

# 物理チャレンジ2019

## 理論問題

2019年8月18日(日)

理論問題にチャレンジ 8:55~13:55

理論問題にチャレンジする前に下記の<注意事項>をよく読んでください。

問題は、大問4題からなります。問題は、一見難問にみえても、よく読むとわかるようになっています。どの問題から取り組んでも結構です。最後まであきらめずにチャレンジしてください。

### <注意事項>

1. 開始の合図があるまで問題冊子を開けないこと。また解答用紙にも手を触れないこと。
2. 問題冊子は23ページである。解答冊子は16枚である。
3. すべての解答は、解答用紙に記入すること。解答用紙の各ページに、必ずチャレンジ番号と氏名を記入すること。
4. 解答は、最終的な答えのみではなく、解答に至る道筋も詳しく記述すること。
5. 気分が悪くなったときやトイレに行きたくなったとき、または質問がある場合は旗をあげて監督者に知らせること。
6. チャレンジ開始から200分(3時間20分)経過するまでは、原則として、途中退出はできない。200分経過(12:15)後は、退出希望者は旗をあげて監督者に知らせ、すべての解答用紙(無解答の用紙も含む)は、チャレンジ番号・氏名の記入を確認の上、机の上に置いて退室すること。
7. 他の参加者の迷惑にならないように静粛に解答をすすめること。迷惑行為があった場合は退出させる。
8. 終了の合図があったら、ただちにすべての解答用紙(無解答の用紙も含む)は、チャレンジ番号・氏名の記入を確認の上、机の上に置いて、監督者の指示を待つこと。
9. 問題冊子ならびに計算用紙は、持ち帰ること。

# 第1問 (70点)

## テニス壁打ち

テニスや卓球で壁打ちをする場合のボールの運動を考える。状況を簡単にするため以下のようにモデル化する。図1で壁と床の交点を原点  $O$  とし、床に沿って水平右向きを  $x$  軸の正の向き、壁に沿って鉛直上向きを  $y$  軸の正の向きとする。また、ボールの  $x$  方向、 $y$  方向の速度を  $v_x, v_y$ 、加速度を  $a_x, a_y$  とする。さらに、ボールの質量を  $m$ 、重力加速度の大きさを  $g$  とし、空気抵抗は無視する。ボールの大きさ、回転も無視する。

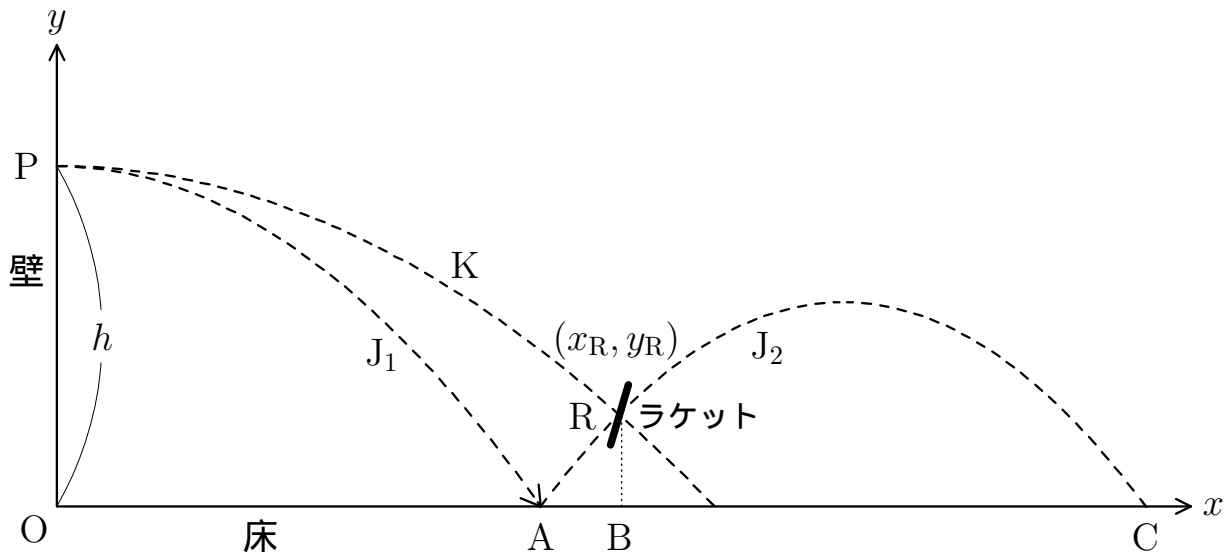


図1

- 仮定① なめらかな壁面の高さ  $h$  の点  $P$  で、水平右向きに速さ  $v$  でボールがはね返ったところから考える。
- 仮定② その後、ボールはなめらかな床の点  $A$  ではね返り係数 (反発係数)  $e$  ( $0 < e < 1$ ) で一度はね返り、ボールが再び床に達するまでの間にボールをラケットで打つ (ラケットで打つ位置を点  $R$  とする)。ラケット面はなめらかで、ボールとの衝突は弾性衝突とする。
- 仮定③ ただし、ボールとラケットが衝突するとき、ラケットの面は鉛直方向に対して角度  $\theta$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) 傾いたまま、ラケットを面に垂直方向に速さ  $V$  で振る。ラケットを握っている人とラケットの質量はボールに比べて十分に大きく、ボールを打つ前と打った後でラケットの速さは変わらないものとする。

以下で、壁打ちを同じ軌跡 ( $P \rightarrow A \rightarrow R \rightarrow P$ ) で繰り返すために、ボールを打つ位置  $R$  と、ラケットの傾き  $\theta$ 、ラケットを振る速さ  $V$  をどのように決めるかを考えてみよう。

- 問1 点  $P$  から打ち出されたボールの  $x$  方向、 $y$  方向の運動方程式を書け。  
次に、初期値が  $x = 0, y = h, v_x = v, v_y = 0$  のとき、 $x, y$  を時間  $t$  の関数として求めよ。ただしボールが点  $A$  に到るまでの間でよい。

問2 壁でボールがはね返るときのはね返り係数を，床ではね返るときと同じ  $e$  として，高さ  $h$  の点 P から，水平に速度  $v$  と  $\frac{v}{e}$  で打ち出されたボールの，床に達するまでの軌跡  $J_1, K$  が，

$$J_1 \quad \dots \quad y = h - \frac{gx^2}{2v^2} \quad (1)$$

$$K \quad \dots \quad y = h - \frac{ge^2x^2}{2v^2} \quad (2)$$

となること，および距離  $\overline{OA} = x_A$  が

$$x_A = v \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (3)$$

となることを，問1の結果を用いて示せ。

問3 床面上の点 A ではね返されたボールの軌跡  $J_2$  が，点 A の位置  $x_A$  を用いて

$$J_2 \quad \dots \quad y = e\sqrt{2gh} \frac{x - x_A}{v} - \frac{g(x - x_A)^2}{2v^2} \quad (x > x_A) \quad (4)$$

となることを示せ。

[ヒント] 点 A ではね返ったボールの初期値は  $x = x_A, y = 0, v_x = v, v_y = e\sqrt{2gh}$  である。

軌跡 K と  $J_2$  が交わる点 R の真下の床面上の位置を点 B として，点 B とボールが床ではね返る点 A との距離  $\overline{AB} (= x_R - x_A)$  と，距離  $\overline{OA} (= x_A)$  との比を

$$f = \frac{x_R - x_A}{x_A} \quad (5)$$

とする。

問4 (a)  $f$  をはね返り係数  $e$  を用いて表せ。ただし  $f < 1$  の場合を考えることとする。

(b)  $e = \frac{1}{2}$  (このとき  $f = 1$ ) のとき，軌跡 K と  $J_2$  が接することを示し， $e < \frac{1}{2}$  では軌跡 K と  $J_2$  との交点が存在しないことを示せ。

問5 点 R における，軌跡  $J_2$  と K のボールの速度ベクトルをそれぞれ  $\vec{v}_1 = (v_{1x}, v_{1y})$   $\vec{v}_2 = (v_{2x}, v_{2y})$  とし，各速度の成分を  $g, h, v, e$  を用いて表せ。なお  $f$  を用いてもよい。

問6 図2に示すように，軌跡  $J_2$  で飛んできたボールを点 R で，適切な速さと角度のラケットで打ち，打った後の速度を  $-\vec{v}_2 = (-v_{2x}, -v_{2y})$  にすれば，ボールは水平の速度  $-\frac{v}{e}$  で壁面の点 P に当たり，水平に速度  $v$  ではね返される。その理由を説明せよ。

問7 問6のようにボールを打ち返すには，ラケットでどれだけの力積 (運動量の変化に等しい) をボールに与えればよいか，図2を参考に力積の  $x$  成分と  $y$  成分を  $v_{1x}, v_{1y}, v_{2x}, v_{2y}$  を用いて表せ。

