熱音響エンジン

熱音響エンジンは熱を力学的仕事の一つの形である音のエネルギーに変換する装置である。他の熱機関の多くと同じように，逆向きに，音によって低温熱源から高温熱源に熱を移動する冷却器として使うことができる。高い周波数で動作させることにより熱伝導の効果を小さくでき，閉じ込め容器を不要にできる。他の熱機関の多くと違って，動作流体以外には動く部分がない。

典型的な熱音響エンジンの効率は他の熱機関より低いが，設置や維持の費用が少ない利点がある。このため，太陽熱発電や廃棄エネルギーの利用などの再生可能エネルギーへの応用が可能となる。以下ではエンジンの中での音響の発生のみに注目し，エネルギーの取り出しや外部機関の駆動のためのエネルギーの変換は考えない。

Part A: 閉じた管の中の音波 (3.7 points)

長さ L，断面積 S の熱的に絶縁された管がある。軸は x 方向であり，端は $x = 0$ と $x = L$ である。管の中には理想気体が封入されている。熱平衡状態では，気体の温度は T_0，圧力は p_0，質量密度は ρ_0 である。気体の粘性は無視でき，気体の運動は x 方向のみであり，気体の運動と性質は y, z 方向には一様とする。

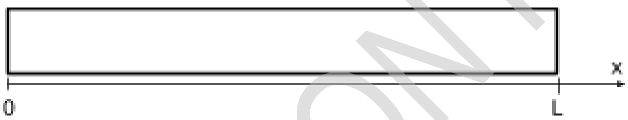

図 1

A.1 音の定在波が立っているとき，気体の体積要素は x 方向に角振動数 ω で振動する。振動の振幅は各要素の平衡状態での位置 x に依存する。平衡状態での位置 x からの縦方向の変位は次式で与えられる。 0.3pt

$$u(x,t) = a\,\sin(kx)\cos(\omega t) = u_1(x)\cos(\omega t) \tag{1}$$

(u は気体の体積要素の変位を表すことに注意)
ここで，a ($a \ll L$) は正定数，$k = 2\pi/\lambda$ は波数，λ は波長である。可能な波長の最大値 λ_{max} を求めよ。

この問題を通じて，振動は最大波長 $\lambda = \lambda_{\text{max}}$ のモードと仮定する。

さて，静止しているとき，x と $x + \Delta x$ ($\Delta x \ll L$) の間にある気体の微小部分を考えよう。A.1 の定在波による変位の結果，この部分は x 方向に振動し，体積や他の熱力学的性質が変化する。

以下では，熱力学的性質の変化は平衡値に比べて小さいとする。

A.2 体積要素の体積 $V(x,t)$ は平衡値 $V_0 = S\Delta x$ の周りに次のように振動する。 0.5pt

$$V(x,t) = V_0 + V_1(x)\cos(\omega t). \tag{2}$$

$V_1(x)$ を V_0, a, k, x で表せ。

A.3 音波による振動があるときの気体の (全) 圧力が次の形に近似的に表されるとする。 0.7pt

$$p(x,t) = p_0 - p_1(x)\cos(\omega t). \tag{3}$$

気体の微小体積に働く力を考えて，圧力の近似式における振幅 $p_1(x)$ を位置 x，質量密度の平衡値 ρ_0，変位の振幅 a と，波動のパラメータ k，ω で表せ。

音波の振動数では，気体の熱伝導は無視できる。気体の微小体積要素の膨張・圧縮は完全な断熱変化であり，$pV^\gamma =$ const. を満たす。γ は断熱指数 (比熱比) である。

A.4 上の関係式とこれまでの問いの結果を用いて，管の中の音速の近似式 $c = \omega/k$ を求めよ。答えを p_0, ρ_0 と断熱指数 γ で表せ。 0.3pt

A.5 音波による断熱膨張・断熱圧縮の結果，気体の体積要素の温度は次の形をとる。 0.7pt

$$T(x,t) = T_0 - T_1(x)\cos(\omega t). \tag{4}$$

温度振動の振幅 $T_1(x)$ を T_0, γ, a, k, x で表せ。

A.6 この問い (A.6) においてだけは，管と気体が弱く熱的に結合しているとする。その結果，定在波はほとんど変化しないが，気体と管の間には少量の熱の交換が可能になる。粘性による気体の発熱は無視できる。
図 2 の点 A, B, C (A, C は管の端に，B は中央にある) のそれぞれについて，長時間の間に，その点の管の温度が増加するか，減少するか，それとも変わらないかを述べよ。 1.2pt

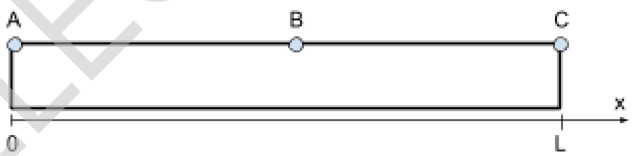

図 2

Part B: 外部熱源との接触による音波の増幅 (6.3 points)

薄い固体シートを間隔をあけて重ねたもの (スタック) を管の中に置く。各シートは管の軸に平行で，気体の x 軸方向の流れに影響しない。スタックの中央は $x_0 = L/4$ で，x の幅は $\ell\ (\ll L)$ で，全断面積を占めている。スタックの両端の温度差は τ であり，左端 $x_H = x_0 - \ell/2$ では外部熱源により温度 $T_H = T_0 + \tau/2$ に，同時に，右端 $x_C = x_0 + \ell/2$ では温度 $T_C = T_0 - \tau/2$ に保たれている。

