GW150915 (10 点)

Part A: ニュートン(古典)力学による軌道 (3.0 点)

A.1 質量 M_1 に関する運動方程式より:

$$M_1 \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_1}{\mathrm{d}t^2} = G\frac{M_1 M_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2}\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}\,. \tag{1}$$

問題文の式(1)より

$$\vec{r}_2 = -\frac{M_1}{M_2}\vec{r}_1\,, \tag{2}$$

これを式(1)に代入し, 整理すると

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_1}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{GM_2^3}{(M_1+M_2)^2 r_1^2}\frac{\vec{r}_1}{r_1}\,. \tag{3}$$

を得る。

A.1	1. 0 点
$$n = 3, \qquad \alpha = \frac{GM_2^3}{(M_1+M_2)^2}\,.$$	

A.2 系の全エネルギーは 2 つの質量の運動エネルギーと位置エネルギーを合わせたものである。円運動において, それぞれの質量の速度は

$$|\vec{v}_1| = r_1\Omega\,, \qquad |\vec{v}_2| = r_2\Omega\,, \tag{4}$$

となるので,全エネルギーは

$$E = \frac{1}{2}(M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2)\Omega^2 - \frac{GM_1M_2}{L}\,, \tag{5}$$

ここで,

$$(M_1 r_1 - M_2 r_2)^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 = \mu L^2\,. \tag{6}$$

よって,

$$E = \frac{1}{2}\mu L^2\Omega^2 - G\frac{M\mu}{L}\,. \tag{7}$$

A.2	1.0 点
$$A(\mu, \Omega, L) = \frac{1}{2}\mu L^2\Omega^2\,.$$	

A.3 問題文中のエネルギー(3)は質量 μ が, 静止している質量 M を中心に, 半径 L, 角速度 Ω の円軌道を回っている系のエネルギーと考えることができる。質量 μ にかかる万有引力による加速度と, 円運動をするために必要な向心加速度が等しいことから:

$$G\frac{M}{L^2} = \Omega^2 L\,. \tag{8}$$

これは確かに(円運動をしている物体に対する)ケプラーの第 3 法則である。よって, (7)より,

$$E = -\frac{1}{2}G\frac{M\mu}{L}\,. \tag{9}$$

A.3 1.0 点

$$\beta = -\frac{1}{2}\,.$$

Part B: 相対論的エネルギー散逸の導入 (7.0 点)

B.1 (適切なデカルト座標系内における)それぞれの質量の x, y 方向の運動に対して簡単な三角関数を適用して以下を得る:

$$(x_1, y_1) = r_1(\cos(\Omega t), \sin(\Omega t)), \qquad (x_2, y_2) = -r_2(\cos(\Omega t), \sin(\Omega t)). \tag{10}$$

よって,

$$Q_{ij} = \frac{M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2}{2} \begin{pmatrix} \frac{4}{3}\cos^2(\Omega t) - \frac{2}{3}\sin^2(\Omega t) & 2\sin(\Omega t)\cos(\Omega t) & 0 \\ 2\sin(\Omega t)\cos(\Omega t) & \frac{4}{3}\sin^2(\Omega t) - \frac{2}{3}\cos^2(\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

であり, (6)と少しの計算により整理すると,

$$Q_{ij} = \frac{\mu L^2}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \cos 2\Omega t & \sin 2\Omega t & 0 \\ \sin 2\Omega t & \frac{1}{3} - \cos 2\Omega t & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

B.1 1.0 点

$$k = 2\Omega, \quad a_1 = a_2 = \frac{1}{3}, a_3 = -\frac{2}{3}, \quad b_1 = 1, b_2 = -1, b_3 = 0, c_{12} = c_{21} = 1, c_{ij} \overset{\text{otherwise}}{=} 0.$$

B.2 まず, (12)の第３次導関数を取る:

$$\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} = 4\Omega^3 \mu L^2 \begin{pmatrix} \sin 2\Omega t & -\cos 2\Omega t & 0 \\ -\cos 2\Omega t & -\sin 2\Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

そして, 問題文中の式(5)に代入し計算を行う:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{G}{5c^5}(4\Omega^3 \mu L^2)^2[2\sin^2(2\Omega t) + 2\cos^2(2\Omega t)] = \frac{32}{5}\frac{G}{c^5}\mu^2 L^4 \Omega^6. \tag{14}$$

B.2 1.0 点

$$\xi = \frac{32}{5}.$$

B.3 今, 重力波の放出によりエネルギーを失っている, ケプラー運動をするような系を仮定する。

まず, (9)より, 時間において微分して,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{GM\mu}{2L^2}\frac{dL}{dt}, \tag{15}$$

このエネルギー損失は重力波によるものなので, (14)で与えた, 単位時間あたりに放出される重力波のエネルギー(に負号をつけたもの)と等しい。したがって,

$$\frac{GM\mu}{2L^2}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = -\frac{32}{5}\frac{G}{c^5}\mu^2 L^4 \Omega^6 . \tag{16}$$