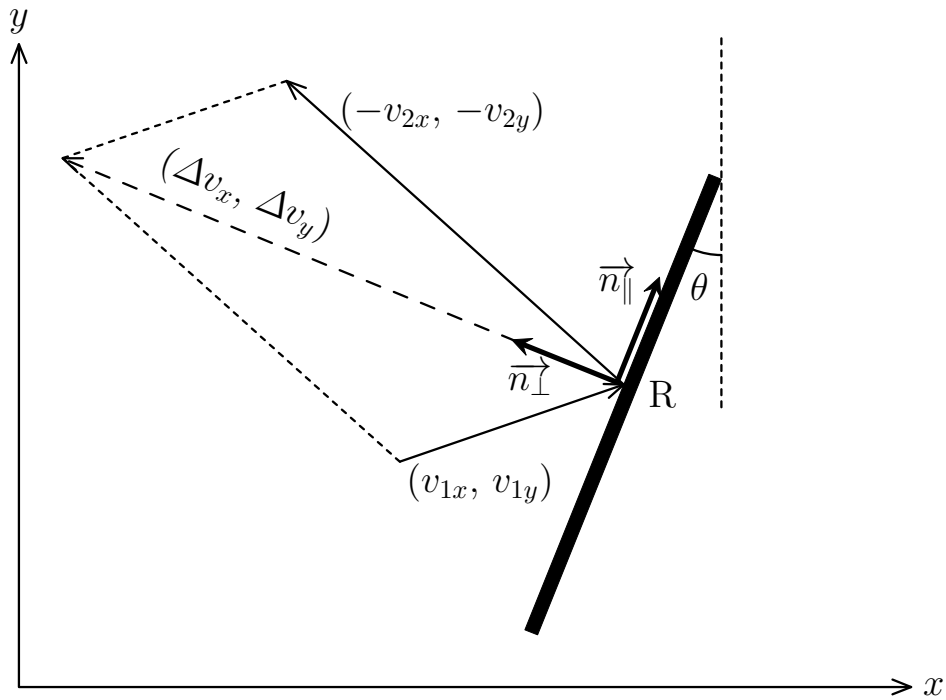


図2 ベクトル  $\vec{n}_\perp, \vec{n}_\parallel$  は, ラケット面に垂直および平行方向の単位ベクトルであり, それぞれ  $(-\cos \theta, \sin \theta), (\sin \theta, \cos \theta)$  である。

問8 ラケット面に垂直な力(抗力)のみがボールに加わるとして, 問7の力積をボールに与えるため, 図2のラケットの傾きの  $\tan \theta$  と, ラケットを振る速さ  $V$  を問5の結果を用いて,  $g, v, h, e$  で表せ。なお,  $f$  を用いてもよい。

[ヒント] 図2のように, ベクトル  $\vec{\Delta v} = (\Delta v_x, \Delta v_y)$  の方向はラケット面に垂直な方向  $\vec{n}_\perp = (-\cos \theta, \sin \theta)$  に平行であり, ラケット面に平行な方向  $\vec{n}_\parallel = (\sin \theta, \cos \theta)$  に垂直である。ボールは相対速度  $V - \vec{n}_\perp \cdot \vec{v}_1 = V + v_{1x} \cos \theta - v_{1y} \sin \theta$  でラケット面に垂直に当たり, 同じ大きさの相対速度ではね返される。したがって, ボールに与えられる  $\vec{n}_\perp$  の方向の力積は  $2m(V - \vec{n}_\perp \cdot \vec{v}_1)$  となることを利用してもよい。

## 第2問 (80点)

### 流体の流れと砂の流れ

水や空気のような流体や細かい砂のような物体(これを粉粒体という)は外部からの力により流れを生ずる。流れが緩やかなときの振る舞いを調べてみよう。

#### 1. 流体の流れ

一般に物体は原子や分子により構成され、物体の各部分は互いに力を及ぼしあう。物体を構成する原子や分子よりも十分大きな長さ(スケール)で物体を扱う場合には原子や分子の振る舞いは平均化され、物体を連続したものとみなせる。これを連続体と呼ぶ。この物体の中に任意の面を想定すると、その面をはさんで両側は互いに力を及ぼしあっていて、単位面積あたりの力は面の位置と向きに依存する。この単位面積あたりの力を応力という。流体は連続体である。流体中の圧力はこのような応力の典型的な例で、重力が働くことによって生じ、考える面に垂直である。

図1のように、水平で十分大きな平行平板の間に流体を満たした系を考察しよう。底面に原点をとり、水平に  $x$  軸を、鉛直上向きに  $y$  軸をとる。 $z$  軸方向には一様とする。流体の厚さ(深さ)は  $h$  で、板の面積は  $S$  とする。上の板を一定の大きさの力  $F$  でゆっくり  $x$  の正方向に引っ張ると、板はやがて一定の速さ  $U$  となり、この定常状態が維持されるとする。上下の板と流体とは密着して、それぞれの板に接している流体は板と同じ速度をもっている。すなわち、上の板の直下では流体の速さは  $U$  で、底辺の流体は静止している。このとき、流体中の応力と流体の動きはどのような振る舞いをしているであろうか。

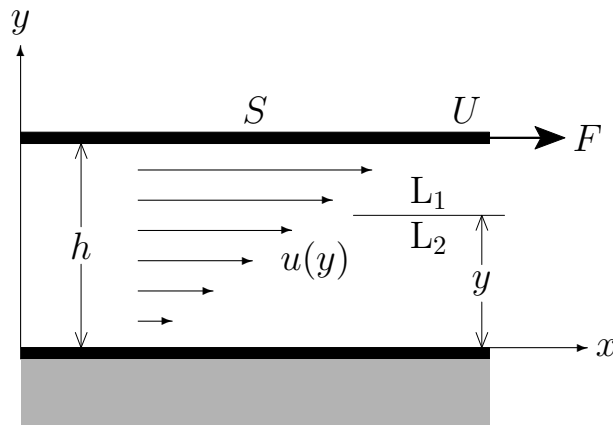


図1. 流体の流れの図

上の板は、接している流体に対して単位面積あたり  $x$  方向に

$$f_h = \frac{F}{S} \quad (1)$$

の力を及ぼしている。ここで、流体中に底面から高さ  $y$  の水平面 ( $0 < y < h$ ) を想定して、流体をこの水平面より上の部分  $L_1$  と下の部分  $L_2$  に分けて考えよう。 $L_1$  は上の板から式(1)の力を受けるとともに、この水平面において  $L_2$  から力を受けている。一方、 $L_2$  はこの水平面において  $L_1$  から力を受けるとともに、下の板から力を受けている。

- 問1 (a)  $L_2$  が  $L_1$  から受ける単位面積あたりの力の向きと大きさ  $f(y)$  を求め、それが水平面の高さ  $y$  に依存しないことを示せ。  
 (b)  $L_2$  が下の板から受ける単位面積あたり力の向きと大きさを求めよ。  
 [ヒント]  $L_1$  も  $L_2$  も加速度運動をしていない。

流体に働くこのような応力を、流体に「ずれ」を起こすことからずれ応力、または<sup>せん断</sup>剪断応力と呼ぶ(後者ははさみでものを切るときに働く力に由来する)。いまのような緩やかな流れの場合、高さ  $y$  ( $0 < y < h$ ) における流れの速度を  $x$  方向に  $u(y)$  とすると、ずれ応力の大きさ  $f(y)$  は  $\frac{du(y)}{dy}$  に比例するとしてよいであろう。

$$f(y) = \mu \frac{du(y)}{dy} \quad (2)$$

比例係数  $\mu$  (ギリシャ文字ミュー) を流体の粘性率(粘性係数)と呼ぶ。速さの違う流体が接するとき、互いに力を及ぼしあう性質を流体の粘性と呼ぶ。

問2 粘性率  $\mu$  の単位を SI 単位で表せ。

ちなみに 0.1 SI 単位のことを 1P (ポアズ) という。粘性率は、水では常温でおよそ 1cP (=  $10^{-2}$  P : センチポアズ)、空気は常温でおよそ  $10^{-5}$  P である。

さて、流体の流れの速さは下辺  $y = 0$  では 0 である。上辺  $y = h$  での速さ  $u(h)$  を  $U = u(h)$  とおくと、流れが緩やかであれば、途中では流速  $u(y)$  は次のようにおけるであろう。

$$u(y) = \frac{U}{h} y \quad 0 < y < h \quad (3)$$

問3 式(1), (2), (3) を用いて、上の板を引っ張る力  $F$  を  $\mu, U, h, S$  により表せ。

ところで、流体が、単位体積あたり  $n$  個の、質量  $m$  の分子からなるとして、この粘性がどのように生じているかを、分子の運動から考えてみよう。流体が静止していても、流体中の分子は高速な熱運動をしている。流体の流速は乱雑な運動をしている分子の平均の速さであり、分子の熱運動の速さ  $v$  は流速より十分大きい。また、分子どうしは頻りに衝突を繰り返して、衝突と衝突の間に動く距離の平均  $l$  は流速が変化する特徴的な距離に比べて十分短い。 $l$  を平均自由行程と呼ぶ。

そこで、 $x$  方向の流速が  $y$  方向に変化している(速度勾配のある)流体中に  $\Delta y = 2l$  の領域を考え、この領域における分子の動きに着目しよう(図2参照)。

いま、高さ  $y$  の水平面(面  $y$  と呼ぶ)を横切る分子に着目する。面  $y$  を下向きに通過する分子は、面  $y$  より上の分子集団の中で  $-y$  方向の速度をもった分子である。 $\frac{du}{dy} > 0$  の場合、下向きに通過する分子の  $x$  方向の平均速度  $u$  は面  $y$  より下にある分子の平均速度より大きい。一方、面  $y$  を上向きに通過する分子は面  $y$  より下の分子集団の中で  $+y$  方向の速度をもった分子で、 $x$  方向の平均速度は面  $y$  より上にある分子より小さい。

乱雑に運動している分子集団の中で、3方向のうちの  $\pm y$  方向の運動に関与する分子は単位体積あたり  $\frac{n}{3}$  個と考え、さらに  $+y$  方向と  $-y$  方向とに分けて、 $\pm y$  の運動に関与する分子

はそれぞれ単位体積あたり  $\frac{n}{6}$  個と考えてもよいであろう。また，平均自由行程が  $l$  だから，下向きに横切る分子は面  $y$  と面  $y+l$  の間にあり， $x$  方向の平均速度は  $u(y + \frac{l}{2})$  と考えられる。同様に，上向きに横切る分子の  $x$  方向の平均速度は  $u(y - \frac{l}{2})$  と考えられる。