スタックのわずかな軸方向の熱伝導により，両端の間の温度分布は一定の勾配で $T_{\text{plate}}(x) = T_0 - \dfrac{x - x_0}{\ell}\tau$ に保たれる。

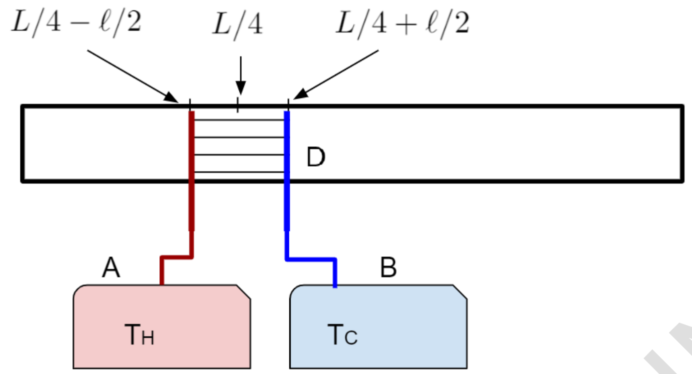

図 3: システムの概念図。A, B は高温および低温の熱源。D はスタック。

スタックのシートと気体との熱的結合が管の中の音波に与える影響を解析するために以下を仮定する。

- Part A と同じように，振動による熱力学的性質の変化は平衡値に比べて小さい。
- 系は可能な最大の波長の定在波のモードで動作する。そのモードはスタックの存在によりほとんど変化しない。
- スタックの長さは波長に比べて十分短く $\ell \ll \lambda_{\text{max}}$ であり，スタックは気体の変位や圧力変化の節 (ノード) から十分離れていて，スタックの中では変位 $u(x,\,t) \approx u(x_0,\,t)$ や圧力 $p(x,\,t) \approx p(x_0,\,t)$ は一定とみなせる。
- スタックに気体が出入りすることによって生じる端の効果は無視できる。
- スタックの両端の温度差は気体の温度に比べて小さい: $\tau \ll T_0$.
- スタックの中，気体中，および管に沿う熱伝導は無視できる。重要な熱の移動は，気体の移動に伴う対流と気体・スタック間の熱伝導だけである。

B.1 始め $x_0 = L/4$ にあった気体の微小部分について考える。この部分がスタックの中を動くとき，接しているスタックの温度は次のように変化する。 0.4pt

$$T_{\text{env}}(t) = T_0 - T_{\text{st}}\cos(\omega t). \tag{5}$$

T_{st} を $a,\ \tau,\ \ell$ で表せ。

B.2 温度差が τ_{cr}(臨界温度差) 以上になると，気体は熱を高温熱源から低温熱源に運ぶようになる。τ_{cr} を $T_0,\ \gamma,\ k,\ \ell$ で表せ。 1.0pt

B.3 気体の微小部分に流れ込む熱流 $\dfrac{dQ}{dt}$ の一般的な近似式を，その体積と圧力の時間変化率の一次式として求めよ。答えは，体積の時間変化率 $\dfrac{dV}{dt}$，圧力の時間変化率 $\dfrac{dp}{dt}$，圧力と体積の平衡値 $p_0,\ V_0$，および，断熱指数 γ で表せ。(気体定数を R とすると，定積モル比熱が $c_v = \dfrac{R}{\gamma-1}$ であることを用いることができる。) 0.8pt

気体の微小部分とスタックの間の熱の流れが制限されているため，気体の圧力振動と体積振動の間に位相のずれが生じる。以下のように，これにより有限の仕事がなされることになる。

スタックから気体の微小部分への熱流は，気体の微小部分とそれに接するスタックの温度差に比例し，次の式で近似的に表されるとする: $\frac{dQ}{dt} = -\beta V_0 (T_{\mathrm{st}} - T_1)\cos(\omega t)$. ここで，$T_1$, T_{st} はそれぞれ，A.5 と B.1 で求めた気体とスタックの温度変化の振幅であり，$\beta\ (>0)$ は定数である。また，このシステムの動作周波数では，この熱流が気体温度に与える影響は T_1 および T_{st} のどちらと比べても小さい。

B.4 仕事を求めるために，スタックとの間の熱接触による，移動する気体の微小部分の体積の変化を考える。気体の微小部分の体積と圧力を次の形に表すとしよう。 1.9pt

$$p = p_0 + p_a \sin(\omega t) - p_b \cos(\omega t),\quad V = V_0 + V_a \sin(\omega t) + V_b \cos(\omega t). \tag{6}$$

p_a, p_b が与えられたとき，係数 V_a, V_b を求めよ。
答えは p_a, p_b, p_0, V_0, γ, τ, τ_{cr}, β, ω, a, および ℓ で表せ。

B.5 1 周期の間に気体の微小部分が単位体積当たりになす音響的仕事 w の近似式を求めよ。スタックの全体積について積分して，気体が 1 周期の間になす仕事 W_{tot} を求めよ。W_{tot} を γ, τ, τ_{cr}, β, ω, a, k, S で表せ。 0.8pt

B.6 面 $x = x_0$ の左側から右側に 1 周期の間に移動する熱 Q_{tot} の近似式を求めよ。答えを τ, τ_{cr}, β, ω, a, S, ℓ で表せ。(ヒント: 対流による単位時間当たり熱流の公式 $j = Q\frac{du}{dt}$ を用いることができる。) 0.8pt

B.7 熱音響エンジンの効率 η を求めよ。効率はなされた音響的仕事と熱源から取り出された熱量の比で定義される。答えを，高温熱源と低温熱源の温度差 τ，臨界温度差 τ_{cr}，および，カルノー (Carnot) 効率 $\eta_C = 1 - T_C/T_H$ で表せ。 0.6pt