波の伝搬する方向が直角になっているような波を横波と呼び、光や電波は横波の例である。また、水の表面を伝わる波のように、縦の運動と横の運動が重ね合わされた2次元的な運動で特徴づけられる波もある。海岸で波の突っ立ち現象や波頭が崩れて白波となるような光景もしばしば目にする。以下では、最初に海岸線近傍での津波のような波の振る舞いについて考え、次に振幅が大きくなる場合に生じる波(このような波を有限振幅波と呼ぶ)と波の突っ立ち現象、さらに特殊な波動現象である潮津波<sup>しおつなみ</sup>についても考えてみよう。

### 1. 海岸線付近および川をさかのぼる波の振る舞い

ここでは、深海領域から水深が浅くなる海岸線に向かって打ち寄せる津波がどのような振る舞いをするのか考えてみよう。具体的には、海底の地形や海岸線の構造などに依存して、波高の増幅や屈折などが生じ、結果としてエネルギーの集中が起こることも考えられる。このような複雑なふるまいについて簡単なモデルで考える。なお、波の振幅は十分に小さいとする。

図1に示されたように、海の深いところから浅瀬に向かって波がやってくると、波の波面が次第に海岸線に平行になってくることが観測される。水波には、いくつかの種類があるが、ここでは、深さに対して波長が十分に長い場合の波で、進行する速さ  $v$  が、水面から海底までの深さを  $h$ 、重力加速度の大きさを  $g$  として、 $v = \sqrt{gh}$  で与えられる波について考える(このような波を浅水波と呼ぶ)。

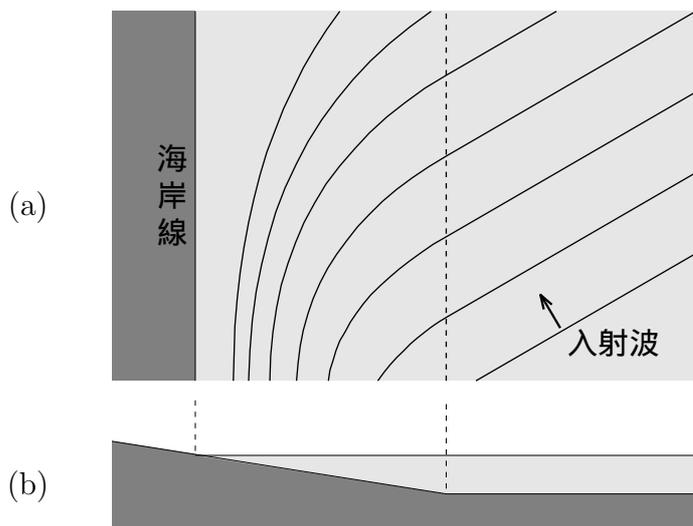


図1 (a) 海岸近くでは入射波の波面が海岸線に平行になってくる。  
(b) 海岸付近の海底の水深変化の断面図。

問1 図2に示すように水深が階段状になるところに入射する正弦波を考える。深い側と浅い側の水深をそれぞれ  $h_0, h_1$  とする。

- (a) 入射角  $\theta_0$  と屈折角  $\theta_1$  および水深の関係 (スネルの法則) を表せ。  
 (b) 図1のように、海岸付近では徐々に水深が浅くなっているとき、海岸に近づくにつれて波面が海岸線に平行になるのはどうしてかを簡単に説明せよ。

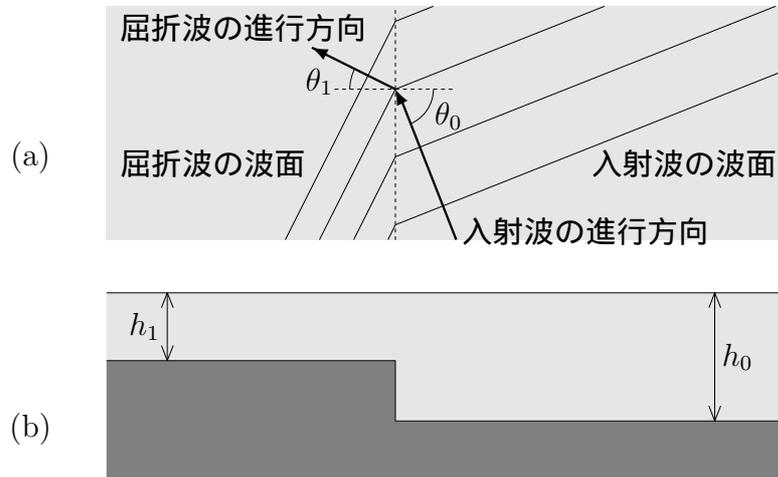


図2 (a) 屈折が起こる地点での入射波および屈折波の波面 (上から見た図)。  
 (b) 水深が階段状に変わる海底の断面図。

ここで考えている波の場合、鉛直上方から見たとき、水平面の単位面積あたりの波の平均エネルギーは、水の密度を  $\rho$ 、水面の振動の振幅を  $a$  とすると、