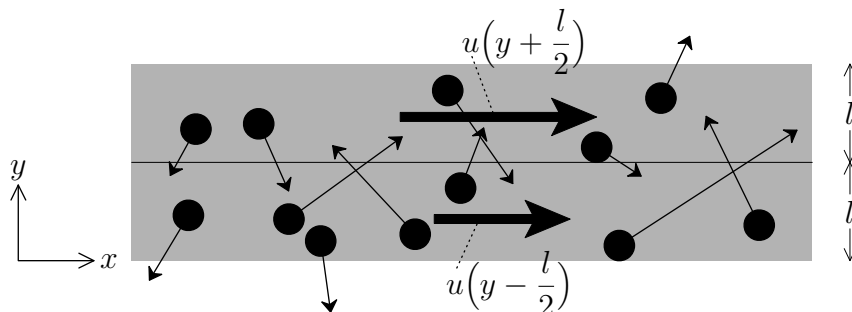


図 2. 分子の運動と流れの図：分子の動きは流れの速さ (太い矢印) よりずっと速い。

- 問 4 (a) 上下方向に横切る分子の寄与の合計として，面  $y$  の上から下に単位時間，単位面積あたりに移動する  $x$  方向の (正味の) 運動量を求めよ。ただし，熱運動の速さ  $v$  は定数としてよい。
- (b) 単位時間あたりの運動量の変化は力であるから，(a) で求めた運動量は，面  $y$  の上から下に単位面積あたりに働く力に等しい。粘性率  $\mu$  を  $m, n, v, l$  で表せ。

以上では，分子の運動を大雑把な模型によって表し，粘性の由来を考えてみた。

次に，図 3 のように，粘性のある流体が緩い斜面をゆっくりと定常的に流れている場合を考えよう。この流れは重力によってもたらされる。斜面と水平との角度を  $\alpha$  とし，その下流に向かって  $x$  軸，斜面に垂直方向に  $y$  軸をとる。流れは斜面に平行に  $y=0$  から  $y=h$  の厚さで層状に流れていて，流れの速さ  $u(x, y)$  は  $x$  にはよらず， $u(y)$  であるとしてよい。斜面  $y=0$

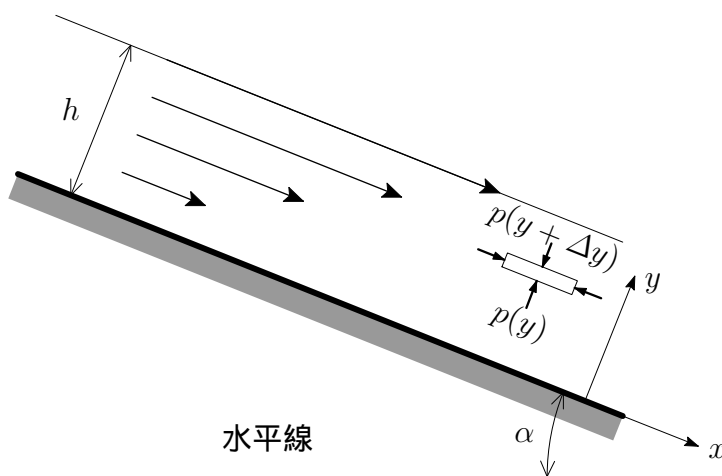


図 3. 角度  $\alpha$  の斜面を流体が  $h$  の厚さで定常的に流れている。直方体領域の上面，下面，側面に作用する圧力を図示した。

のすぐ上では流体は静止している ( $u(0) = 0$ ) ものとする。また,  $y = h$  では大気圧  $p_0$  の下で  $u(h)$  で流れている。

ここでは, 流れの中の微小区間  $x \sim x + \Delta x$  と  $y \sim y + \Delta y$  に囲まれた奥行きが単位幅の直方体の領域に着目しよう。  $x$  方向に対しては, 面  $y + \Delta y$  には  $x$  方向に応力  $f(y + \Delta y)$  が働き, 面  $y$  には  $x$  の反対方向に  $f(y)$  の応力が働いている。これは  $x$  方向下流に重力  $\rho g \Delta x \Delta y \sin \alpha$  とつり合う。ここで  $\rho$  は流体の密度,  $g$  は重力加速度の大きさである。また,  $y$  方向に対しては,  $y + \Delta y$  の面では下方に大気圧由来の圧力も含めて  $p(y + \Delta y)$  で上から押され,  $y$  の面では上方に圧力  $p(y)$  で押しかえす。この差は  $y$  方向の重力でつり合う。ここでも流体の粘性率を  $\mu$  として考える。なお, 面  $x$ , 面  $x + \Delta x$  に働く圧力は同じで打ち消し合う (圧力は  $x$  方向には一定である)。

問5 (a)  $y$  方向の力のつり合いを考えて, 圧力  $p(y)$  の変化を記述する方程式を求めよ。

[ヒント] 近似式  $p(y + \Delta y) - p(y) \approx \frac{dp}{dy} \Delta y$  を使ってよい。

(b)  $x$  方向の力のつり合いを考えて, ずれ応力  $f(y)$  の変化を記述する方程式を求めよ。

問6 (a) 問5(a) で求めた式を解いて  $p(y)$  を求めよ。

(b) 問5(b) で求めた式と式(2) から  $x$  方向の流れの速さ  $u(y)$  は

$$u(y) = Cy(2h - y) \quad (4)$$

となることを示し, 係数  $C$  を求めよ。ただし大気圧は流体の流れの表面に垂直に働くことに注意せよ。したがって  $f(h) = 0$  である。

問7 奥行きが単位幅あたりの流量  $Q$  を求めよ。ただし, 流量は単位時間あたりに流れる質量であるとする。

## 2. 砂の流れ

板の上にある砂の層は板を少し傾けただけでは動かない。しかし, 板の傾斜を大きくしていくと, やがて砂は流れ出す。この流れを砂粒の動きに着目して考察しよう。ここでも流体の場合と同様に, 板に接した砂は板に密着しているとする。

砂粒のような微細な固体粒子の集合体を粉粒体と呼び, その流れは, 水のような流体の流れと似ているところもあるが, 流れの様子は流体のように単純ではなく, 粒子の性質や状態によって複雑で様々な振る舞いを示す。しかし, ここでは砂の流れを1.で述べた流体の振る舞いにならって, できるだけ単純化したモデルで考えてみよう。すなわち, 実際の砂粒は様々な形状をなし, それに伴って動きも複雑であるが, ここでの砂は質量と大きさ以外には形を考える必要のない単純で等しい粒子とする。粒子同士は互いに衝突し合っていて, 粒自身の運動はつねに乱雑に変化し続け, 平均的な動きだけが観測の対象となっているものとする。

砂が定常的に流れている状態にあるとき, その板の傾斜角度を  $\theta$  とする。このとき砂粒は図4のように層状をなして, 隣接の層の粒との間でぶつかり合いながら流れていくと仮定しよう。砂粒は質量  $m$ , 大きさを  $d$  とする (砂粒を球状と仮定すれば直径に相当する)。これらは水の分子と比べて格段に大きい。

もし砂粒の間で衝突もなく摩擦もなければ皆一様に等加速度運動をして流れてしまうが, 砂粒同士は互いに接触していて衝突し合っていて移動しているので, そこでは表層が一番速く, 板に近いほど遅くなって流れるであろう。そこで, 図のように仮想的な層に対して, 各層の速さの



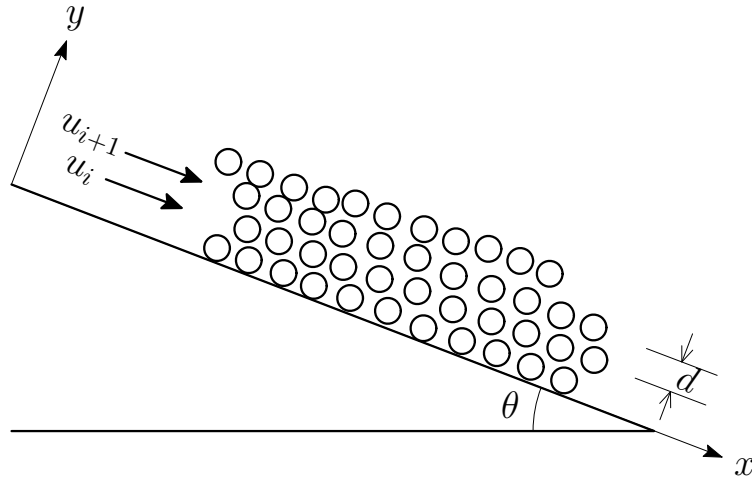


図 4. 模式的に示した砂の流れ

振る舞いを求めてみよう。すなわち，ここではその流れは各層ではそれぞれが等速で定常的であると仮定しよう。

層については，板に付着した動かない層を起点 0 として，各層は  $0, 1, 2, \dots, i, i+1, \dots$  とし，板に平行にその間隔は粒子の大きさとほぼ等しく  $d$  とする。さらに図は斜面の断面を表しているが，奥行きに対しては一様であるとして，単位長さの奥行きをもった層に対して，その振る舞いを考察する。粒子の平均間隔はおよそ  $d$  とする。つまり，この砂の数密度  $n$  は  $\frac{1}{d^3}$  で一様であるとする。そして，座標軸を，流れが下る方向に対して  $x$  軸を，斜面に対して垂直上方に  $y$  軸をとる。砂粒は平均して距離  $d$  移動すると他の砂粒と衝突し，それまでは直線運動すると仮定する。砂粒の大きさの他に，砂粒間距離および層間隔のいずれも  $d$  であるとしているが，その場合でも砂粒の間には適当な空隙があり，ここではつねに乱雑な動きが可能であることを仮定している。 $d$  はこのような乱雑な運動の下での直線運動する平均距離である。

この流れについて 1. と同じように  $i$  層ともう一つ上の  $i+1$  層との関係を考える。上層ほど速く， $i$  層， $i+1$  層の粒の， $x$  方向の平均の速さをそれぞれ  $u_i, u_{i+1}$  ( $u_{i+1} > u_i$ ) としよう。すなわち，層  $i+1$  と層  $i$  との相対速度の大きさは  $u_{i+1} - u_i$  である。そして砂粒はそれぞれの層の中だけでなく，層の間でも衝突を繰り返しているであろう。

$i$  層にある砂粒が少し速い  $i+1$  層の砂粒から衝突されると，その撃力は，その後の層の中での衝突によって，層の速さを上層では抑制し，下層では速さを増加させるように各層の流れに影響を及ぼす。

