

物理チャレンジ 2020

第 2 チャレンジ

理論問題

2020 年 9 月 20 日 (日)

理論問題にチャレンジ 13 : 00 ~ 18 : 00

理論問題にチャレンジする前に下記の<注意事項>をよく読んでください。

問題は、大問 3 題からなります。問題は、一見難問にみえても、よく読むとわかるようになっています。どの問題から取り組んでも結構です。最後まであきらめずにチャレンジしてください。

<注意事項>

1. 試験中は、解答者本人と解答している手元を ZOOM でモニタし、記録します。
2. 解答中に、他の人の助言を受けたり、通信機能などを用いて解を検索するなどの行為は禁止します。このような不正行為が発覚した場合、物理チャレンジ参加の資格と権利を失います。
3. 問題用紙は表紙、裏表紙を含め 27 枚です。解答用紙は 17 枚です。
4. 「机の上に置いてよいもの」以外は片付けてください。参考図書（教科書、参考書、問題集、ノート、専門書）の参照は禁止です。
5. 開始時間になるまで解答は始めないでください。すべての解答は、解答用紙に記入すること。解答用紙の各ページに、必ずチャレンジ番号と氏名を記入すること。
6. 解答は、最終的な答えのみではなく、解答に至る道筋も詳しく記述すること。
7. チャレンジ開始から 200 分（3 時間 20 分）経過するまでは、原則として、途中終了することはできません。200 分経過（16:20）後は、終了希望者は連絡したうえで、次の終了後の作業を行ってください。
8. 終了の合図があったら解答作業はやめ、すべての解答用紙（無解答の用紙も含む）にチャレンジ番号・氏名が記入されていることを確認の上、速やかに解答用紙をスキャナー等で PDF にして送信してください（30 分以上かかる場合には連絡してください）。また、送信後、送信ファイルをダウンロードして、確実に送信されていることを確認してください。

第1問 (90点)

気泡の物理

発泡性飲料をグラスに注ぐと気泡が立ち上る。プールで泡を立てずに泳ぐのは至難の業だし、熱帯魚水槽のエアーポンプから出る泡など、泡は日常生活の色々な場面で出くわす。近年では、ポンプで水をノズルに通すだけで、 $1\mu\text{m}\sim 100\mu\text{m}$ サイズのウルトラ・ファイン・バブルを1mLあたり1500個以上の濃度で発生できるようになっている。一方で、液体を流すパイプ内や船舶のスクリューの表面では圧力の変化により泡が発生し(キャビテーション)、パイプやスクリューに音や振動の発生のみならず、破壊など深刻なダメージを与えることもある。

深海潜水艇により、南西諸島伊是名海穴^{いぜなかいけつ}の海底(水深1,333m)から泡がブクブクと湧き上がってくる現象が観測されている。深海底で発生した泡が海面に達する過程では、水圧や水温の変化の影響が大きい。

水中を上昇する泡がどのような振る舞いをするのか簡単な物理模型を用いて考察しよう。泡は十分小さく球形と見なせ、泡内部の気体の温度も水温と同じであるとする。気泡の内部には理想気体が包含されているとしよう。気泡内部の気体の圧力は表面張力のために気泡のある位置(水深)の水圧より高く、その差 ΔP は気泡の半径を r とすると

$$\Delta P = \frac{2\gamma}{r}$$

と与えられる。ここで、 γ は水の表面張力(係数)で、一般に温度に依存するが、ここでは温度によらず一定とする。

水面での大気圧を P_a 、水の密度を ρ_w 、気体分子の質量を μ 、重力加速度の大きさを g 、ボルツマン定数を k_B として、以下の設問に答えよ。

- 問1 絶対温度(以下単に温度) T_0 、水深 d_0 にある、半径 r_0 の気泡の内部の圧力 P_0 および気体の密度 ρ_0 を求めよ。
- 問2 温度 T_0 の水深 d_0 で半径 r_0 の泡が、温度 T の水深 d に移動して半径が r に変化した。その間、泡中の気体の分子数は一定とする。
- (a) 泡の半径 r_0 と r の関係を表す式を求めよ。
- (b) 表面張力の効果が無視できる場合に、水深 d での泡の半径 r を求めよ。
- 問3 水深 d_0 において、半径 r_0 の気泡が2つ融合して半径 r の1つの気泡になったとする。気体の分子数は変化せず、気泡内部の気体の温度は常に T_0 であるとして、 r と r_0 の関係を求めたい。 r, r_0 が満たす関係式を

$$\left(1 + \frac{\beta}{r}\right) r^b = a \left(1 + \frac{\beta}{r_0}\right) r_0^b$$

の形で書くとき、 a, b, β を決定せよ。

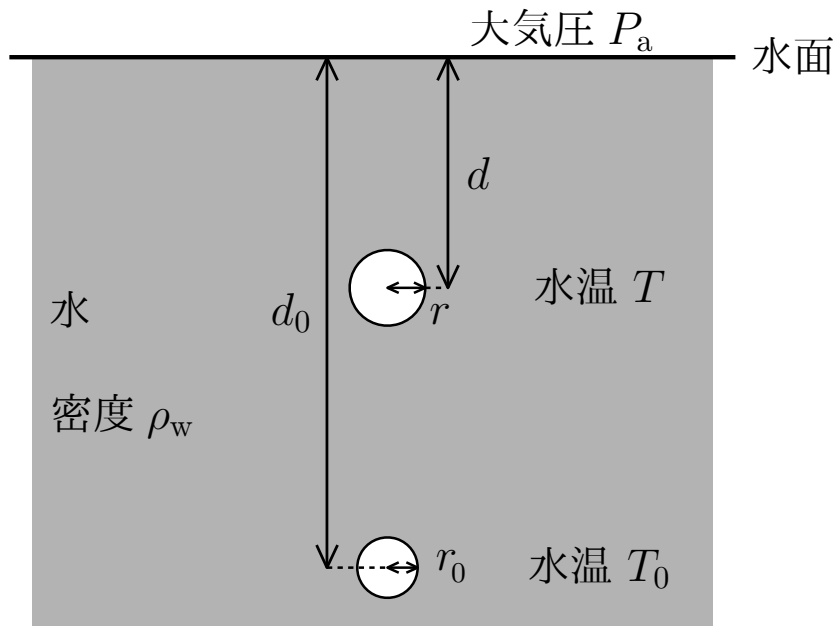


図1 気泡の模式図

問4 β の影響が小さい場合に、前問の関係式を満たす r を近似的に求めたい。

(a) まず、 $\beta = 0$ のときの r を r_1 とする。 r_1 を r_0 , a , b を用いて表せ。

(b) $\beta \neq 0$ のときは、 r は r_1 からずれる。 $\frac{|\beta|}{r_1} \ll 1$ の場合にはずれは小さく、 $\frac{\beta}{r_1}$ の1次までの近似で、 $r \doteq r_1 \left(1 + C \frac{\beta}{r_1}\right)$ と与えられるとしよう。この表式が $\frac{\beta}{r_1}$ の1次の近似で前問の関係式を満たすように、係数 C を a , b を用いて表せ。ただし、 $|x| \ll 1$ のとき、近似式 $(1+x)^q \doteq 1+qx$ を用い、 $\frac{\beta}{r_1}$ の2次以上の微小量は無視せよ。

洋の東西を問わず、泡は人の好奇心をかきたてる。フランスのジェラルド・リジェ・ベレーも大学院生のとき、グラスの中を上る泡を見て、その現象に興味を持ち、その研究がほとんどなされていないことを知って、学位論文のテーマにすることにした。シャンパンを売っているながら泡に関する疑問をそのまま放置しているのは会社としていかなものかと、フランス産の高級シャンパン「モエ・エ・シャンドン」を販売する会社に手紙を書き、提案が認められ会社に採用されてその研究をすることになった。会社近くのランス大学に移り、シャンパンの泡の研究に勤しんだ。彼は、泡の大きさ、上昇速度の測定だけでなく、グラスの中でどのように継続的に泡が発生するか、どのようにはじけるかを解明した。