$$T = \frac{1}{2} \rho g a^2 \quad (1)$$

で与えられる。また進行方向に垂直な (水平面上の) 単位長を通して単位時間に波によって運ばれるエネルギー (エネルギー流量) は  $E = vT$  である。

図3のように、川幅が上流に向かって次第に狭くなり、水深も緩やかに浅くなるような場合に、上流に向かう波がどのように振る舞うであろうか。波の波長に比べて川幅や水深の変化は十分にゆっくりであり、波の反射は無視できるものとする、川幅、水深、波の振幅がそれぞれ、 $B_0$  から  $B$  に、 $h_0$  から  $h$  に、 $a_0$  から  $a$  に変化するとき、これらの間には次のグリーンの法則

$$\frac{a}{a_0} = \left( \frac{h_0}{h} \right)^{1/4} \left( \frac{B_0}{B} \right)^{1/2} \quad (2)$$

が成り立つことが知られている。

問2 エネルギー流量の保存を考えてグリーンの法則を導け。密度  $\rho$  は一定とする。

問3 外洋の潮汐は河口域に振動を起こし、大潮の時などにこれらの振動が河川をさかのぼって進行する現象が観測されている。アマゾン川や揚子江では800 km 以上の上流でもこのような波が観測されている。河口での川幅2.0 km、水深10 mの地点で振幅1.0 mの波が河をさかのぼることを仮定した場合、グリーンの法則が成り立つとして、川幅1.0 km、水深5.0 mの地点では、何 mの振幅の波になるかを求めよ。

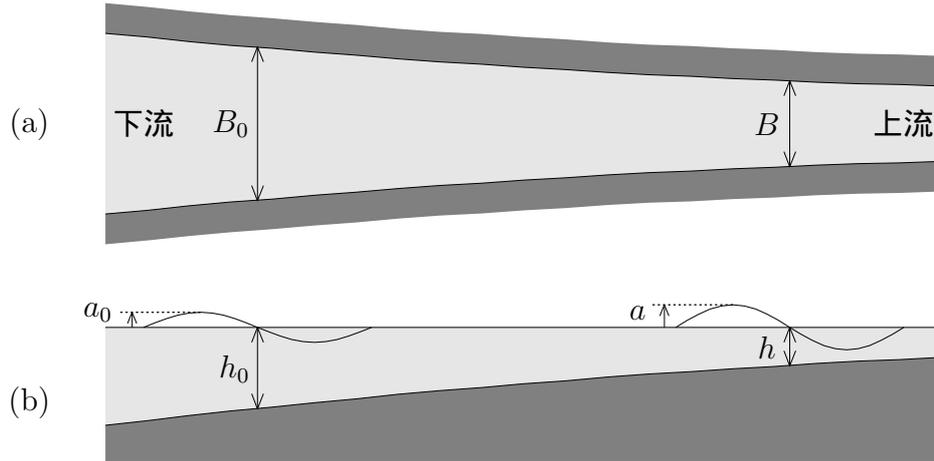


図3 (a) 河の特定の2点での川幅(上から見た図)。  
 (b) 水深および波高(横から見た図)。

ここまでの考察の範囲では、波の特徴的な長さ(波長)が深さ  $h$  に比べて十分長く、波の速さが  $\sqrt{gh}$  で与えられる場合、深さや幅が一定ならば正弦波でなくても同じ波形のまま波は進む。

一方、実際の津波では、深さや幅が一定でも、進行するにつれて階段状の波に変形することがある。この違いの原因は、上の考察では、波動の高次の振幅依存性(非線形効果)や摩擦などの効果を無視しているためである。次に、振幅依存性効果と波の変形の関係の一例を考えてみよう。