そこで，はじめに  $i$  層と  $i+1$  層の砂粒同士の衝突における運動量の変化，すなわち力積を求めてみよう。衝突は跳ね返り係数  $e < 1$  の非弾性衝突とし，衝突は直線上で行われるとする。

- 問 8 (a) 速さ  $u_{i+1}$  の砂粒が速さ  $u_i$  の砂粒に直線上で衝突するとき，速さ  $u_i$  の砂粒の運動量の変化(力積)  $J_i$  を求めよ。ただし，砂粒は質量  $m$  の質点として扱ってよいとする。  
 (b) この衝突における 2 つの砂粒の全運動エネルギーの減少  $\Delta E$  はいくらか。

しかし，砂粒の衝突は実際にはここで求めた直線上の衝突といった単純なものではなく，衝突時の速度や角度，変化を受けた運動量の方向などの影響を受けて極めて複雑であり，その詳細には立ち入らない。

このようなことから、個々の砂粒の運動は複雑であるが、 $i$  層と  $i+1$  層の中の平均の速さ  $u_i$  と  $u_{i+1}$  との差  $u_{i+1} - u_i$  (相対速度) は  $x$  方向のみではなく  $y$  方向への乱雑な動きに対しても、平均的には等しいとしてよいであろう。したがってこれによる  $y$  方向への乱雑な動きによって、相対運動する粒子間衝突により生じる  $i+1$  層から  $i$  層に移動する単位時間あたりの  $x$  方向の運動量を求めよう。

問9  $i$  層と  $i+1$  層の間の衝突で  $i$  層の受ける  $x$  方向 (流れ方向) の単位面積あたりの力、すなわち応力  $f_i$  は単位時間、単位面積あたりの運動量の変化量として求まる。単位体積あたりの砂粒の個数を  $n$  として  $f_i$  は

$$f_i = B(u_{i+1} - u_i)^2 \quad (5)$$

となることを示し、因子  $B$  を  $n, d, m, e$  で表せ。

[ヒント]  $i+1$  層と  $i$  層の粒子が、単位時間、単位面積あたり衝突する回数は、1 個の砂粒が単位時間あたりに衝突する回数  $\frac{u_{i+1} - u_i}{d}$  と単位面積あたりの粒子数  $nd$  の積  $nd \times \frac{u_{i+1} - u_i}{d} = n(u_{i+1} - u_i)$  に等しいと考えてよい。

ここで、離散的な  $u_i$  を連続的な流れの速さ  $u(y)$  と置き換えることにする。すなわち、 $u_{i+1} - u_i$  は  $\left(\frac{du}{dy}\right) \times d$  と置き換える。したがって問9の  $f_i$  は

$$f(y) = Bd^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2 \quad (6)$$

となる。この結果は流体の流れとは異なっている。

表層  $y = h$  では  $f(y) = 0$  で定常的に流れている。斜面上に単位面積をもつ鉛直な柱状領域内の、表面 ( $y = h$ ) と面  $y$  との間にある全粒子に作用する重力は、質量密度を  $\rho (= nm)$  として  $\rho g(h - y)$  であるので、その斜面方向の力とのつり合いから

$$f(y) = \rho g(h - y) \sin \theta \quad (7)$$

を得る。すなわち

$$\left(\frac{du(y)}{dy}\right)^2 = C(h - y) \quad (8)$$

となる。ただし係数  $C$  は定数である。これを積分することにより  $u(y)$  を求めることができる。

問10 係数  $C$  を  $g, d, \sin \theta, \rho, B$  を用いて表し、 $u(y)$  を求めよ。

問11 表層の流れの速さ  $u(h) = u_h$  と層の厚さ  $h$  との間には

$$\frac{u_h}{\sqrt{gh}} = \frac{h}{h_\theta} \quad (9)$$

となることが実験的に示されている。この関係を導き、定数  $h_\theta$  を  $d, \rho, B, \sin \theta$  (または  $d, e, \sin \theta$ ) を用いて表せ。

以上は砂の流れを極めて単純化したモデルで論じた。しかし、実際の砂の流れはこれよりずっと複雑に振る舞い、「粉粒体の物理」の研究対象としていろいろな角度から研究が続けられている。

### 第3問 (70点)

#### 電気回路

一定の電気抵抗 (以下単に抵抗) および電源によって構成される直流電気回路を考えよう。電源には電圧源と電流源の2種類がある。電圧源とは一定の起電力を有し、その内部抵抗 (電圧源においては直列に接続される) の値がゼロの電源、電流源とは一定の電流を供給し、その内部抵抗 (電流源においては並列に接続される) が無限大の電源をいう。また抵抗を流れる電流  $I$  とその両端の電位差  $E$  とは比例する。この関係を

$$E = RI \quad (1)$$

と表すとき、比例定数  $R$  が抵抗の値であり、式 (1) をオームの法則という。

- 問1 (a) 電圧源の端子 A, B 間に図1(a)のように接続した抵抗  $R$  の値をゼロとすること、すなわち端子間をショート (短絡) することは、物理的な状態としては許されない。何が起るか考えてその理由を述べよ。
- (b) 電流源の端子 C, D に図1(b)のように接続した抵抗  $R$  の値を無限大にすること、すなわち端子間をオープン (開放) することは、物理的な状態としては許されない。何が起るか考えてその理由を述べよ。

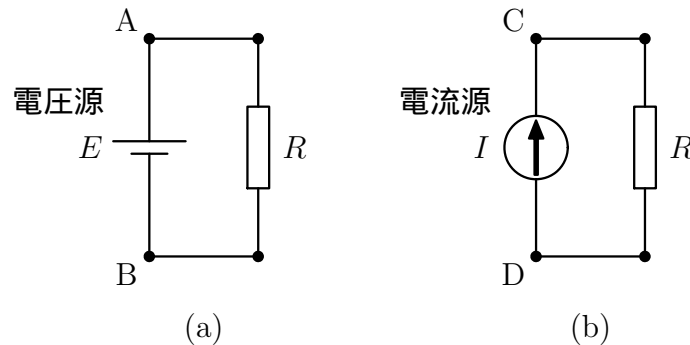


図1

異なる回路  $C_1, C_2$  があり、それぞれ2つの端子をもつ。それらの端子に任意の同一の回路  $C$  を接続したとき、回路  $C_1, C_2$  の端子を流れる電流と端子間の電圧の関係が等しいとき、2つの回路  $C_1, C_2$  は等価であるという。端子が3つ以上の場合についても回路の等価性は同じように定義される。

- 問2 図2(a)のように抵抗  $R_1, R_2, R_3$  をY字型に接続した回路の端子を A, B, C とする。また図2(b)のように抵抗  $R_{12}, R_{23}, R_{31}$  を  $\Delta$  (デルタ) 型に接続した回路の頂点を端子 D, E, F とする。端子 A, B 間, B, C 間, C, A 間の抵抗が、 $\Delta$  型回路の端子 D, E 間, E, F 間, F, D 間の抵抗に、それぞれ等しいならば、抵抗値の間にはどのような関係があるか。  $R_1, R_2, R_3$  を  $R_{12}, R_{23}, R_{31}$  で表せ。

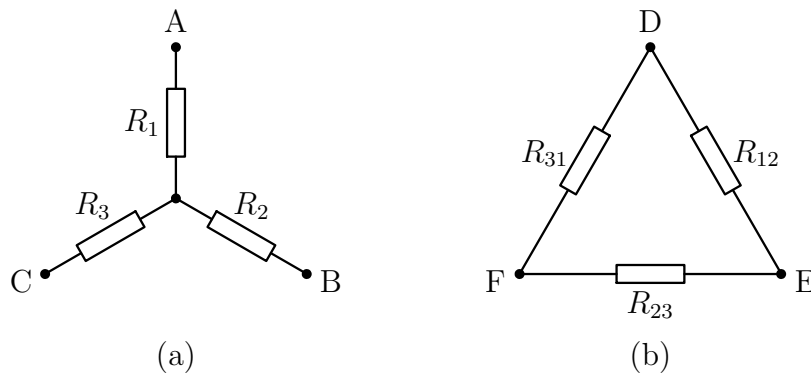


図 2

抵抗値の間に上で求めたような関係が成りたつとき、2つの回路は等価であり、図 2(a) の Y 型から (b) の  $\Delta$  型への変換を Y- $\Delta$  変換、図 2(b) の  $\Delta$  型から (a) の Y 型への変換を  $\Delta$ -Y 変換と呼ぶ。

端子間に複数の抵抗からなる回路が接続されているとき、その抵抗回路は端子間の一つの抵抗に置きかえることができる。抵抗回路と等価なこの一つの抵抗を合成抵抗と呼ぶ。

問 3 端子 A, B 間に 5 つの抵抗  $R_1, R_2, R_3, R_4$  と  $R_5$  が図 3 のように接続されている (このような回路をブリッジ回路という)。  $R_1 = R_3 = R_5 = R, R_2 = R_4 = 2R$  の場合に、この合成抵抗を求めよ。

[ヒント] 一つの  $\Delta$  型の回路部分を  $\Delta$ -Y 変換して、前問の結果を用いるとよい。

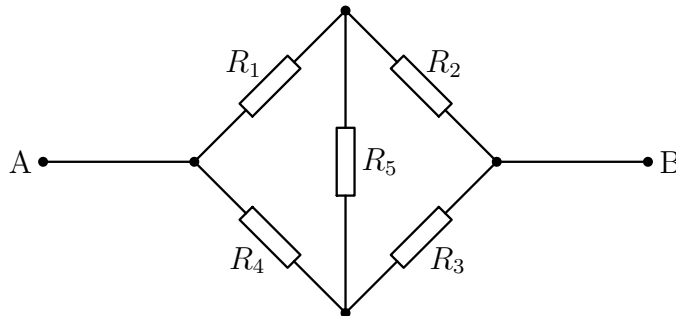


図 3

一般に有限個の抵抗、電圧源、電流源を組み合わせた直流電気回路を考えよう。電気回路を解くということは、回路の各節点 (接続点あるいは分岐点) の電圧、および節点間を結ぶ結線 (枝路) を流れる電流を求めることを意味する。電気回路を解くための必要かつ十分な基本法則はキルヒホッフ (Kirchhoff) の法則として知られている。この法則は以下の 2 つの法則からなる。