まず、泡はどのように発生するのだろうか？ 栓をした状態でシャンパンには高圧の二酸化炭素 (CO_2) が封入されていて、それに釣り合った濃度の CO_2 が液体のシャンパン中に溶け込んでいる。ところが、栓を抜くと気圧が大気圧まで下がるため、その釣り合いが崩れて液面から CO_2 の気化が可能になる。液体中で直接に気化はできないが、液体の振動や攪乱、容器の内面に傷や汚れがあると、それらをきっかけに気化が起こって微小な泡が生じる。

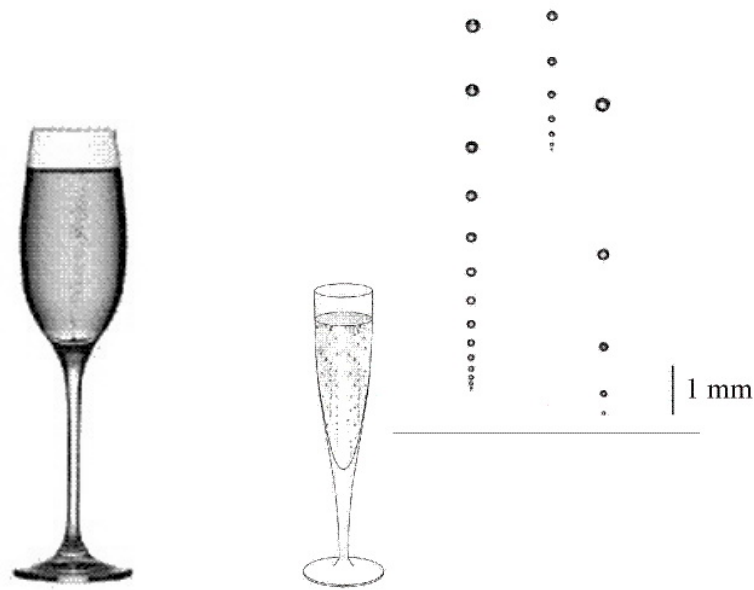


図2 シャンパンの泡

ジェラルール・リジェ・ベレール著，立花峰夫訳
 シャンパン 泡の科学（白水社）p.57 図5 および p.64 図8

これまで，泡中の気体の量は一定としてきたが，シャンパンの場合は泡の内側の液面（内壁）からも CO_2 が気化するので，泡の内部の気体の量は増加する。また，半径 r の球形の泡が粘性係数 η （ギリシャ文字イータ）の液体中を速さ v で運動するとき，大きさ $4\pi\eta r v$ の抵抗力を受ける。

これらの事情を考慮して泡の発生や運動について考えよう。以下では，シャンパンの温度 T はどこでも一定，泡中の気体も同じ温度 T ，また，液体の圧力は深さによらず大気圧に等しく，泡の中の気体は全て CO_2 とする。解答にあたっては，必要に応じて表1の物理量の記号および値を用いよ。

| 物理量 | 記号 | 値 |
|---------------------|----------|----------------------------|
| CO_2 のモル質量 | M | 44.0 g/mol |
| シャンパンの密度 | ρ_L | 0.983 g/cm ³ |
| 大気圧 = 1 気圧 | P_a | 1.013×10^5 Pa |
| 重力加速度の大きさ | g | 9.80 m/s ² |
| アボガドロ定数 | N_A | 6.02×10^{23} /mol |
| ボルツマン定数 | k_B | 1.38×10^{-23} J/K |

表1. 物理量とその数値

開栓前のボトル内の圧力より泡の内圧が大きいと、泡の内壁から CO_2 が気化できないので、開栓後もそのような泡は発生しない。一方、表面張力の効果により、泡の内圧は小さな泡ほど大きいので、開栓直後に発生する泡の最小半径は、開栓前のボトル内の圧力で決まっている。最小の泡の内圧が開栓前のボトルの圧力に等しいとして、シャンパンの表面張力を見積もってみよう。

- 問 5 栓を抜く前のシャンパンの圧力を 5.0 気圧、開栓直後に発生した最小の泡の半径を $0.30 \mu\text{m}$ として、シャンパンの表面張力 γ を求めよ。また、その泡の中の CO_2 の分子数 N を求めよ。ただしシャンパンの温度は 280 K (7°C) とする。
- 問 6 泡の内壁からの単位時間・単位表面積あたりの CO_2 の発生率を α として、半径 r の泡の中の気体の分子数 N の時間変化 $\frac{dN}{dt}$ を求めよ。
- 問 7 シャンパン中を速度 v で上昇する半径 r の泡に対してはたらく重力、浮力、抵抗力の合力 F を求めよ。ただし、力は上向きを正とする。

以下の問いにおいては指定されない限り F を用いてよい。

- 問 8 泡は内壁から気体を取り込んでいる。時刻 t における泡中の気体の質量を m 、泡の速度を v 、時刻 $t + \Delta t$ における泡中の気体の質量を m' 、泡の速度を v' とする。時間 Δt の間に泡に働いている力 F は一定として、その間の運動量の変化と力と間に成り立つ関係式を書け。ただし、泡に取り込まれる前のシャンパン中の CO_2 気体は静止しているとせよ。
- 問 9 前問で得た関係式に対して、 $\Delta v = v' - v$ および $\Delta m = m' - m$ として、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限を取ることにより、泡の運動方程式を m 、 $\frac{dm}{dt}$ 、 v 、 $\frac{dv}{dt}$ 、 F を用いて表わせ。2 次の微小量 $\Delta m \Delta v$ は無視してよい。

水深が 10 cm 程度以下、泡の半径が $100 \mu\text{m}$ 程度以上の場合には、今考えている精度では、泡中の気体の圧力に対する水圧および表面張力の効果は大気圧に比べて無視できる。以下では泡中の気圧は大気圧に等しいとして、泡の運動を考える。

- 問 10 泡の内圧が一定の場合には、泡の内壁からの CO_2 の発生率 α は一定になる。問 6 における α を定数として、 $t = 0$ のときに半径 r_0 の泡の半径 r の時間変化を経過時間 t の関数として求めよ。
- 問 11 泡中の気体の質量は泡が排除した液体の質量に比べて小さいので、泡が上昇するとき、近似的に浮力と抵抗力が釣り合っていると見なせる。この条件から、泡の上昇速度 v を、 r を含む式で表せ。

非常に清潔なグラスにシャンパンを注ぐとほとんど発泡することはない。特定の場所からの連続的な泡は、多くの場合、紙や布から剥がれ落ちグラス内部に付着した筒状のセルロース繊維の内腔から発生しており、その場合、初期の泡の直径は繊維の内径に一致している。泡は時計のように正確に定期的に発生し、発生個所ごとに泡の発生頻度は一定である。

問 12 図 3 は 70 ms 毎に連続的に発生している泡のある瞬間の画像である。シャンパンの温度を 280 K とするとき、図の上から 2 つ目の泡に注目し、上から 3 つの泡を用いて、シャンパンの粘性係数 η 、および泡の中の CO_2 分子数の単位時間・単位表面積あたりの発生率 α を概算せよ。ただし、泡は球形として扱い、泡の位置は球の中心で評価せよ。数値の計算だけでなく、計算過程の考え方も示すこと。

