生体組織の物理(10 points)

Part A. 血液流の物理 (4.5 points)

A. 1

血管網は対称的なので、階層i+1の血管における血流は、階層iにおける血流の半分である。このようにして、全ての階層で圧力差を合計できる。

$$\Delta P = \sum_{i=0}^{N-1} Q_i R_i = Q_0 \sum_{i=0}^{N-1} \frac{R_i}{2^i}.$$

半径に依存したRの式を代入し、

$$\Delta P = Q_0 \sum_{i=0}^{N-1} \frac{8\ell_i \eta}{2^i \pi r_i^4} = Q_0 \frac{8\ell_0\eta}{\pi r_0^4} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{2^{4i/3}}{2^i 2^{i/3}} = Q_0 N \frac{8\ell_0\eta}{\pi r_0^4}.$$

したがって、

$$Q_0 = \Delta P \frac{\pi r_0^4}{8N\ell_0\eta}.$$

よって、階層iでの血管網での体積流量は、

A.1	1.3pt
$$Q_i = \Delta P \frac{\pi r_0^4}{2^{i+3} N \ell_0 \eta}.$$	

A.2

値を代入し、適切に単位をかえると、

$$\begin{aligned} Q_0 &= \frac{\Delta P \pi r_0^4}{8N\ell_0\eta} = \\ &= \frac{(55-30)\times 1.013\times 10^5 \times 3.1415 \times (6.0\times 10^{-5})^4}{760\times 48\times 2.0\times 10^{-3}\times 3.5\times 10^{-3}} = 4.0\times 10^{-10}\ \mathrm{m^3/s} \end{aligned}$$

要求された単位での最終的な値は、

A.2	0.5pt
$$Q_0 \simeq 1.5\ \mathrm{m\ell/h}.$$	

A.3

複素数表示で電流Iは、
$$I = \frac{P_{\text{in}} e^{i\omega t}}{R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}} .$$

コンデンサーの電位差は、
$$P_{\text{out}} e^{i(\omega t + \phi)} = \frac{P_{\text{in}} e^{i\omega t}}{R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}} \frac{1}{i\omega C} = \frac{P_{\text{in}} e^{i\omega t}}{i\omega CR - \omega^2 LC + 1} .$$

その振幅は
$$P_{\text{out}} = \frac{P_{\text{in}}}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}} .$$

$\omega \to 0$　において、P_{in}より小さくなるためには、
$$(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2 > 1 \iff -2CL + C^2 R^2 > 0 .$$

L，C、Rの表式を代入して、
$$\underline{\frac{64\eta^2 \ell^2}{3Ehr^3 \rho} > 1} .$$

A.3 2.0pt

$$P_{\text{out}} = \frac{P_{\text{in}}}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}} .$$

Condition:
$$\frac{64\eta^2 \ell^2}{3Ehr^3 \rho} > 1 .$$

P_{out}を得る別の方法

等価回路の電流振幅は，、$I = \frac{P_{\text{in}}}{Z}$

今、インピーダンスの絶対値は　$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$

であるから、コンデンサーにかかる電圧の振幅は、
$$P_{\text{out}} = \frac{1}{\omega C} \times I_0 = \frac{P_{\text{in}}}{\sqrt{\omega^2 C^2 R^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}} .$$

A.4

前の式を変形して、
$$h < \frac{64\eta^2 \ell^2}{3Er^3 \rho}$$

A. 2の血管網に対して、
$$h < \frac{64\eta^2 \ell_0^2 \times 2^i}{3 \times 2^{2i/3} E r_0^3 \rho} = \frac{64 \times (3.5 \times 10^{-3})^2 \times (2.0 \times 10^{-3})^2}{3 \times 0.06 \times 10^6 \times (6.0 \times 10^{-5})^3 \times 1.05 \times 10^3} \times 2^{i/3} = 7.7 \times 10^{-5} \times 2^{i/3} .$$

最悪の場合は i=0に対してであり、 $h_{\text{max}} = 7.7 \times 10^{-5} \times 2^0 = 7.7 \times 10^{-5}$ m

実際の観測では、毛細血管の内径は18μmから60μmの範囲にあり、血管の厚さが80μmより小さいというこの値は妥当である。
（訳注：毛細血管と比較しているのは、初めは i=5, h=2×10^{-4} m が解答とされ、後にi=0と修正されたときに、この文章は変更されなかったためと考えられる。）

A.4	Maximum $h = 8 \times 10^{-5}$ m	0.7pt

Part B. 腫瘍の成長(5.5 points)

B.1

腫瘍と正常な生体組織の質量は

$$\begin{cases} M_{\mathsf{T}} = V_{\mathsf{T}}\rho_{\mathsf{T}} = V_{\mathsf{T}}\rho_0(1+\frac{p}{K_{\mathsf{T}}}) \\ M_{\mathsf{N}} = V\rho_0 = (V - V_{\mathsf{T}})\rho_0(1+\frac{p}{K_{\mathsf{N}}}) \end{cases}$$

圧力 pは次のように表される。

$$p = \frac{M_{\mathsf{T}}\,K_{\mathsf{T}}}{V_{\mathsf{T}}\,\rho_0} - K_{\mathsf{T}}$$