## 2. 有限振幅効果による波の変形

一定の深さ  $h$  の水があるとき、深さにくらべて波長の長い波(浅水波)では、 $x$  方向に進む正弦波による媒質の  $x$  方向の振動の速度  $u$ 、水面の高さの変化  $\Delta h$  は次のように表される。

$$u = v \frac{a}{h} \sin(kx - \omega t) \quad (3)$$

$$\Delta h = a \sin(kx - \omega t) \quad (4)$$

ここで、 $a (> 0)$  は  $\Delta h$  の振幅、 $\omega$  は角振動数であり、波長を  $\lambda$  とすると  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  である。また、振幅は十分小さいとする。水の密度は一定値  $\rho$  であり、波がないとき、水は静止している。

この波の波面は  $x$  方向に速さ  $v = \frac{\omega}{k}$  で進む。この波が式(3)、(4)で表される座標系を  $S$  系とし、 $S$  系に対して  $x$  方向に速さ  $v$  で動く座標系を  $S'$  系とする。 $S'$  系での( $x$  方向の)座標を  $X$  と書くと、 $X = x - vt$  であるから、 $S'$  系ではこの波は次のように表される。

$$(\text{水の速度}) = v \frac{a}{h} \sin kX - v \quad (5)$$

$$(\text{水面の高さ}) = h + a \sin kX \quad (6)$$

これらを描くと図4のようになる。

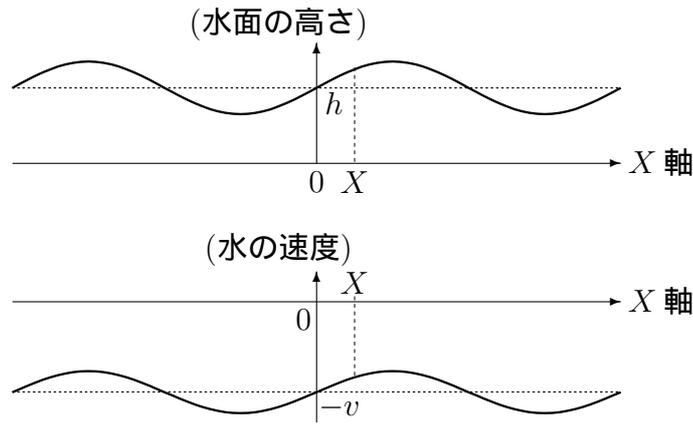


図4 座標系  $S'$  で見た水の波

まず,  $S$ 系において, 式(3)と(4)からグリーンの法則の導出に用いた式(1)が導かれることを確かめよう。

問4 波に伴うエネルギーとしては運動エネルギーと位置エネルギーがあることに注意して, 波の平均エネルギーの式(1)が成り立つことを示せ。ただし,  $\sin^2(kx - \omega t)$  の平均は  $\frac{1}{2}$  であることを用いよ。

次に,  $S'$ 系で考えよう。

問5 図4に破線で示された,  $X$ 軸と  $X$ で直交する平面に着目する。また, 紙面に垂直方向の長さを  $L$  とする。

- 単位時間にこの平面を通して  $X$  の正方向に流れる質量を  $F(X)$  とする。式(5), (6)を用いて  $F(X)$  を求めよ。
- $F(X)$  を振幅  $a$  の1次まで考える範囲では, 水面の高さが時間的に変化しないことを示せ。
- 振幅  $a$  の2次まで考慮すると,  $F(X)$  は  $X$  に依存する。 $a$  の2次に比例する項は水面の高さにどのような影響を与えるか述べよ。

[ヒント]  $\Delta X (> 0)$  を微小量とすると,  $-\Delta X \frac{dF(X)}{dX}$  は  $X$ 軸と  $X + \Delta X$  および  $X$  で直交する2つの平面に挟まれた部分に単位時間に流れ込む質量である。

このように, 微小振幅では正弦波であった波形が, 振幅  $a$  の高次の項まで考慮すると単純な正弦波ではなくなる。波が進むにつれて, 突っ立ち現象等を起こすのはこのような高次の項の効果(振幅依存性効果)の例である。

### 3. 潮津波(しおつなみ)(Tidal bore ボア)現象

海岸に押し寄せる津波, 河川を逆流する潮津波(ボア)は, いずれも水の波のもつ迫力を感じさせる波動の振る舞いである。潮津波は潮汐作用による海の水位の変化により生じる階段状の波で, 大きいものは高さが3m以上になることもあり, アマゾンのポロロッカ, 中国銭塘江の大海嘯(かいしやう)(図5(a))などとして有名な波動現象である。以下では, 図5(b)に示すように, ボアが河川の上流に向かって一定速度  $c$  で進行しているとし, ボアの背面の水深および流速を  $h_1$ ,