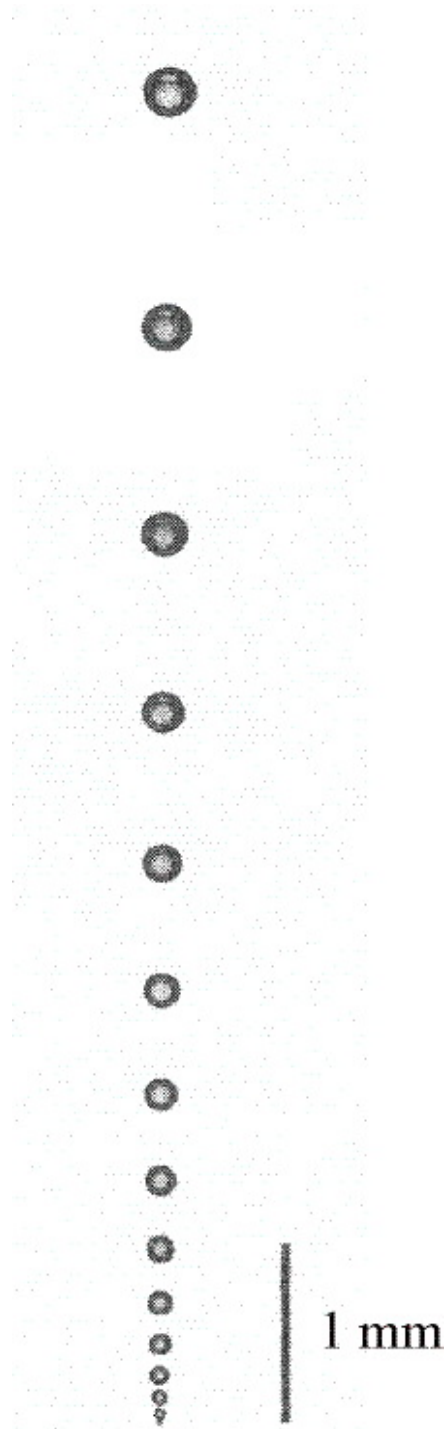


図3 定時的に発生するシャンパンの泡
ジェラルム・リジェ・ベレール著，立花峰夫訳
シャンパン 泡の科学（白水社）p.64 図8 改変

第 2 問 A (50 点)

誘電体の屈折率

光は真空中や一様な物質中を進むときは直進するが、真空中から物質中に入射するとき、また 1 つの物質から別の物質に進むとき、反射や屈折を起こす。反射に際しては、「入射角と屈折角が等しい」という反射の法則が成り立つ。

一方、屈折に際しては、入射角と屈折角の間に、それぞれの物質に固有の (絶対) 屈折率に基づいた屈折の法則が成り立つ。この屈折の法則は一般にスネルの法則と呼ばれ、屈折率は物質の物理的な性質で決まる。

本問 A において、透明な (光の吸収や散乱のない) 誘電体の屈折率がどのように決まるかを考える。

I 屈折率

電磁気学の法則によれば、真空中を伝わる光 (電場と磁場が振動して伝わる電磁波) の速さ c_0 は、真空の誘電率 (電気定数ともいう) ϵ_0 と真空の透磁率 (磁気定数ともいう) μ_0 により、

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (1)$$

で与えられ、誘電率 ϵ 、透磁率 μ の物質中を伝わる光の速さは、

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \quad (2)$$

で与えられる。また、物質の屈折率 n は、

$$n = \frac{c_0}{c} \quad (3)$$

で定義される。本問では $\mu = \mu_0$ とし、誘電体の屈折率を考えることにする。また、物質の比誘電率 ϵ_r を、

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad (4)$$

で定義する。

問 1 物質の屈折率 n をその物質の比誘電率 ϵ_r を用いて表せ。

II ガウスの法則

ある点に置かれた点電荷 q に力 \vec{f} が作用するとき、その点の電場 \vec{E} を、関係式

$$\vec{f} = q\vec{E} \quad (5)$$

で定義する。

真空中で静止した2つの点電荷の間にはたらく力に関するクーロンの法則と電場の定義式(5)により、図1のように、原点にある点電荷 $q (> 0)$ から距離 r 離れた位置ベクトル \vec{r} の点にある点電荷 q' に作用する力 \vec{f} および、その点の電場 \vec{E} は、真空中でのクーロンの法則の比例定数 k_0 を用いて、以下のように表される。

$$\vec{f} = k_0 \frac{qq'}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{f}}{q'} = k_0 \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

ここで $\frac{\vec{r}}{r}$ は \vec{r} の方向の単位ベクトルを表す。電場の強さは $q (> 0)$ より、

$$E = k_0 \frac{q}{r^2}$$

である。



図1

各点の電場の向きを表す微小な矢印を繋いで得られる曲線を電気力線という。したがって、電気力線上での電場はその接線方向であり、電気力線の密度(電気力線と垂直な単位面積あたりの本数)が電場の強さになる。すなわち、電場 \vec{E} に垂直な面の単位面積あたり E 本の電気力線を引くものとする。

問2 点電荷 $q (> 0)$ から出る電気力線の総本数は、真空の誘電率 ϵ_0 を用いて、

$$\frac{q}{\epsilon_0} \tag{6}$$

と表されることを示せ。ただし、クーロンの法則の比例定数 k_0 は ϵ_0 を用いて、

$$k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

で与えられる。

問2と同様にして、 $q < 0$ のとき、点電荷 q は $\frac{|q|}{\epsilon_0}$ 本の電気力線を吸収することが示される。これらの結果は、さらに次のように一般化できることが知られている。

図2のように、任意の閉曲面(球面や直方体面などの閉じた曲面) S から外へ出る電気力線の総本数は、 S 内の総電荷を Q とすると、

$$\frac{Q}{\epsilon_0} \tag{7}$$

と表される。ここで、 Q は正負どちらでもよく、閉曲面を通して中に入る電気力線の数は負の符号を付けて数える。これをガウスの法則という。

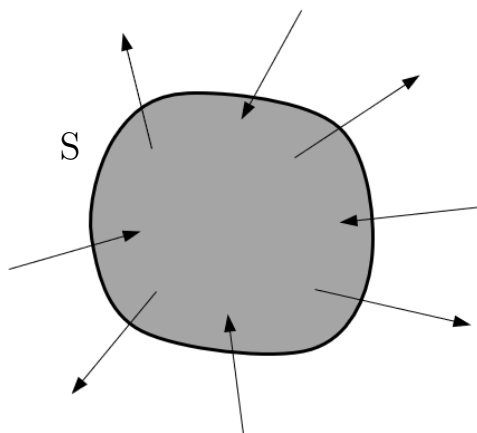


図 2

III 一様に電荷が分布した球内外の電場

上記で説明したガウスの法則を用いて、電荷が内部に一様に分布した半径 R の球内外の電場を考えよう。

問 3 図 3 のように、球の中心を O とするとき、点 O から距離 $r (> R)$ の球の外部の点 P_1 に生じる電場は、球内の全電荷 Q を球の中心 O に置いたときに点 P_1 に生じる電場に等しい。このことをガウスの法則を用いて説明せよ。

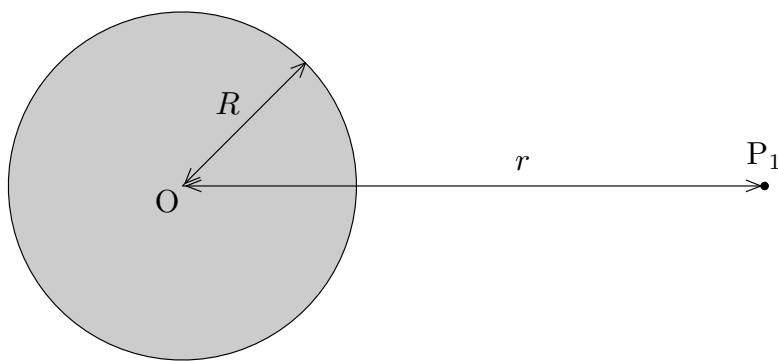


図 3

さらに、ガウスの法則より図 4 のように、球の中心 O から距離 $r (< R)$ の球の内部の点 P_2 に生じる電場は、点 O を中心にした半径 $r (< R)$ の球内部に分布する全電荷を点 O に置いたときに点 P_2 に生じる電場に等しいことを示すことができる。