M_{N}の式に代入すると

$$M_{\mathsf{N}} = (V - V_{\mathsf{T}})\,\frac{M_{\mathsf{N}}}{V}\left[\left(1 - \frac{K_{\mathsf{T}}}{K_{\mathsf{N}}}\right) + \frac{M_{\mathsf{T}}\,V K_{\mathsf{T}}}{V_{\mathsf{T}}\,M_{\mathsf{N}}\,K_{\mathsf{N}}}\right]$$

簡単にして、vの方程式は次のようになる $(1-\kappa)\,v^2 - (1+\mu)v + \mu = 0$,

この式の解は次のようになる。
（２次方程式のうちもう一つの解はv=0でμ=0とならないので不適）

B.1	$$v = \frac{1+\mu-\sqrt{(1+\mu)^2 - 4\mu\,(1-\kappa)}}{2(1-\kappa)}\,.$$	1.0pt

B.2

$r < R_{\mathrm{T}}$ においてエネルギー収支は

$$4\pi r^2(-k)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = \mathcal{P}\frac{4}{3}\pi r^3$$

したがって、37 ℃=310. 15 Kに対する温度の差$\Delta T(r)$は次のようになる $\Delta T(r) = -\frac{\mathcal{P} r^2}{6k} + C,$

Cは積分定数である。

$r > R_T$ において、エネルギー保存則によると $4\pi r^2(-k)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = \mathcal{P}\frac{4}{3}\pi R_T^3$

37 ℃=310. 15 Kに対する温度の差$\Delta T(r)$は $\Delta T(r) = \frac{\mathcal{P} R_T^3}{3kr}$

rが無限大のときΔTはゼロだから積分定数はゼロである。

２つの式のΔT が$r = R_T$において一致することから、 $C = \frac{\mathcal{P} R_T^2}{2k}.$

したがって、腫瘍の中心での温度はSI単位系で以下のようになる。

B.2	Temperature: $310.15 + \frac{\mathcal{P} R_T^2}{2k}$.	1.7pt

B.3

腫瘍の表面（腫瘍のうち最も温度が低いところ）において37 ℃=310. 15 Kに対する温度の差$\Delta T(r)$は次のようになる

$$\Delta T(R_T) = \frac{\mathcal{P} R_T^2}{3k}.$$

これが6. 0 Kであるので、

$$\mathcal{P} = \frac{3\Delta T k}{R_T^2} = \frac{3 \times 6 \times 0.6}{0.05^2} = 4.3\ \mathrm{kW/m^3}.$$

B.3	$\mathcal{P}_{\min} = 4.3\ \mathrm{kW/m^3}$.	0.5pt

B.4

式(4)からδrとp-P_{cap}についての最初の次数の項を取り出すと、δrと腫瘍の圧力pとの関係は

$$\delta r = \frac{p - P_{\mathrm{cap}}}{2(p_{\mathrm{c}} - P_{\mathrm{cap}})}\,\delta r_{\mathrm{c}}.$$

また圧力と体積の関係はB. 1における計算から、

$$\frac{M_N}{V_N} = \frac{\rho_0 V}{V - V_T} = \frac{\rho_0}{1 - v} = \rho_0\left(1 + \frac{p}{K_N}\right)$$

であり、次のようになる。 $p = \frac{K_N v}{1-v}$.

毛細血管がより狭くなれば血管網全体を流れる血液の体積流量
（階層 0 を流れる血液に等しい）も変わる。

$$\Delta P = (Q_0 + \delta Q_0) \sum_{i=0}^{N-1} \frac{8\ell_i \eta}{2^i \pi r_i^4} = (Q_0 + \delta Q_0) \frac{8\ell_0 \eta}{\pi r_0^4} \left(\sum_{i=0}^{N-2} \frac{2^{4i/3}}{2^i 2^{i/3}} + \frac{2^{4(N-1)/3}}{2^{N-1} 2^{(N-1)/3} \left(1 - \frac{\delta r}{r_0/2^{(N-1)/3}}\right)^4} \right)$$

$$\Longrightarrow \Delta P \simeq (Q_0 + \delta Q_0) \frac{\Delta P}{N Q_0} \left(N - 1 + 1 + \frac{4\,\delta r}{r_{N-1}} \right)$$

$\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}} = \frac{\delta Q_0}{Q_0}$，より、次の式を得る。 $$1 + \frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}} = \frac{1}{1 + \frac{4\,\delta r}{N r_{N-1}}} \simeq 1 - \frac{4\,\delta r}{N r_{N-1}} .$$

したがって、 $$\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}} \simeq -\frac{4}{N} \frac{\delta r}{r_{N-1}}$$

すべてを合わせて、

B.4 2.3pt

$$\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}} \simeq -\frac{2}{N} \frac{K_{\mathrm{N}} v - (1-v) P_{\mathrm{cap}}}{(1-v)(p_{\mathrm{c}} - P_{\mathrm{cap}})} \frac{\delta r_{\mathrm{c}}}{r_{N-1}} .$$