

## ゼロ長ばねとスlinkyコイル

ゼロ長ばね (Zero Length Spring : ZLS) とは、力とばねの長さとは比例するようなばねである。  $L_0$  を最小の長さ、つまり、ばねが伸びていない状態の長さとして、  $L > L_0$  のときの力は  $F = kL$  となる。 Figure 1 は、ZLS における力  $F$  とばねの長さ  $L$  の関係を表し、直線の傾きはばね定数  $k$  である。

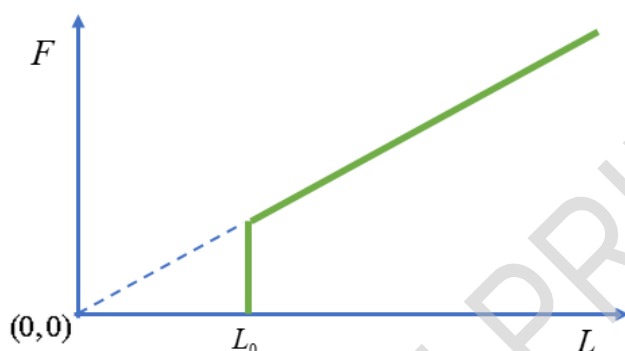


Figure 1: ばねの長さ  $L$  と力  $F$  の関係

ZLS は地震観測において有用であり、これを用いて重力加速度の大きさ  $g$  の変化を極めて高精度に測定することができる。ここでは、重さ  $Mg$  が  $kL_0$  よりも大きい、均質な ZLS を考える。ばねの相対的な柔らかさを表す無次元の比、  $\alpha = kL_0/Mg < 1$  を導入する。よく知られたスlinkyというおもちゃはそのような ZLS の一つである (そうでない場合もある)。

### Part A: 静力学 (3.0 points)

**A.1** 伸びていない状態の ZLS のある微小部分 (長さ  $\Delta\ell$ ) を考える。ばねが外力  $F$  によって引き伸ばされることにより、この微小部分も引き伸ばされる。引き伸ばされた後の長さ  $\Delta y$  を  $F, \Delta\ell$  およびばねのパラメータを用いて表せ。ただし、重力の影響はないものとする。 0.5pt

**A.2** 微小部分 (長さ  $\Delta\ell$ ) を長さ  $\Delta y$  まで引き伸ばすのに必要な仕事  $\Delta W$  を求めよ。 0.5pt

これ以降、ばねの特定の点を指定するのに、伸びていない状態での下端からの距離  $\ell$  ( $0 \leq \ell \leq L_0$ ) を用いる。ばねのあらゆる点について、この  $\ell$  は、ばねが伸びても変わらない。

**A.3** このばねの上端を持ってぶら下げたとして、ばねは自重によって伸びる。伸びて平衡状態になったばね全体の長さ  $H$  はいくらになるか？答えは  $L_0$  と  $\alpha$  を用いて表せ。 2.0pt

### Part B: 動力学 (5.5 points)

実験によれば、ばねが吊るされて静止している状態から手放されると、上から徐々に縮んでいくが、下の方には静止したままの部分が残る (Figure 2 を見よ)。時間の経過とともに、縮んだ部分はかたまりとなって下方へ移動し、ばねのひと巻ひと巻をくっ付けていって長くなる。一方、静止している部分の長さは短くなっていく。ばねの各点は、移動部分とその点に達してから初めて動き出す。ばねの最下端は、ばね全体が縮みきって伸びていないときの長さ  $L_0$  になるまで動かない。その後、縮んだばねは傾いたりすることなく 1 個の剛体として重力による鉛直落下を続ける。