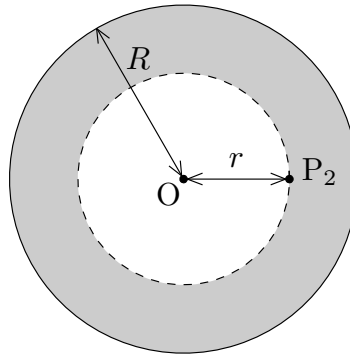


図 4

IV 誘電体の電気分極モデル

電場により正負の電荷分布の中心がずれることを電気分極という。原子はプラスの点電荷の原子核と有限の広がりをもつ負電荷の電子（これを電子雲と呼ぶ）からなっており、電場がかかっていないときは電荷分布の中心は一致しているが、電場がかかると電荷分布が変化して電気分極を起こす。電場が存在しないとき、図 5 の左図のように、正電荷をもつ原子核の位置 O と電子雲の負電荷の中心位置 O' は一致している。原子に電場 \vec{E} がかけると質量の大きな原子核はほとんど動かないが、質量の小さな電子は電場と逆向きに動き、図 5 の右図のように、原子核の位置 O と電子雲の中心 O' の位置がずれる。これを原子の電気分極と呼ぶ。

いま原子核の位置 O を原点に電場の向きに x 軸をとる。電子雲の中心と原子核の位置のずれを x (電子雲の中心 O' の座標は $-x$) とし、原子核の電荷を q 、電子雲の電荷を $-q$ とする。正電荷をもつ原子核は点電荷であるが、電子雲の負電荷 $-q$ は半径 a の球の内部に一様に分布しているとす。このように電子雲の中心がずれると、中心の原子核と電子雲の間に引き戻す力がはたらく。

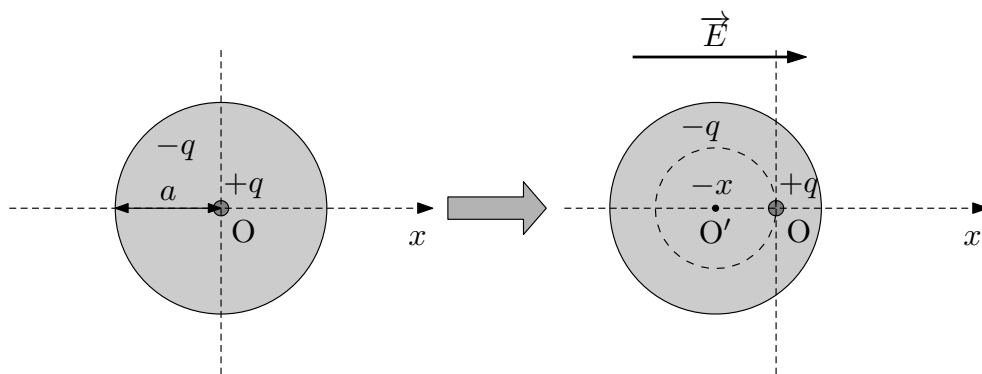


図 5 原子の電気分極モデル

問 4 原子核と電子雲の中心がずれて (図 5 の右図), 電子雲の中心 O' の座標が $-x$ ($-a < -x < 0$) の場合, 原子核の点 O に電子雲が作る x 方向 (x 軸正方向を正) の電場が $E_x = -K_1 x$ と書けることを示し, 比例定数 K_1 を a, k_0, q を用いて表せ。

問5 問4の場合(電子雲の中心 O' の座標 $-x$ が $-a < -x < 0$), 原子核から負電荷 $-q$ の電子雲に作用する力が,

$$f = Kx$$

と書けることを示し, 比例定数 K を a, k_0, q を用いて表せ。

電子雲の中心座標 O' の座標が $0 < -x < a$ の場合も, 原子核から電子雲に作用する力は同じ式で表される。そこで, 以下, 中心座標 $-x$ の電子雲に作用する力を, $|x| < a$ の範囲で

$$f = Kx \tag{8}$$

とおく。

図6のように, 誘電体の平板に右向きの一様な外部電場をかけると, 誘電体内の原子は分極を起こして誘電体の右端面の領域 I に分極により正の電荷が, 左端面の領域 II には分極による負の電荷が現れる。誘電体の端面は十分に広く, 分極電荷は一様に現れるとする。右向き (x 軸の向き) を正として, 誘電体内の電場を $E(t)$, 外部電場を $E_{\text{ex}}(t)$, 誘電体の分極による逆向きの電場を $-E_p(t)$ とすると,

$$E(t) = E_{\text{ex}}(t) - E_p(t) \tag{9}$$

が成り立つ。

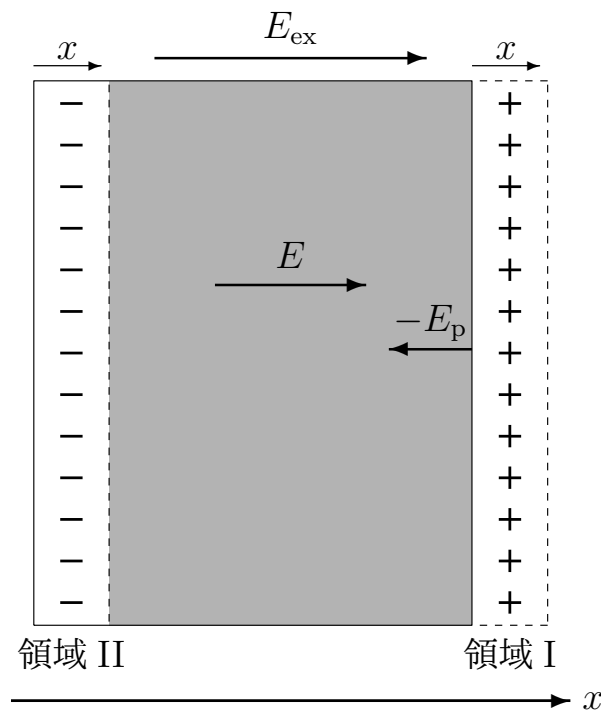


図6

一般に、2つの正負の電荷が対をなして存在するとき、これを電気双極子という。点電荷 $q (> 0)$ と $-q$ が距離 x だけ離れている電気双極子は、双極子モーメント $p = qx$ をもつ。

電子雲の変位を $-x(t)$ 、原子数密度 (単位体積あたりの原子数) を N とするとし、誘電体の端面 (領域 I) に一様な面密度 σ の電荷が現れるとする。図 6 の平板の誘電体の厚さ (領域 I と領域 II の距離) を L 、断面積を S としたとき、平板全体の双極子モーメント P は体積 LS に含まれる原子の双極子モーメント $p = qx$ の和であり、 $P = LSNp$ となる。また、 P は電荷面密度 σ を用いて、 $P = LS\sigma$ と表せるから、 $\sigma = Nqx(t)$ となる。

問 6 時刻 t における分極電荷による電場 $-E_p(t)$ が $x(t)$ に比例することを示し、 $E_p = K_2x(t)$ としたとき、比例定数 K_2 を、 ϵ_0, N, q を用いて表せ。