$u_1$ , 前面のそれらを  $h_2, u_2$  としてボアの伝搬について考える。 $c > u_2$  であり, ボアの形は時間変化しないと仮定する。すなわち, 速度  $c$  で移動する座標系から見ると, 波の形は時間的に一定である。

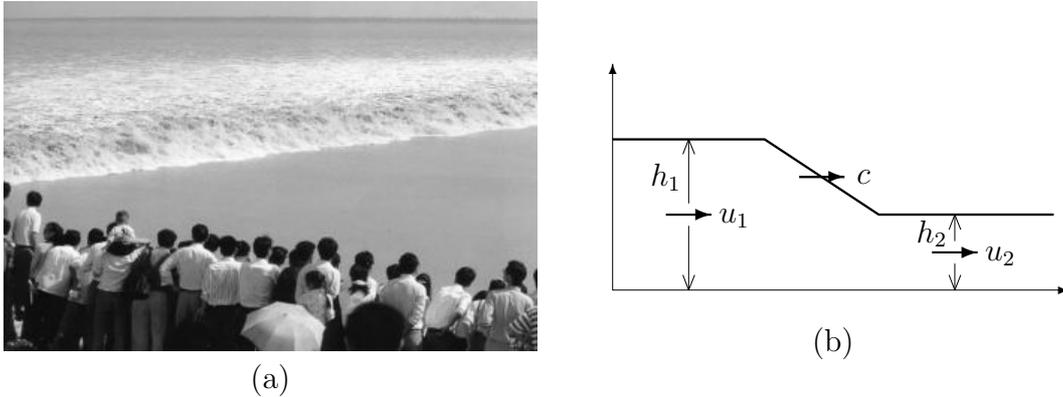


図5 (a) 中国浙江省銭塘江でのボアの様子。水面の高い方(奥)が下流側, 低い方(手前)が上流側。http://www.hztour.jp/lgyakuryu.html から引用。  
(b) ボアモデル水位。矢印は正の向きを表す。

問6 速度  $c$  で移動する座標系での座標を  $X$  とし, 階段状の高さの変化は  $X_1, X_2$  の間で起きているとする(図6参照)。この座標系では  $X_1, X_2$  における水の速度は  $u_1 - c, u_2 - c$  であることに注意して, 次の等式が成り立つことを示せ。ただし, 水の密度は一定とする。

(a)  $h_1(u_1 - c) = h_2(u_2 - c)$

(b)  $h_1(u_1 - c)^2 + \frac{1}{2}gh_1^2 = h_2(u_2 - c)^2 + \frac{1}{2}gh_2^2$

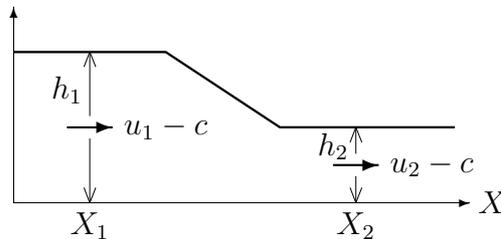


図6 矢印は正の向きを表す。

[ヒント]  $X = X_1$  と  $X = X_2$  ではさまれた部分に着目して, 質量の保存則および運動量と力積の関係を用いよ。また,  $X = X_1$  と  $X = X_2$  における水圧の違いも考慮せよ。

問7 前問の (a), (b) の等式が成り立つことを用いて, ボアの速度  $c$  がボアの背面側および前面側での高さ  $h_1, h_2$ , 前面側の速度  $u_2$ , および  $g$  を用いて, 次のように表されることを示せ。

$$c = u_2 + \sqrt{gh_1 \frac{h_1 + h_2}{2h_2}}$$

問8 ボアが河川流に逆らって進む場合を考える。 $u_2 = -U$  ( $U > 0$ ) とし, ボアの高さを  $H = h_1 - h_2$  ( $> 0$ ) と定義する。高さ  $H$  を  $c, U, g, h_2$  を用いて書き, さらに,  $H = 0$  となる  $c$  の値  $c_2$  を求めよ。その上で, 一般の  $c$  の値と  $c_2$  を比較することによって,  $h_2$  を一定とするとボアの高さ  $H$  は  $c - c_2$  の値とともに単調に増加することを示せ。