(1) キルヒホッフの第 1 法則 (電流則)

回路の任意の節点において、接続されている結線から流れ込む電流の総和は 0 である。ただし流入電流と流出電流の符号は反対にとる。

(2) キルヒホッフの第 2 法則 (電圧則)

回路内の任意のループ (閉回路あるいは閉路、図 4 参照) において、ループを構成する結線上の素子 (抵抗、電圧源等) に生じる電位差の総和は 0 である。ただし電位差の正負はループに沿って同一方向を基準とする。

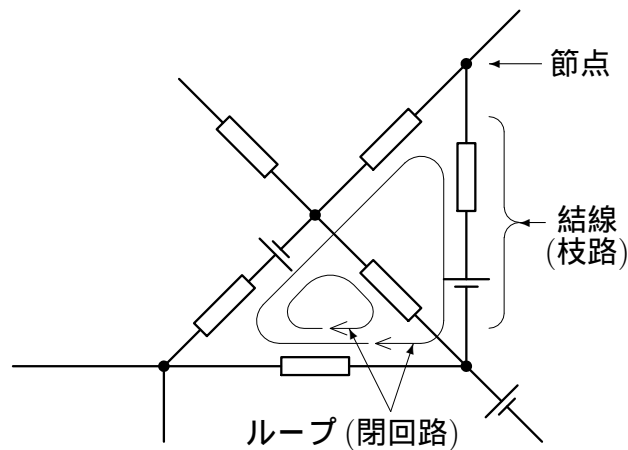


図 4

問 4 回路の 2 点間の電位差を電圧という。図 5 の回路の節点 3 を基準とするととき、節点 1 の電圧が一意に決定されることを、異なるループにキルヒホッフの法則を適用して確かめよ。

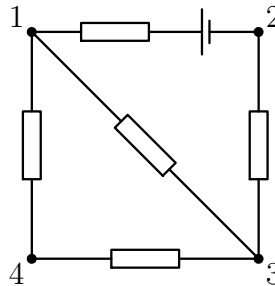


図 5

電圧を用いると、キルヒホッフの第 2 法則は次のように述べることもできる。

(2') キルヒホッフの第 2 法則 (電圧則) の別表現

回路内の各節点には電位が存在する。ある 1 つの節点の電位を基準としたときの各節点の電位を電圧とすれば、各節点の電圧は一意に決定される。

複数の抵抗、電圧源、電流源からなる電気回路を考えよう。キルヒホッフの法則により、各抵抗を流れる電流は連立 1 次方程式の解として求まる。この連立 1 次方程式には電圧源の起電力  $E_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) と電流源の電流  $I_j$  ( $j = 1, 2, \dots, M$ ) が 1 次式として含まれる。したがって各抵抗を流れる電流は、あるいは回路の任意の結線 (枝路) を流れる電流は、一般に

$$I = \sum_{i=1}^N f_i E_i + \sum_{j=1}^M g_j I_j \quad (2)$$

と表される。ただし  $f_i, g_j$  は回路に含まれる抵抗だけによって決まる定数である (もちろん電流  $I$  は結線ごとに異なる)。

式 (2) によれば、電源 (電圧源、電流源) を複数個もつ電気回路において、回路の任意の結線を流れる電流は、それぞれの電源が単独に存在する場合 (他の電源は取り除く) にその結線を流れる電流を加えあわせた結果に等しい。これを重ね合わせの原理と呼び、直流電気回路で一般

的に成り立つ定理である。ただし電圧源を“取り除く”とは、電圧源の端子を短絡することであり ( $i$  番目の電圧源を取り除くとき  $E_i = 0$  である)、電流源を“取り除く”とは、電流源の端子を開放することである ( $j$  番目の電流源を取り除くとき  $I_j = 0$  である)。

問5 次の図6に示した回路について、 $2V$ の電源に流れ込む電流  $I$  を、重ね合わせの原理を用いて求めよ。

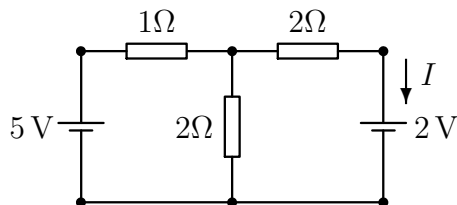


図6

複数の抵抗、電圧源、電流源からなる直流電気回路の中の短絡されていない2点から導線をつないで端子A、Bとする(図7参照)。図7の破線の四角の内部は有限個の抵抗を接続した回路で、電圧源と電流源はすべて左側に取り出されている。図には電圧源、電流源がそれぞれ2個描かれているが、回路に含まれる電圧源、電流源の数だけ描かれているとする。

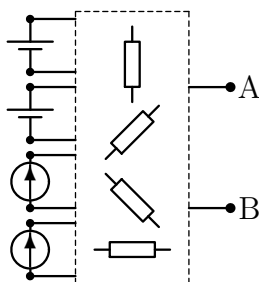


図7

このとき以下の「等価電源の定理」あるいは「テブナン (Thévenin) の定理」(日本では「鳳・テブナン (Ho-Thévenin) の定理」とも呼ばれる) が知られている。

#### 等価電源の定理

端子A、Bをもつ任意の電気回路は、一つの電圧源  $E_0$  とそれに直列に接続された抵抗  $R_0$  をもつ図8(a)の回路と等価である。

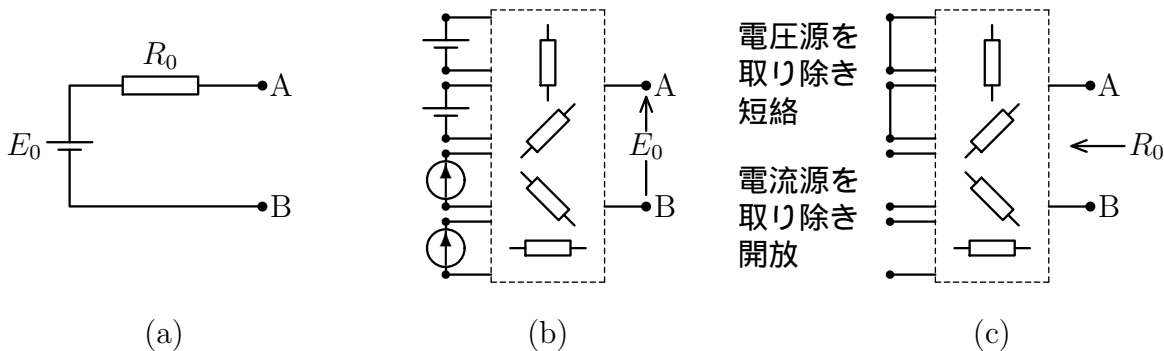


図8

ここで  $E_0$  は図 8(b) のように、端子 A, B 間が開放されているときに端子間に現れている電圧である。また  $R_0$  は図 8(c) のように、すべての電圧源を取り除いてその端子を短絡(ショート, すなわち起電力を 0 とする)し、すべての電流源を取り除いてその端子を開放(オープン, すなわち電流を 0 とする)したときに、端子 A, B から見た回路の合成抵抗である。

この等価電源の定理を、簡単な場合について重ね合わせの原理を用いて証明しよう。図 7 の回路の端子 A, B 間に、図 9 のように抵抗  $R$  を接続して、この抵抗を流れる電流  $I$  を考えよう。

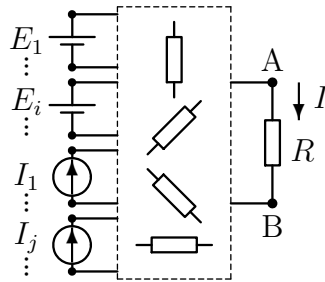


図 9

図 9 の回路は、図 10(a) のように、端子 A, B 間の抵抗  $R$  に、2 つの電圧源  $V_1, V_2 = -V_1$  を直列に挿入しても回路の状態は変わらない。

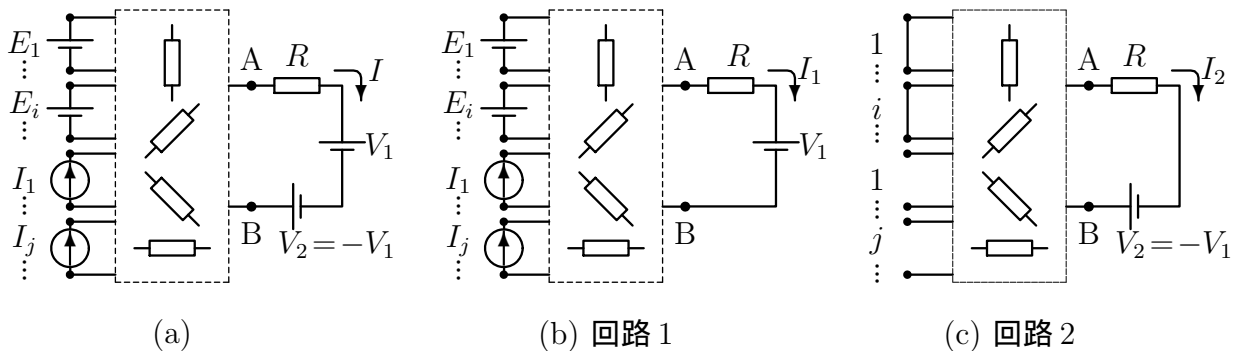


図 10

重ね合わせの原理によれば、図 10(a) の回路は図 10(b) の回路 1 と図 10(c) の回路 2 の重ね合わせと考えることができる。すなわち、図 10(a) の端子 A, B 間の抵抗  $R$  に流れる電流  $I$  は、図 10(b) の回路 1 の抵抗  $R$  を流れる電流  $I_1$  と、図 10(c) の回路 2 の抵抗  $R$  を流れる電流  $I_2$  の和である。

$$I = I_1 + I_2 \quad (3)$$

- 問 6 (a) 図 10(b) の回路 1 において  $V_1$  を、図 10(a) の端子 A, B 間が開放されているときに端子間に現れる電圧  $E_0$  に等しくとる。このとき抵抗  $R$  に流れる電流  $I_1$  を求めよ。  
 (b) 図 10(c) の回路 2 において  $V_2 = -V_1 = -E_0$  ととる。端子 A, B から見た左側の回路の合成抵抗を  $R_0$  とするとき、抵抗  $R$  に流れる電流  $I_2$  を求めよ。  
 (c) 以上から図 7 の等価回路が図 8(a) であることを説明せよ。