誘電体の比誘電率 ϵ_r は、式 (9) を用いると、誘電体内の電場 $E(t)$ 、外部電場 $E_{ex}(t)$ と分極電場 E_p より、

$$\epsilon_r = \frac{E_{ex}(t)}{E(t)} = 1 + \frac{E_p(t)}{E(t)} \quad (10)$$

と表される。したがって、 ϵ_r は原子の双極子モーメント $p = qx$ により決まることがわかる。

V 電子雲の振動と屈折率

問 5 で求めたように、誘電体内原子の電子雲には、その中心座標が $-x$ のとき、原子核から力 $f = Kx$ が作用する。また、電子雲には、式 (9) で与えられる誘電体内の電場 $E(t)$ から $-qE(t)$ の力が作用する。その結果、電子雲 (質量 m 、電荷 $-q$) の運動方程式は、

$$m \frac{d^2}{dt^2}(-x) = Kx - qE(t)$$

よって、

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega_0^2x + qE(t) \quad (11)$$

となる。ここで、 $K = m\omega_0^2$ とおいた。

問 7 外部から角振動数 ω の電場 $E_{ex}(t)$ をかけるとき、定常状態では誘電体内の電場と電荷も ω で振動すると考えられる。そこで、 $E(t) = E_0 \cos \omega t$ ($E_0 > 0$) とし、電荷の位置座標を、

$$x(t) = A \cos \omega t \quad (12)$$

とおく。運動方程式 (11) より、振幅 A を m, q, ω, ω_0 および E_0 を用いて表せ。

問 8 電子の電荷の大きさ (電気素量) を e 、電子の質量を m_e とし、 $q = \beta e, m = \beta m_e$ とおく。角振動数 ω_0^2 を β, a, e, k_0, m_e を用いて書き表せ。また、 $a = 1.0 \times 10^{-10} \text{ m}$ 、 $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ 、 $k_0 = 9.0 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$ 、 $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ 、 $\beta = 7$ とし、 ω_0 を有効数字 2 桁の数値で求めよ。

問 9 (a) 誘電体の比誘電率 ϵ_r は、式 (10) で誘電体内の電場 $E(t)$ と外部電場 $E_{\text{ex}}(t)$ で表される。このとき、誘電体の屈折率を n とすると、問 6、問 7 より、

$$n^2 - 1 = N\alpha(\omega) \quad (13)$$

が成り立つことを示し、 $\alpha(\omega)$ を $\epsilon_0, \omega_0, m, q$ を用いて ω の関数として求めよ。

(b) (a) より、誘電体の屈折率 n は、原子数密度 N に依存することがわかる。さらに、問 8 の結果より、角振動数が $2.4 \times 10^{15} \text{ rad/s} < \omega < 5.0 \times 10^{15} \text{ rad/s}$ の可視光の屈折を考えるかぎり、 $\omega_0^2 \gg \omega^2$ となり ω^2 を無視することができる。 ω^2 の項を落とし、 $k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ とすると、 α は電子雲の半径 a だけで定まり、

$$\alpha = 4\pi a^3 \quad (14)$$

と表されることを示せ。

問 10 水 (液体) と 0°C 、1 気圧の空気の屈折率の実測値は、それぞれ $n_{\text{H}_2\text{O}} = 1.3$ 、 $n_{\text{Air}} = 1.00028$ である。式 (14) において水および空気分子の電子雲の半径 $a_{\text{H}_2\text{O}}$ 、 a_{Air} を適当に決めると、問 9 の原子の電気分極モデルにより求められる水 (液体) や空気の屈折率を、実測値に一致させることができる。そのときの水と空気分子の電子雲の半径を有効数字 2 桁の数値で求めよ。ただし、水分子と空気分子の分子数密度をそれぞれ $N_{\text{H}_2\text{O}} = 3.3 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$ 、 $N_{\text{Air}} = 2.7 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$ とする。

ここでは、電場がないときは分極していない原子や分子の電気分極を考えたが、一般には全体として電氣的に中性でも、水のように分極した分子 (極性をもつ分子) もある。屈折率に関係するのは可視光域の電磁波によって誘起される電気分極であり、ここではその一つのモデルを扱った。

第 2 問 B (80 点)

大気中の光線軌道

ここでは、大気は質量 m の 1 種類の気体分子からなる理想気体とし、誘電体と見なすことができ、第 2 問 A で考えたように大気の気体分子に原子の電気分極モデルを適用できるとする。したがって可視光に対する大気の屈折率 n は、その分子数密度 (単位体積あたりの分子数) N 、係数 α を用いて、

$$n^2 - 1 = \alpha N \quad (1)$$

で与えられる。

I 蜃気楼

地表と上空の大気の間には大きな温度差があると「蜃気楼」が生じることが知られている。冷たい海面で空気が冷やされることにより発生する「浮き島」はその 1 例であり、早春の富山湾にしばしば現れることが知られている。

地表面は水平であるとする。海面からの高さ h が増加するにしたがって大気の絶対温度 (以後単に温度) T が上昇して大気の屈折率が変化する場合を考える。重力の影響は考えず、したがって気圧は高度によらず 1 気圧とする。

可視光の標準大気 ($T_0 = 273 \text{ K}$, $p_0 = 1$ 気圧) の屈折率を $n_0 = 1.00028$ とする。

大気の温度、したがって屈折率は地表面からの高度のみで決まり、水平方向には一定である。高度 h での大気の屈折率が $n(h)$ で与えられるとして、地表面からなす角 θ_S の方向に発せられた光線に関する屈折の法則 (スネルの法則) を考える。

問 1 図 1 のように、大気を厚さ Δh の層に分割する。高度 $0 \sim \Delta h$ での大気の屈折率を n_S とする。 $l = 1, 2, 3, \dots$ として、高度が $h_{l-1} (= h_l - \Delta h) \sim h_l$ で光線が水平面となす角を θ_l 、大気の屈折率を n_l とする。ここで、 $h_0 = 0$, $n_1 = n_S$, $\theta_1 = \theta_S$ である。高度が $h_l \sim h_{l+1} (= h_l + \Delta h)$ で光線が水平面となす角を θ_{l+1} 、大気の屈折率を n_{l+1} とし、屈折点 P での屈折の法則を記せ。

次に $l = 1, 2, 3, \dots$ を代入した式を書き表した上で、 $\Delta h \rightarrow 0$, $h_l \rightarrow h$, $\theta_l \rightarrow \theta(h)$, $n_l \rightarrow n(h)$ として、関係式

$$n(h) \cos \theta(h) = n_S \cos \theta_S \quad (2)$$

を導け。

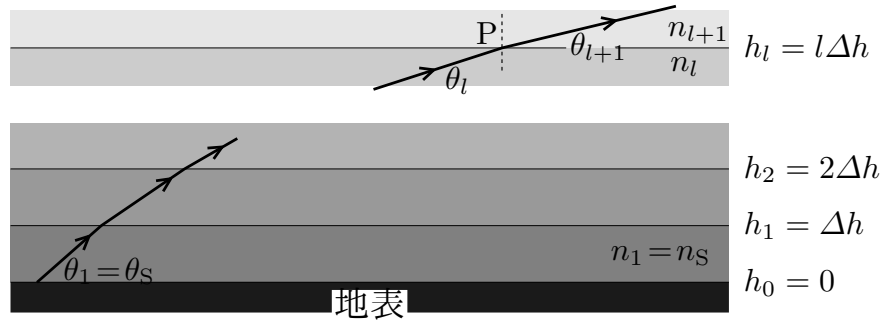


図 1

高度 h が $0 \leq h \leq H$ の範囲では温度 $T(h)$ が h に比例して上昇し, $H < h$ では一定になる場合を考えて,

$$\frac{T(h)}{T_S} = \begin{cases} 1 + \frac{T_H - T_S}{T_S} \frac{h}{H} & 0 \leq h \leq H \\ \frac{T_H}{T_S} & H < h \end{cases}$$