(8)で与えた, ケプラーの第 3 法則を用いることで, 式中の L, dL/dt は Ω, $d\Omega/dt$ に書き換えることができる。用いるのは以下:

$$L^3 = G\frac{M}{\Omega^2}, \qquad \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = -\frac{2}{3}\frac{L}{\Omega}\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} . \tag{17}$$

(16)に代入することで, 以下が求まる:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}\right)^3 = \left(\frac{96}{5}\right)^3 \frac{\Omega^{11}}{c^{15}} G^5 \mu^3 M^2 \equiv \left(\frac{96}{5}\right)^3 \frac{\Omega^{11}}{c^{15}} (GM_{\mathsf{c}})^5 . \tag{18}$$

B.3 $$M_{\mathsf{c}} = (\mu^3 M^2)^{1/5} .$$	1.0 点

B.4 角速度と振動数の関係は Ω=$2\pi f$。問題文中に与えられた情報: *発せられる重力波の角振動数は軌道の各速度の 2 倍である*, より,

$$\frac{\Omega}{2\pi} = \frac{f_{\mathsf{GW}}}{2} . \tag{19}$$

問題文の式(10)は以下のような形をしている

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = \chi\Omega^{11/3}, \qquad \chi \equiv \frac{96}{5}\frac{(GM_{\mathsf{c}})^{5/3}}{c^5} . \tag{20}$$

よって，問題文の式(11)より

$$\Omega(t)^{-8/3} = \frac{8}{3}\chi(t_0 - t) , \tag{21}$$

であり, (19)と χ の定義より

$$f_{\mathsf{GW}}^{-8/3}(t) = \frac{(8\pi)^{8/3}}{5}\left(\frac{GM_{\mathsf{c}}}{c^3}\right)^{5/3}(t_0 - t) . \tag{22}$$

B.4 $$p = 1 .$$	2.0 点

B.5 図 1 より, 2つの Δt を半周期と捉えることができる。よって, 重力波の振動数は $f_{GW} = 1/(2\Delta t)$。これより, 与えられた 4 点から, 2つの時間間隔の中間における振動数を次のように計算することができる。

	$t_{\overline{AB}}$	$t_{\overline{CD}}$
t (s)	0.0045	0.037
f_{GW} (Hz)	$(2\times 0.009)^{-1}$	$(2\times 0.006)^{-1}$

今, (22)において, 2組の未知の (t_0, M_c) に対応する2組の (f_{GW}, t) の値が与えられている。t_{AB} と t_{CD} の2つに関して(22)を表し,それら2式を互いに割り算する。

$$t_0 = \frac{At_{\overline{CD}} - t_{\overline{AB}}}{A-1}, \qquad A \equiv \left(\frac{f_{GW}(t_{\overline{AB}})}{f_{GW}(t_{\overline{CD}})}\right)^{-8/3}. \tag{23}$$

数値を代入することで, $A \simeq 2.95$, そして $t_0 \simeq 0.054$ s と求まる。これにより, t_{AB}, t_{CD} のいずれでも(22)を用い, M_c を決定することができる。1つを用いるとチャープ質量は以下のように求まる

$$M_c \simeq 6\times 10^{31}\ \mathrm{kg} \simeq 30\times M_\odot. \tag{24}$$

したがって, 全質量 M は

$$M = 4^{3/5}M_c \simeq 69\times M_\odot. \tag{25}$$

この結果は実際, 一般相対論を用いて最大限に正確に概算した結果と驚くほど近い！[もちろん実際の物体はピッタリ同じ質量を持っているわけでもなければ, 今まで使用した理論は衝突の近くではあまり正確ではないが。]

B.5 1.0 点

$$M_c \simeq 30\times M_\odot, \qquad M \simeq 69\times M_\odot.$$

B.6 (8)より, ケプラーの法則は $L = (GM/\Omega^2)^{1/3}$。図 1 に示された点 C, D の組は衝突の直前の周期に対応する。よって, (19)を用いて t_{CD} での角速度を求めて:

$$\Omega_{t_{\overline{CD}}} \sim 2.6\times 10^2\ \mathrm{rad/s}. \tag{26}$$

そして, 全質量(25)を用いることで,

$$L \sim 5\times 10^2\ \mathrm{km}. \tag{27}$$

したがって, これらの物体は上限で R_{max} ~ 250 km の半径を持つ。すなわち, 2 つの天体は太陽の 30 倍の質量を持っていて,

$$\frac{R_\odot}{R_{max}} \sim 3 \times 10^3 \tag{28}$$

3000 倍小さく, そして！その速さは

$$v_{col} = \frac{L}{2}\Omega \simeq 7 \times 10^4 \text{ km/s} . \tag{29}$$

光の 20%以上の速さで動いているのである！

B.6 $L_{collision} \sim 5 \times 10^2$ km , $\frac{R_\odot}{R_{max}} \sim 3 \times 10^3$, $\frac{v_{col}}{c} \sim 0.2$.	1.0 点