等価電源の定理を使うと、回路の計算が容易になる場合がある。図3で示したブリッジ回路の両端子間に電圧源  $E$  を接続した図11の回路の抵抗  $R_5$  に流れる電流  $I$  を、以下の問7と問8で異なる方法で求めてみよう。

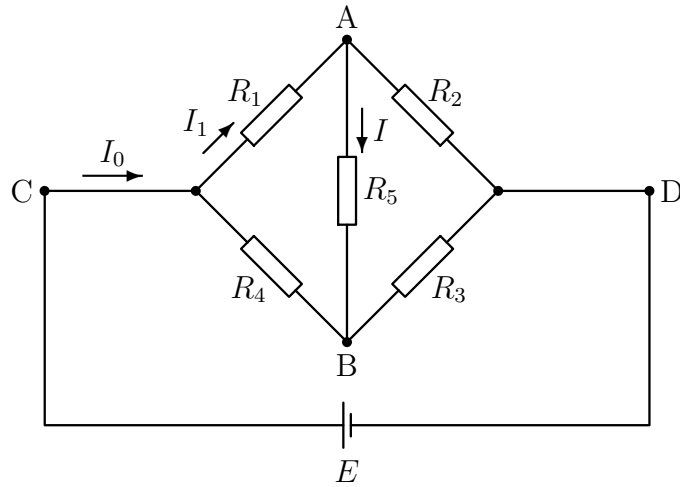


図 11

- 問 7 (a) 図 11 の端子 C を流れる電流を  $I_0$  , 抵抗  $R_1$  を流れる電流を  $I_1$  , 抵抗  $R_5$  を流れる電流を  $I$  とする。図 11 の回路には独立したループ (閉回路) が 3 つある。そのループを適宜指定して、ループを周回すると電位差がゼロとなること (キルヒホッフの第 2 法則) を考慮して  $I_0, I_1, I$  を未知数とする連立方程式を導け。
- (b) 次に、 $R_1 = R_3 = R_5 = R, R_2 = R_4 = 2R$  の場合に連立方程式を解いて  $I$  を求めよ。
- 問 8 (a) 抵抗  $R_5$  の両端の A, B を端子と考え、その端子よりブリッジ回路を眺めたとき (図 12 参照) の等価電源回路の電圧源の電圧 (B に対する A の電位)  $E_0$  と合成抵抗  $R_0$  を求めよ。

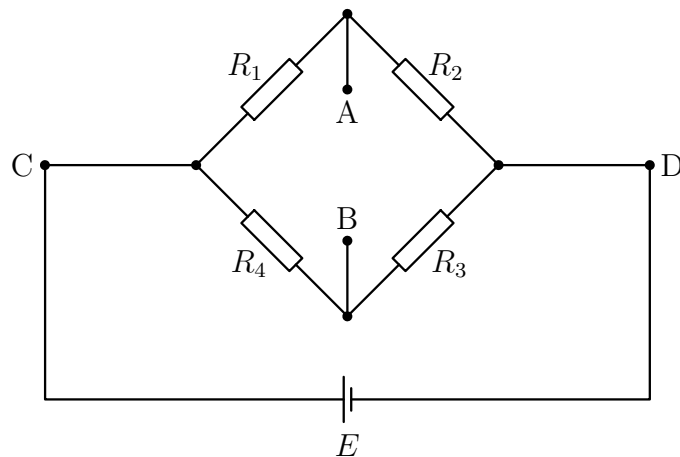


図 12

- (b) 次に  $R_1 = R_3 = R, R_2 = R_4 = 2R$  の場合に、図 12 の端子 A, B 間に抵抗  $R_5 = R$  を接続したとき、この抵抗を流れる電流  $I$  を「等価電源の定理」を使って求めよ。

等価電源の定理を使うと前問と同じ結果がより容易に得られることがわかるであろう。



## 第4問 (80点)

### 電磁波と重力波

重力波や電磁波とは何だろう？理解のヒントは，星の万有引力(重力)や電荷の電場(電界)を観察するとき，その星や電荷が動くと，離れた観測点での重力場や電磁場の向きや大きさは変化するが，その変化の情報が観測者へ届くには時間がかかることだ。物体の位置が変化しても，相対性理論では変化の影響は観測者に瞬時には届かず，情報は光速で伝わる。そのため，物体の位置が変化した時刻より，変化を観測した時刻は遅れ，重力場や電磁場の変化は波となって観測者に伝わるのである。その波が重力波や電磁波である。

以下必要なら次の数値を用いよ。

$$\text{光速 } c = 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

$$\text{重力定数 } G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

$$\text{プランク定数 } h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}$$

$$\text{太陽質量 } M_{\odot} = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$$

$$\frac{GM_{\odot}}{c^2} = 1.47 \times 10^3 \text{ m}$$

#### 1. 電磁波

##### 電荷からの電磁波の放射

電磁波は加速度運動する電荷から放射されるが，電荷が真空中を等速直線運動するときは電磁波の放射はない。

問1 電子が真空中を等速直線運動しても電磁波を放射しないのはなぜか。

[ヒント] この電子と同じ速度で移動する観測者から電子はどう見えるだろうか？

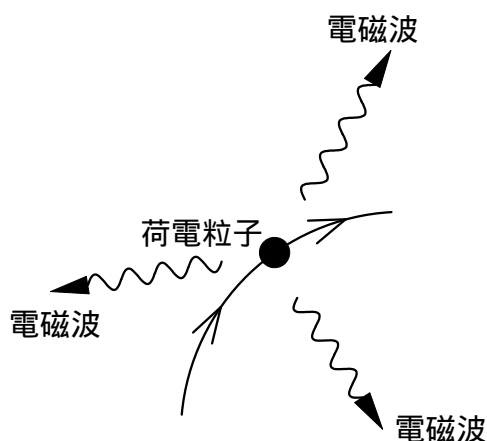


図1. 電荷の加速度運動と電磁波の放射

#### 次元解析 (単位の解析)

物理学には全部で4つの基本的な物理量がある。独立なものを4つ選べばよいが，通常，長さ  $L$ ，質量  $M$ ，時間  $T$ ，電流  $I$  を採用する。一般の物理量  $W$  はこれらの組み合わせ  $L^a M^b T^c I^d$  ( $a, b, c, d$  は整数) で表され，これを「 $W$  の次元」という。 $W$  の次元を  $[W]$  と表す。例えば定

義から，[速度] =  $LT^{-1}$ ，[加速度] =  $LT^{-2}$  であり，ニュートンの第2法則から，[力] =  $MLT^{-2}$  であり，その他，[電荷] =  $IT$ ，[エネルギー] =  $ML^2T^{-2}$  などである。物理量の次元は物理量の定義または物理量を含む法則から決まる。

基本的な物理量 L, M, T, I の単位を，それぞれ，メートル (m)，キログラム (kg)，秒 (s)，アンペア (A) で表すのが SI 単位系であり，次元が  $L^aM^bT^cI^d$  の物理量の単位は  $m^a\text{kg}^b\text{s}^c\text{A}^d$  となる。この対応があるので次元の解析は単位の解析でもある。

問2 電気定数 (真空の誘電率)  $\epsilon_0$  の次元は次式となることを定義や法則から確かめよ。

$$[\epsilon_0] = L^{-3}M^{-1}T^4I^2 \quad (1)$$

[ヒント] クーロンの法則の比例定数  $k$  と電気定数 (真空の誘電率)  $\epsilon_0$  との関係は  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  と表される。

電磁波の放射を次元解析で理解しよう。前の考察で放射には加速度が必要だったが，速度が小さいとき，電荷から十分遠方での加速度に比例する電場を考える。電荷  $q$  が原点付近にあり，加速度の大きさが  $a$  のとき，原点から距離  $r$  の電場の大きさ  $E$  は電荷  $q$  と加速度  $a$  の積に比例するとしよう。すると  $E$  は距離  $r$  も考慮して次の形が考えられる ( $E$  は角度に依存するが，ここでは角度を無視する)。

$$E = K_1 \frac{qa}{r^n} \quad (2)$$

$K_1$  は未知数で電磁気に関係するので電気定数  $\epsilon_0$  と光速  $c$  に依存するとしよう。そこで

$$K_1 = A_1\epsilon_0^l c^m \quad (3)$$

と仮定する。ただしここに  $A_1$  は無次元 (単位なし) で大きさがおよそ1の定数である。

問3 上記の式 (2)，(3) を用い，次元解析から  $n = 1$  を示し，また， $l, m$  を決定せよ。

このように加速度によって生じる遠方の電場は  $r^{-1}$  に比例し，静止した電荷による電場の  $r^{-2}$  より緩やかに減衰するので遠方まで届く。磁束密度  $B$  の減衰も同様に  $r^{-1}$  に比例する。

問4 遠方の磁束密度を

$$B = K_2 \frac{qa}{r^{n'}} \quad (4)$$

とし，定数を  $K_2 = A_2\epsilon_0^{l'} c^{m'}$  ( $A_2$  は無次元で  $|A_2| \approx 1$  の定数) と仮定して  $n' = 1$  を示し， $l', m'$  を求めよ。(定数  $K_2$  は磁気定数 (真空の透磁率)  $\mu_0$  に依存してもよいが， $\epsilon_0\mu_0c^2 = 1$  なので上の仮定で十分である)。