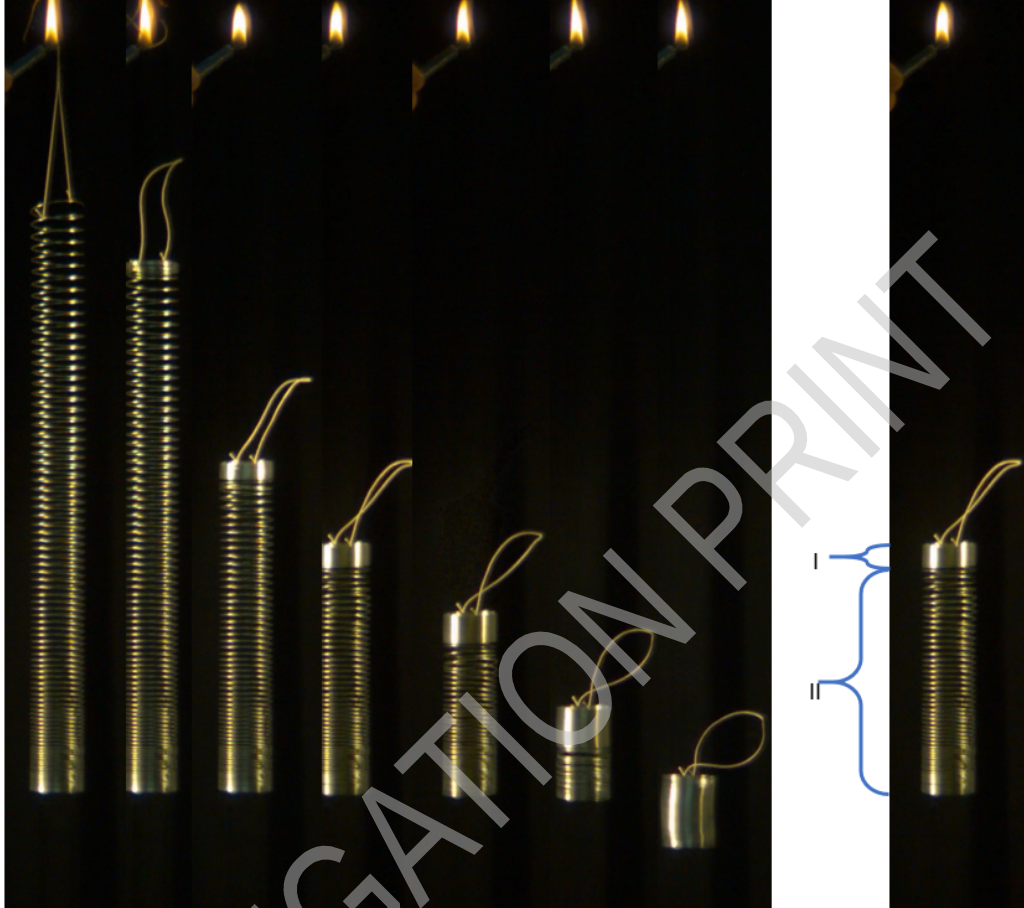


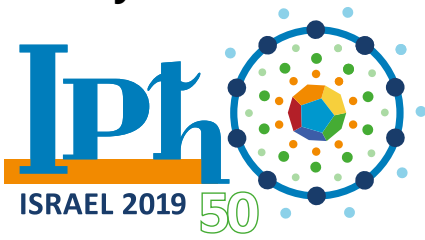
Figure 2: 左: スリンキーの自由落下中に撮影した連続写真. 右: ばねの自由落下中の移動する部分 (part I) および静止している部分 (part II).

以下の設問には、上記のモデルに基づいて解答すること。空気抵抗は無視してよいが、 $L_0$  を無視してはならない。

**B.1** ばねが手放された瞬間から、縮みきって最小の長さ  $L_0$  になるまでの時間  $t_c$  を求めよ。答えは、 $L_0, g$  および  $\alpha$  を用いて表せ。また  $t_c$  の数値を計算せよ。ばねのパラメータは、 $k = 1.02 \text{ N/m}$ ,  $L_0 = 0.055 \text{ m}$  および  $M = 0.201 \text{ kg}$  とし、重力加速度  $g$  は  $9.80 \text{ m/s}^2$  とせよ。 2.5pt

**B.2** この設問においては  $\ell$  を、ばねの part I (Figure 2 の移動している部分) と part II (静止している部分) の境界を指定するために使う。ある瞬間に、静止している部分の質量が  $m(\ell) = \frac{\ell}{L_0} M$  であり、このとき移動している部分が一様な瞬間速度  $v_I(\ell)$  で運動していたとする。この瞬間 (静止している部分が残っているとき) の、移動している部分の速度が  $v_I(\ell) = \sqrt{A\ell + B}$  となることを示し、定数  $A$  および  $B$  を  $L_0, g$  および  $\alpha$  を用いて表せ。 2.5pt

**B.3** B.2 に基づいて、手放されてから地面に達するまでの運動の間で、ばねの移動している部分の最小の速さ  $v_{\min}$  を求めよ。答えは  $L_0, \alpha, A$  および  $B$  を用いて表せ。 0.5pt



**Part C: エネルギー論 (1.5 points)**

- C.1 ばねが手放された瞬間から地面に達する直前までの間に、熱の発生によって失われた力学的エネルギーの量  $Q$  を計算せよ。答えは  $L_0, M, g$  および  $\alpha$  を用いて表せ。 1.5pt

DELEGATION PRINT