とする。ここで, $T_S = T(0) < T_H = T(H)$ である。

問 2 (a) 高度 h での圧力を $p(h)$, 分子数密度を $N(h)$ として, 理想気体の状態方程式を, $T(h)$, $p(h)$, $N(h)$, およびボルツマン定数 k_B を用いて書き下せ。

(b) 高度 h ($0 \leq h \leq H$) での大気分子数密度 $N(h)$ が,

$$\frac{N(h)}{N_S} = 1 - \frac{N_S - N_H}{N_S} \frac{h}{H}$$

で与えられることを導け。ここで, $N_S = N(0)$, $N_H = N(H)$ である。 $T_H - T_S < 20 \text{ K}$ では, $\frac{T_H - T_S}{T_S}$ は微小量 $\left(\frac{T_H - T_S}{T_S} \ll 1\right)$ とみなすことができるとして,

$$\frac{T_H}{T_S} + \frac{T_S}{T_H} \doteq 2$$

と近似できること, および, 近似公式

$$|x| \ll 1 \text{ のとき } \frac{1}{1+x} \doteq 1-x$$

を用いてよい。

(c) 高度 h での大気屈折率 $n(h)$ が,

$$n(h) = \begin{cases} \sqrt{n_S^2 - (n_S^2 - n_H^2) \frac{h}{H}} & 0 \leq h \leq H \\ n_H & H < h \end{cases} \quad (3)$$

で与えられることを導け。ここで, $n_S = n(0)$, $n_H = n(H)$ である。

地表面 ($h = 0$) に沿って水平方向右向きに x 軸をとり、地表面から上方へなす角 θ_S の方向に発せられた光線の軌道を考える。光線は高さが h_m ($\leq H$) の最高点に達するとその後下降するとし、軌道の方程式を $h = f(x)$ 、光線が地表面となす角を θ (地表面に対して上向きを正、下向きを負) とすると、

$$\frac{dh}{dx} = \tan \theta = \pm \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1} \quad (4)$$

と書ける。ここで、式 (4) の最右辺で、 $+$ 符号は光線が上昇しているときの方程式を表し、 $-$ 符号は下降しているときの方程式を表す。

- 問 3 (a) 光線軌道の最高点の高さ h_m における屈折率 $n(h_m) = n_m$ を n_S と θ_S を用いて表せ。なお、最高点 $h = h_m$ では $\frac{dh}{dx} = 0$ であることに注意せよ。
 (b) また、最高点の高さが h_m のとき、式 (2), (3) を用いると、上昇する場合の式 (4) が $0 \leq h \leq h_m$ で、

$$\frac{dh}{dx} = \sqrt{a \left(1 - \frac{h}{b}\right)}, \quad a = a_m \frac{h_m}{H} \quad (5)$$

と書けることを示し、定数 a_m と b を h_m, n_H, n_S, n_m の中で必要なものを用いて表せ。

- 問 4 原点 $(x, h) = (0, 0)$ を通り、式 (5) を満たす光線軌道は放物線であり、

$$h = cx + dx^2 \quad (6)$$

と表される。定数 c, d を a と b を用いて定めよ。

- 問 5 $n_0 = 1.00028$, $T_S = 275$ K (2°C), $T_H = 290$ K (17°C), $H = 20$ m, 観測者は地表面 ($h = 0$) にいるとする。また、島の山は海岸線から鉛直上方にそびえているとして、以下の問いに答えよ。

- (a) 観測者が浮き上がった島の山の中腹 (海岸線からの高さ h_g) を見ることができたとする。高さ h_g を、観測者から島 (の海岸線) までの水平方向の距離 L の関数として定数 b, c を用いて表せ。最も遠くにある島を見ることができるのは、①島の山の頂上であるか、②島の海岸線であるか、番号 ①, ②で答えよ。
 (b) 観測者が島の一部を見ることが出来る島までの水平距離の上限値 L_{\max} を、 b と c を用いて定めよ。

以下では $h_m = H$ の場合を考える。

- (c) 式 (1) より、 $n^2 - 1 = \alpha N \ll 1$ であることに注意して、定数 c を n_0^2, T_0, T_S, T_H を用いて表せ。また、 c を有効数字 2 桁の数値で求めよ ($T_0 = 273$ K)。

ヒント: $h_m = H$ のとき、 $a \doteq n_S^2 - n_H^2$ と近似できる。

- (d) L_{\max} とそのときの仰角 (光線軌道と地表面のなす角) θ_S を有効数字 2 桁の数値でそれぞれ求めよ。

II 大気の分布

I では、重力の影響を無視して地表面付近のみでの大気の温度変化を考慮に入れて大気の屈折率を考えた。地表面からの高度が高くなると、大気の温度は低下するが、大気の数密度は重力による影響を大きく受ける。そこでここからは、簡単化のため大気の温度 T はどこでも一定とし、重力の影響による大気の屈折率変化を考える。

地表面からの高度が高くなると、気圧が低くなり、大気の数密度は減少する。ここでは、大気の数密度が高度 h とともにどのように変化するかを考える。重力加速度の大きさは g で一定とする。

- 問 6 図 2 のように、高度 h と $h + dh$ の間の大気にはたらく力のつり合いを考える。この間の大気の数密度は、高度 h での数密度 $N(h)$ に等しいと考えてよい。これより、数密度 $N(h)$ が、

$$N(h) = N_0 \exp\left(-\frac{mgh}{k_B T}\right) \quad (7)$$

となることを導け。ここで、自然対数の底を e とするとき、 $\exp(x)$ は e^x を表す。また、 N_0 は $h = 0$ での大気の数密度である。

ヒント： x の関数 y が方程式

$$\frac{dy}{dx} = ay \quad (a : \text{定数})$$

を満たすとき、この関数 y は C を任意定数として、

$$y = C e^{ax}$$

と表される。

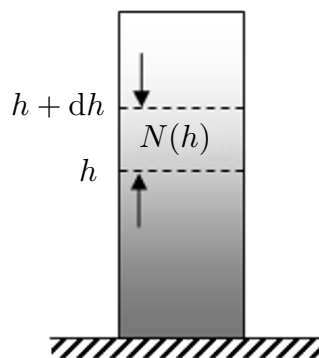


図 2

III 光線軌道の曲率

I で考えたときと同様に、高度 h での大気の屈折率を $n(h)$ ，地表面 $h = 0$ から発せられた光線 (可視光) が、高度 h の点で地表面となす角度を $\theta(h)$ として、光線の軌道を考える。地球表面の丸みは無視する。

問 7 高度 h の点での光線軌道の曲率半径 (その点で軌道に重なる円の半径) を R とする。 $d\theta = \theta(h + dh) - \theta(h)$ として図 3 を参考に、 $\frac{1}{R}$ を $\theta(h)$ と $\frac{d\theta}{dh}$ を用いて表せ。ここで、 $d\theta$ と dh は微小量であり、微小量の 2 乗以上の項は無視してよい。図 3 では、上に凸な光線軌道を描いているので、軌道と水平面のなす角 θ は h が増加するとともに減少する。したがって、 $d\theta < 0$ であるから高度 h の点 P で軌道に重なる扇形の微小な中心角の大きさは、 $-d\theta (> 0)$ と書かれることに注意せよ。