[ヒント] 磁束密度  $B$  の次元  $[B]$  は，磁束密度に垂直に速度  $v$  で動く電荷  $q$  が受けるローレンツ力の大きさが  $F = qvB$  であることからわかる。

## 双極子放射

上記の考察により遠方の電場と磁束密度はともに  $r^{-1}$  で減衰する。電磁場のエネルギーの単位時間、単位面積あたりの流れは、「電場と磁束密度の積」に比例することが知られている。したがって  $r^{-2}$  で減衰する。その結果、十分大きな半径  $r$  の球の表面積  $4\pi r^2$  を単位時間に通過する全エネルギー  $P$  は  $r$  によらず一定になる。すなわち電磁場のエネルギーの流れは無限遠  $r \rightarrow \infty$  まで届く。このことは、電磁波が放射されている、と解釈される。

この考察からも予想されるように、電荷の速度  $\vec{v}$  が光速より十分遅い場合 ( $|\vec{v}| \ll c$ , ただし一般に  $|\vec{A}|$  はベクトル  $\vec{A}$  の大きさを表す), 加速度運動する電荷が単位時間に放射するエネルギー  $P$  は、式 (2) と (4) の積に  $4\pi r^2$  を掛けたものに比例し、 $r$  によらず

$$P \propto K_1 K_2 (qa)^2 \quad (\text{記号 } \propto \text{ は「比例する」という意味}) \quad (5)$$

となる。詳しい計算によれば  $P$  を加速度ベクトル  $\vec{a}$  で表したとき、

$$P = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} |q\vec{a}|^2 \quad (6)$$

となることが知られ、双極子放射と呼ばれている。

問5 式 (6) の右辺が単位時間あたりに放射されるエネルギーの次元をもつことを確かめよ。

加速度を速度の時間微分で表せば、式 (6) は次式になる。

$$P = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left| q \frac{d\vec{v}}{dt} \right|^2 \quad (7)$$

(注: ベクトル  $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$  の時間微分  $\frac{d\vec{A}}{dt}$  とは、新たなベクトルでその成分は  $\frac{d\vec{v}}{dt} = \left( \frac{dA_x}{dt}, \frac{dA_y}{dt}, \frac{dA_z}{dt} \right)$  である。例えば位置ベクトル  $\vec{x} = (x, y, z)$  の時間微分  $\frac{d\vec{x}}{dt}$  は速度ベクトル  $\vec{v}$  となり、 $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$ , またその微分は加速度ベクトル  $\vec{a}$  となり、 $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left( \frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt} \right)$  である。)

複数の電荷  $q_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, N$ ) が加速度  $\vec{a}_i$  で運動するときは、重ね合わせの原理に基づき、式 (7) の  $q\vec{a}$  を  $\sum_{i=1}^N q_i \vec{a}_i$  で置き換えればよい。すると単位時間あたりのエネルギー放射量は次式になる。

$$P = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left| \sum_{i=1}^N q_i \vec{a}_i \right|^2 \quad (8)$$

## 2. 重力波

電荷をもつ粒子が円運動をすると、円運動は加速度を伴うので電磁波を放射する。それと似て、質量をもつ星が円運動をすると、重力波を放射する。星が重力波の放射で徐々にエネルギーを失い、回転半径が縮んでゆくことも、荷電粒子の電磁波の放射と似ている。

電磁波と重力波には他にもよく似た面がある。波が伝わる速さはどちらも光速  $c$  であり、振動はともに横波である。円運動の向心力も、電気力は電荷の積に比例し、重力は質量の積に比例する。また、力の大きさはともに距離の2乗に反比例する。一方、電荷には正と負があるが、質量に負はないことは異なる。電磁波と重力波は異なる面はあるが、よく似た面に注目して、重力波の放出を電磁波の放出との類推で理解してみよう。

電磁波の放射の式 (8) には、電荷と加速度の積

$$\vec{d}(t) = \sum_{i=1}^N q_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \quad (9)$$

が現れた。これを重力波に当てはめてみよう。重力の場合には、電荷に相当して質量があるだろう。そこで、式 (9) の類推として、 $N$  個の星の系の重力波の振幅に寄与する候補として

$$\vec{f}(t) = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \quad (10)$$

を考えよう。しかし星の系ではこの総和は0になる! これが電荷による電磁波の放射と星による重力波の放射との相違である。

問6 外力がないとき、式 (10) は

$$\vec{f}(t) = 0 \quad (11)$$

となることを証明せよ (2体 ( $N = 2$ ) の場合でもよい)。

しかし重力波は実際に観測されている。そこで重力波がどのような機構で発生するかを考えてみよう。簡単のため質量の等しい2つの星 A, B が  $x$ - $y$  平面上を距離  $2L$  だけ離れて、図2のように重心の周りを円運動しているとしよう。回転角速度を  $\omega$  とし、簡単のため、遠い観測者は  $x$ - $y$  平面上で  $y$  軸上 ( $y > 0$ ) に居るとしよう。物体 A の円運動を

$$\vec{x}_A(t) = (x_A(t), y_A(t), z_A(t)) = L(\cos \omega t, \sin \omega t, 0) \quad (12)$$

とする。以下では表記の簡略化のため、任意関数  $g(t)$  の時間に関する1回微分を ( $g$  の上に点を1つ付け)  $\dot{g}$ 、同様に時間に関する2回微分を  $\ddot{g}$  と表そう。すると式 (10) への A の寄与は

$$\vec{f}_A = m \ddot{\vec{x}}_A(t) = -\omega^2 m L (\cos \omega t, \sin \omega t, 0) \quad (13)$$

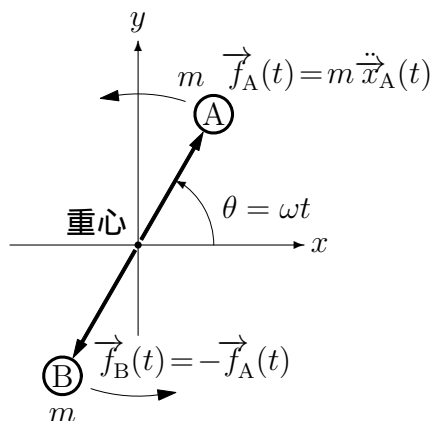


図2.  $\vec{f}_A(t)$  と  $\vec{f}_B(t)$  の相殺

物体 B の運動は  $\vec{x}_B(t) = -\vec{x}_A(t)$  だから

$$\vec{f}_B(t) = -\vec{f}_A(t) \quad (14)$$

よって A, B の寄与は相殺し, 放射は起きない (図 2)。これは, 式 (11) の 1 例である。

遅延

しかし, 同時刻の加速度が打ち消しあっても, A, B の星が放射する波は完全には打ち消されない。それは, 観測点に同時刻に到達する波は, 異なる時刻に A, B で放射されたことによる。これが遅延である。相対性理論では情報は離れた場所へ瞬間には伝わらない。電磁気力や重力は光速  $c$  で伝わる。そのため波が (時刻, 位置) =  $(t', \vec{r}')$  の波源から (時刻, 位置) =  $(t, \vec{r})$  の観測者に届くとすれば, 次の関係がある。

$$t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \quad (15)$$

情報を観測する時刻  $t$  は情報を発した時刻  $t'$  より  $\frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$  だけ遅れる効果を「遅延」と呼ぶ。電磁波の場合は, 時刻  $t'$  の電荷の加速度を  $\vec{a}(t')$  とすると, 遠方の観測者の時刻  $t$  における電場の大きさは問 2 で求めた形でよいが, 詳しく時刻を書き込むと遅延のため, 式 (2) の右辺の時刻は式 (15) の  $t'$  を用いて

$$E(t, r) = K_1 \frac{qa(t')}{r} \quad (16)$$

となる。ここで観測点は十分遠い ( $r \gg r'$ ) として  $|\vec{r} - \vec{r}'| \approx r$  と近似した。式 (16) の重要な点は左辺の観測時刻  $t$  は右辺の情報の発信時刻  $t'$  と異なって遅延し, 式 (15) の関係にあること, および加速度運動をする粒子の作る電場は遠方で  $r^{-1}$  と緩やかに減衰することである。この 2 つは重力波も同様である。

重力の場合の遅延

波源 A と B からの重力波の振幅は共通の時刻  $t$  に観測者に届き, 重ね合わされる。ところが A, B それぞれの発信源から重力波が届く時刻  $t'_A, t'_B$  は発信源と観測者までの距離が少し異なるため, 遅延が異なり, 差は

$$\Delta t' = t'_A - t'_B = \frac{|\vec{r} - \vec{r}'_B|}{c} - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'_A|}{c} = \frac{(\vec{r}'_A - \vec{r}'_B) \cdot \vec{n}}{c} \quad (\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r})$$

である。図 3 から

$$\Delta t' = \frac{2L \sin \theta}{c} \quad (17)$$

である。 $t'_A \neq t'_B$  のため情報が観測者に同時に届くとき ( $t$  が共通のとき) の B は A の反対側から少しずれた位置  $B'$  にあり (図 3), A と B の寄与は完全には相殺せず,

$$\vec{f}(t) \equiv \vec{f}_A(t) + \vec{f}_B(t - \Delta t') = \vec{f}_A(t) - \vec{f}_A(t - \Delta t') - \frac{d\vec{f}_A(t')}{dt} \Delta t' \quad (18)$$

$$\vec{f}(t) \approx \frac{d\vec{f}_A(t')}{dt} \frac{2L \sin \theta}{c} = \frac{2mL \sin \theta}{c} \frac{d^3\vec{x}_A(t')}{dt^3} \quad (19)$$