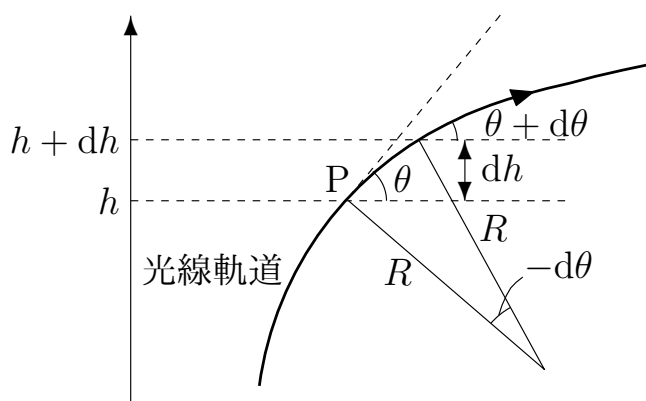


図 3 扇形の微小な中心角の大きさは $-d\theta (> 0)$ と書かれる。

問 8 問 7 の結果に問 1 の式 (2) を用いて関係式

$$\frac{1}{R} = -\frac{1}{n} \frac{dn}{dh} \cos \theta(h) \quad (8)$$

を導け。

問 9 地表面で水平方向からわずかに上向きに放射された光線の、地表面近くの高度 $h \simeq 0$ の点での軌道の曲率半径 R を m, g, n_E, T および k_B を用いて求めよ。ただし、放射された光線に対する大気の屈折率を $n = n_E$ ，その分子数密度を $N = N_E$ ，係数を $\alpha = \alpha_E$ として、式 (1) が成立する。また、 $\frac{mgh}{k_B T} \ll 1, (n_E - 1) \ll 1$ とし、地表面近く $h \simeq 0$ で、 $\theta(h) \simeq 0$ としてよい。

問 10 地球で、地表面から水平に放射された光線が地表面近くで描く軌道の曲率半径を求め、この光線が地球外に出ていくかどうかを数値的に判定せよ。ただし、地球は半径 $R_E = 6.4 \times 10^3$ km の球形とする。また、 $n_E = 1.00027$ ， $m = 29 \times 1.66 \times 10^{-27}$ kg， $T = 300$ K， $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K， $g = 9.8$ m/s² である。

金星の大気は二酸化炭素の理想気体からなり、二酸化炭素に対して電気分極モデルが適用できるとする。また、金星表面の大気圧を $p_V = 93$ 気圧 (1 気圧 $= 1.0 \times 10^5$ Pa), 大気の温度を $T_V = 740$ K とする。

問 11 金星表面から水平に放射された可視光の光線の曲率半径を求めて、この光線が金星外へ出ていくかどうか数値的に判定せよ。ただし、金星は半径 $R_V = 6.0 \times 10^3$ km の球形、金星表面での重力加速度の大きさを $g_V = 8.9$ m/s², 二酸化炭素分子 1 個の質量を $m_C = 44 \times 1.66 \times 10^{-27}$ kg とする。また、金星大気の屈折率 $n = n_V$ は、その分子数密度 $N = N_V$, 係数 $\alpha = \alpha_V$ として式 (1) が成立する。係数 α_V は電子雲の半径を $a_C = 1.4 \times 10^{-10}$ m として $\alpha_V = 4\pi a_C^3$ と表される。

第3問 (80点)

特殊相対論

力の作用しない物体が等速度運動する座標系を慣性座標系 (慣性系) という。ある慣性系に対して任意の方向に任意の速さで平行移動する座標系も慣性系であるので、慣性系は数限りなく存在する。しかしいかなる慣性系で観測しても物理法則は同じである。これを相対性原理という。

アインシュタインは、真空中の光の速さ (ここでは c と表す) はいかなる慣性系においても同じであるという光速不変の原理を提唱した。この原理に基づく理論が特殊相対性理論である。光速不変の原理を認めると、時間は座標系に依存することになる。

ある慣性系 $O-xyz$ (S 系) に対して一定の速さ V ($< c$) で $+x$ 方向に移動する別の慣性系 $O'-x'y'z'$ (S' 系) を考えよう (図1 参照)。

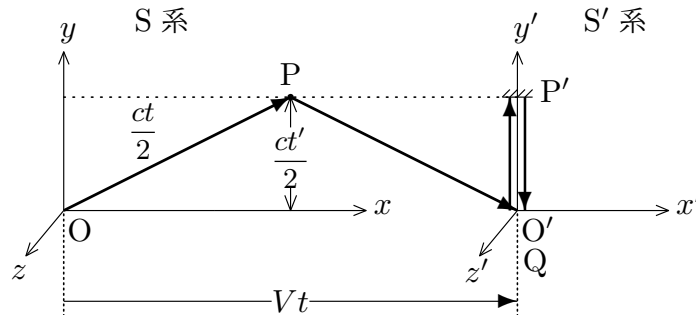


図1. S 系と S' 系

S' 系の原点 O' が S 系の原点 O に重なった瞬間に、 S' 系の原点 O' から発せられた光が y' 軸に沿って正方向に進み、 y' 軸上の点 P' にある鏡で反射して原点 O' に戻ってきたとする。光が S' 系の点 P' に到達した瞬間の P' の位置を S 系の点 P 、原点 O' に戻ってきた瞬間の O' の位置を S 系の点 Q とする。 S' 系において光が O' から出て P' で反射し、再び O' に到る現象は、 S 系では光が O から出て P で反射し、 Q に到ると観察される。 S' 系で光が O' から出て鏡で反射し再び O' に戻ってくるまでの時間を t' 、 S 系で O から出て P で反射して Q に到る時間を t とする。光速不変の原理によればどちらの慣性系でも光速は同じであるから、 $2\overline{O'P'} = ct'$ 、 $\overline{OP} + \overline{PQ} = ct$ である。 $\overline{OP} = \overline{PQ}$ 、 $\overline{OQ} = Vt$ であるから $\left(\frac{ct}{2}\right)^2 = \left(\frac{Vt}{2}\right)^2 + \left(\frac{ct'}{2}\right)^2$ 、すなわち時間 t と t' は

$$t' = t \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} \quad (1)$$

の関係にある。ニュートン力学においては時間は座標系に依存しない絶対的な量であるが、光速不変の原理を認めると、時間は座標系に依存することがわかる。

慣性系に対して運動する乗り物に乗っている人が経験する時間を考えよう。この時間は、

乗り物とともに移動する座標系で観測される時間であり、固有時と呼ばれる。乗り物の速度 $v (< c)$ が時間的に変化する場合でも、慣性系の微小時間 dt と、乗り物とともに移動する座標系で観測される固有時の微小時間 $d\tau$ (τ はギリシャ文字タウ) を考えると、両者は式 (1) と同じ関係で結ばれる。

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{dt}{\gamma} \quad (2)$$

ここで

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (3)$$

は v に依存する量である。

ニュートン力学では、ある慣性系において質量 m の粒子が微小時間 dt の間に、位置ベクトル \vec{r} が $d\vec{r}$ だけ微小変位するとき (図 2 参照), 粒子の速度 $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ を使って, 粒子の運動量 \vec{p} を次の式で定義する。

$$\vec{p} = m \vec{v} \quad (4)$$

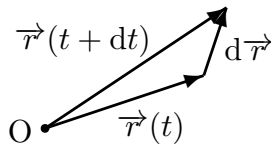


図 2

相対論においては、時間は座標系に依存するので式 (4) は適当ではないが、粒子とともに移動する時計で計った時間 (固有時) は、粒子に固有な時間であるので、固有時の微小時間 $d\tau$ を使って運動量を

$$\vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{d\tau} \quad (5)$$

と表そう。式 (2) を使うと式 (5) は

$$\vec{p} = \frac{m}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \frac{d\vec{r}}{dt} = \gamma m \vec{v} \quad (6)$$

と表される。式 (6) の $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ は相対論における運動量の定義である。

相対論においてもニュートン力学と同様に、運動量の時間変化を力と定義する。すなわち力 \vec{F} と運動量 \vec{p} の関係は次の式で与えられる。

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (7)$$

また力 \vec{F} を受けて粒子が $d\vec{r}$ だけ微小変位するとき、力のなす微小仕事 dW は次式で与えられる。

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (8)$$

ここで $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ は \vec{F} と $d\vec{r}$ とのスカラ積である。