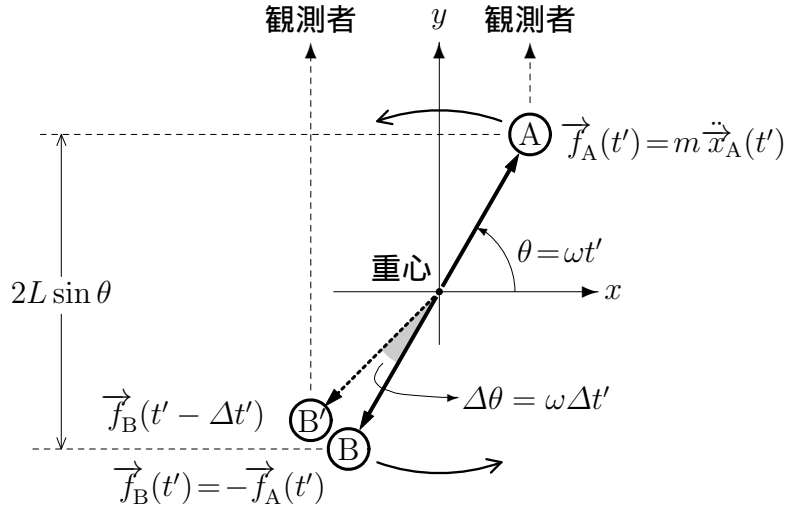


図3. 遅延による重力波の発生

となる。 $\vec{x}_A$  に式 (12) を用いると式 (19) および、 $\theta = \omega t'$  から重力波への寄与は

$$\vec{f}(t') = \frac{2\omega^3 mL^2}{c} (\sin^2 \omega t', -\sin \omega t' \cos \omega t', 0)$$

に比例する。重力波は横波で観測者は  $y$  方向なので、今  $x$  成分だけを考えると、

$$f_x(t') = \frac{2\omega^3 mL^2}{c} \sin^2 \omega t' = \frac{\omega^3 mL^2}{c} (1 - \cos 2\omega t')$$

重力波には振動部分だけが重要なので、重力波への寄与は次の式に比例することになる。

$$f_x(t') \rightarrow -\frac{mL^2\omega^3}{c} \cos 2\omega t' \quad (20)$$

このように遅延の時間差のため、A, B からの放射への寄与は完全には相殺せず式 (20) に比例する。上ではかなり無理をして電磁波との類推で重力波を求めたが、詳しくは上記の類推だけでは不足の部分もある。ここでは、エネルギーの放射の振幅が式 (20) のように  $mL^2\omega^3$  に比例すること、および円運動する連星の重力波の角振動数が  $\omega$  ではなく  $2\omega$  であること、という正しい結果が導かれたことで満足しよう。

#### 重力波の放射エネルギー

重力波の単位時間当たりの放射エネルギー  $P_G$  は式 (20) の  $f_x(t')$  の振幅の2乗に比例し

$$P_G \propto m^2 L^4 \omega^6 \quad (\propto \text{は比例するという意味}) \quad (21)$$

その結果 A, B 間の距離を  $D = 2L$  として、

$$P_G = K_3 m^2 D^4 \omega^6 \quad (22)$$

となる。ここに  $K_3$  は、波源の大きさ  $D$ 、質量  $m$ 、回転角速度  $\omega$  にも依存しない定数である。物理的に考えると定数  $K_3$  はニュートン定数  $G$  と光速  $c$  に依存してよいだろう。そのため

$$K_3 = A_3 G^a c^b \quad (a, b \text{ は整数}, A_3 \text{ は無次元で約 } |A_3| \sim 1 \text{ の定数}) \quad (23)$$

と表されると仮定する。定数  $a, b$  は以下に決まるので、定数  $A_3$  の不定性を除いて式が決まる。

問7 定数  $a, b$  を求めよ。

問8 質量が  $m = 30M_{\odot}$  の2つのブラックホール ( $M_{\odot}$  は太陽質量) が距離  $D$  だけ離れ、互いの周りを半径  $\frac{D}{2}$ 、角振動数  $\omega$  で周回している。運動はつねに円運動で近似してよいとする。この系からの重力波が観測され、観測された重力波の振動の角振動数は初め  $\omega_G = 2\omega_0 = 300 \text{ s}^{-1}$  であった。この連星の間の初めの距離  $D_0$  を求めよ。

問9 観測の始めからブラックホールの合体まで (2体間の距離が十分小さくなるまで) の時間を求めよ。式 (23) で  $A_3 = 1$  とする。

[ヒント] 2つの星の重力の位置エネルギー  $U$  は無限遠を基準  $U = 0$  にとると  $U = -\frac{Gm^2}{D}$  であり、運動エネルギー  $K$  は、万有引力が向心力として働くことを考えると  $K = -\frac{U}{2}$  となる。そのため力学的エネルギー  $W$  は (負で)、 $W = K + U = \frac{U}{2}$  であることを使ってよい。また、実際には、 $D \rightarrow 0$  では  $U = -\frac{Gm^2}{D}$  は使えなくなるが、ここではそのような配慮は無視する。

### 重力波の観察

重力波は時空の歪みの振動といってよい。横波なので進行方向に垂直な方向の長さを歪めると考えて、その歪みの微小量を  $k$  とする。すなわち、空間の長さが重力波のないときに比べて  $(1+k)$  倍になる。

例えば問8のような連星の運動の場合、星から遠く離れた距離  $r$  の場所で重力波を観測すると、重力波による空間の歪み  $k$  の振動は

$$k = \bar{k} \sin 2\omega t \quad (24)$$

と表される。その振幅  $\bar{k}$  は重力波の歪みの振幅で、エネルギー放出の振幅とは  $\omega$  のべきが異なってもよい。そこで (観測角度は無視して)

$$\bar{k} = K_4 \frac{mD^2\omega^d}{r} \quad (25)$$

と推定しよう。定数係数  $K_4$  は1に近い無次元の定数  $A_4$  を用いて  $K_4 = A_4 G^{a'} c^{b'}$  と仮定する。

問10 次元解析から、定数  $a', b', d'$  を求めよ。

重力波が図4でM4からM3を結ぶ方向から来たとする。重力波は横波なので、進行方向 (M3とM4を結ぶ方向) の長さに比べて横方向 (M1とM2を結ぶ方向) の長さが  $(1+k)$  倍だけ変化するとしよう。今、図4のようにAから発したレーザー光 (波長  $\lambda$ ) をBで2つに分け、横方向 (M1, M2) に基線の長さ  $b$  を  $N$  回往復したレーザー光と、縦方向 (M3, M4) に基線の長さ  $b$  を  $N$  回往復したレーザー光をBで干渉させて2つに分け、重力波がなければ干渉により打ち消し合う方向のレーザー光を観測する。

重力波があると空間の歪みのため、2つのレーザー光に光路差  $\Delta s = 2Nbk$  が生じ、2つのレーザー光に位相差  $\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta s}{\lambda}$  を生じる。するとBで重ねあわされた干渉光の強度が変化する。この強度の変化を観測することで重力波を観測する。その測定には光子の個数 (光の強

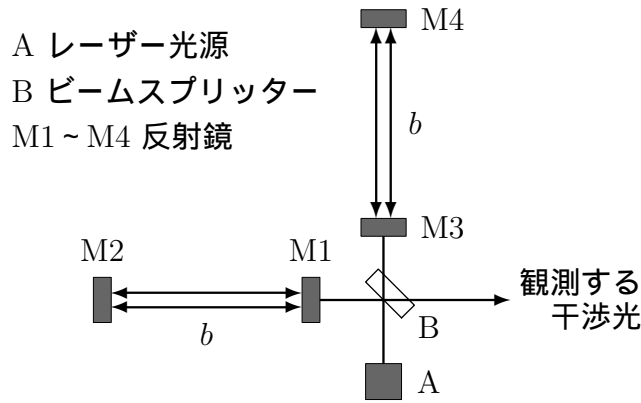


図 4. レーザー干渉計

度) が関係する。重力波の振動の 1 周期に測定される光子数を  $n$  個とすると、位相差の観測限界  $\Delta\varphi_{\min}$  は、量子論の不確定性関係によると、およそ  $\Delta\varphi_{\min} = \frac{1}{\sqrt{n}}$  であることが知られている。そのため観測精度の限界は、 $\Delta\varphi \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$  または

$$\frac{2\pi\Delta s}{\lambda} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (26)$$

である。式 (26) から、光の波長  $\lambda$  よりも微小なずれ  $\Delta s$  を観測するには、大きな光子数  $n$  が必要である。微小な歪み  $k$  を観測するため、基線長  $b$ 、往復回数  $N$ 、光子数  $n$  を大きくする工夫が行われている。

- 問 11 レーザー光の波長を  $1\mu\text{m}$ 、基線長を  $b = 3000\text{m}$ 、往復回数を  $N = 100$  とする装置で、空間の歪み  $\bar{k} = 10^{-21}$ 、振動数が  $\nu_G = 100\text{Hz}$  の重力波の観測に最低限必要な光の強度はおおよそ何ワットかを概算せよ。ただし式 (26) 以外の観測上の雑音や効率は無視してよいとする。

おわりに

重力波は米国の LIGO (ライゴ) 検出装置で初めて観測された。LIGO は米国のワシントン州の砂漠と、もう 1 つは 3000 km 離れたルイジアナ州の森にあり、ともに 4000 m の基線をもつ干渉計で、2 つあると観測の時間差から重力波の到来方向の情報が得られる。初観測は 2015 年で、太陽質量の数十倍の質量をもつ 2 つの巨大なブラックホールが互いの周りを回りながら放射する重力波だった。エネルギーを失って軌道が縮み合体するまでが観測された。2017 年には中性子星が合体するまでの重力波も観測され、この過程は同時に放射された光や  $\gamma$  線も観測され、詳しい解析が行われた。2018 年までに 11 事象の重力波観測が行われ、重力波による新しい天文学の窓が開かれた。日本でも間もなく観測装置 KAGRA (かぐら) が本格稼働する。

注：LIGO は Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory (レーザー干渉計重力波観測所) の略。

KAGRA は大型低温重力波望遠鏡の愛称で、建設地の神岡の “KA” と重力 (gravity) や重力波 (gravitational wave) といった重力をイメージする “GRA” をあわせたもの。