一般に2つのベクトル \vec{A} と \vec{B} があるとき、各ベクトルの大きさ A, B と2つのベクトルのなす角度 θ の余弦との積 $AB \cos \theta$ を2つのベクトルのスカラー積 (内積) といい、 $\vec{A} \cdot \vec{B}$ と表す (図3 参照)。すなわち

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

である。

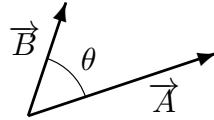


図3

静止している質量 m の粒子を速さ v になるまで加速するのに必要な仕事を求めてみよう。粒子の速度を \vec{v} とすると $d\vec{r} = \vec{v} dt$ であるから、 γ が v に依存することに注意して

$$\begin{aligned} dW &= \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \frac{d(\gamma m \vec{v})}{dt} \cdot \vec{v} dt = m \left(\gamma \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\gamma}{dt} \vec{v} \right) \cdot \vec{v} dt \\ &= m (\gamma \vec{v} \cdot d\vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} d\gamma) \end{aligned}$$

よって

$$dW = m (\gamma v dv + v^2 d\gamma) \quad (9)$$

ここで dv は速さの微小変化であり、微小ベクトル $d\vec{v}$ の大きさではない。 dv はベクトル $d\vec{v}$ の、ベクトル \vec{v} 方向の成分の大きさであること、すなわち $dv = \frac{\vec{v}}{v} \cdot d\vec{v}$ であることに注意されたい。

問1 式(3)を使って式(9)より次の式を導け。

$$dW = mc^2 \frac{d\gamma}{dv} dv = mc^2 d\gamma \quad (10)$$

粒子を静止状態から速さ v まで加速するのに必要な仕事を運動エネルギーという。運動エネルギーを K とすると、 $v=0$ のとき $\gamma=1$ であるから、式(10)より

$$K = mc^2 \int_0^v \frac{d\gamma}{dv} dv = mc^2 \int_1^\gamma d\gamma = mc^2(\gamma - 1) \quad (11)$$

である。この式を

$$K = E - E_0 \quad (12)$$

$$E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (13)$$

$$E_0 = mc^2 \quad (14)$$

と表すと、 E は質量 m の粒子が速さ v で運動しているときに粒子がもつ全エネルギー、 E_0 は静止している粒子がもつエネルギー (静止エネルギー)、その差 $E - E_0$ が運動エネルギーであると解釈できる。式(6)、(13)から m, p, E の間には次の関係がある。

$$(cp)^2 + (mc^2)^2 = E^2 \quad (15)$$

問2 (a) 仮に質量 m のロケットが無重力空間の慣性系において一定の力 F を受けて静止状態から加速されるとしよう。時間 t 後の速さ v を求めよ。運動は1次元であるとし、相対論的に考えよ。

$t \ll \frac{mc}{F}$ のとき、 $v(t)$ はニュートン力学の結果に一致することを確かめよ。

(b) 時間 t の間に飛行した距離 x を求めよ。

ヒント：例えば $u = (Ft)^2$ と変数変換するとよい。

(c) ロケットの搭乗者が経験する時間(固有時) τ とロケットの運動を観測する慣性系における時間 t との関係は

$$\tau = \int_0^t \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} dt$$

である。(a)の場合に固有時 τ と t の関係を求めよ (τ を t で表せ)。

ヒント：不定積分 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \log \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + \text{定数}$ を利用するとよい。

問3 (a) 地上の重力加速度に近い加速度 $\frac{F}{m} = 10 \text{ m/s}^2$ で加速されるとき、ロケットの速さが光速 ($c = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$) の0.9倍となるまでの時間を日 (1日 = 24時間 = $8.64 \times 10^4 \text{ s}$) の単位で求めよ。有効数字は2桁とする (以下同様)。

(b) ロケットの速さが光速の0.9倍となるまでに飛行する距離を、光年 (1光年 = $3.00 \times 10^8 \text{ m/s} \times 8.64 \times 10^4 \text{ s/day} \times 365 \text{ day} = 9.46 \times 10^{15} \text{ m}$) の単位で求めよ。

(c) ロケットの速さが光速の0.9倍となるまでに搭乗者が経験する時間を日の単位で求めよ。

磁束密度 \vec{B} の磁場が存在する空間において電荷 q の荷電粒子が速度 \vec{v} で運動しているときに受ける力 \vec{F} は次式で表される。

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (16)$$

ここで $\vec{v} \times \vec{B}$ は \vec{v} と \vec{B} とのベクトル積である。

一般に2つのベクトル \vec{A} と \vec{B} が作る平面 (平行四辺形) に垂直で、大きさが平行四辺形の面積 $AB \sin \theta$ (θ は2つのベクトルがなす角度), 方向が \vec{A} から \vec{B} へ右ねじを (180° より小さい角度) まわすときに右ねじが進む向きのベクトルを \vec{A} と \vec{B} とのベクトル積 (外積) といい、 $\vec{A} \times \vec{B}$ と表す (図4参照)。なお \vec{A} と \vec{B} が平行 ($\theta = 0$) または反平行 ($\theta = 180^\circ$) のときは

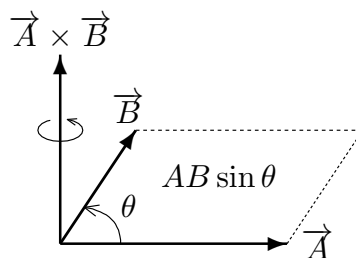


図4. ベクトル積

$\vec{A} \times \vec{B} = 0$ である。ベクトル積は積の順序が逆になると符号が反転する ($\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B}$) ことに注意されたい。

磁場中においては、荷電粒子が受ける力はずねに粒子の速度と垂直に作用するので、粒子は仕事をせず、粒子の運動エネルギーは変化しない。一様な磁場中では荷電粒子が一定の速さで円運動することが可能である。

問4 質量 m 、電荷 $q (> 0)$ の荷電粒子が、磁束密度の大きさ B の一様な磁場中において半径 R の円運動をしている。相対論的に考えて荷電粒子の速さ v を求めよ (v を m, q, B, R で表せ)。

問5 粒子の角速度 (回転の角振動数) $\omega = \frac{v}{R}$ が

$$\omega = \frac{qB}{m} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

と表されることを示せ。粒子の速度が光速に比べて小さいとき ($v \ll c$) には ω は一定値 ($\frac{qB}{m}$, サイクロトロン角周波数) であるが、相対論的には速度に依存する。

光や電子などの微視的粒子は粒子的な性質と波動的な性質の両方をもつ。これを粒子と波動の**2重性**という。この2重性は20世紀前半に確立した量子力学によって解明された。古典的な粒子と波動の2重性は、量子論的な「量子」の特性である。おおむね、光は発生するときと消滅するときは粒子 (光子) として振る舞い、空間を伝わる時は波動 (光波) として振る舞うと考えてよいだろう。光波は周波数 ν と波長 λ で特徴づけられ、光子はエネルギー E と運動量 p で特徴づけられる。 ν と λ , E と p の間には、それぞれ次の関係がある。

$$\lambda = \frac{c}{\nu}, \quad p = \frac{E}{c} \tag{17}$$

光子の質量は0であるので、式(15)において $m = 0$ とおけば式(17)の p と E の関係を得る。光子の運動量の大きさ p , エネルギー E は、光波としての波長 λ , 周波数 ν と、それぞれ次の関係で結ばれる。 h はプランク定数である。

$$p = \frac{h}{\lambda}, \quad E = h\nu \tag{18}$$

光子の質量は0であるが運動量をもつので、光子を放出するときの反作用を利用して推進するロケットを考えることができる。光子の反作用は無重力の宇宙空間における有力な推進力の候補のひとつである。このようなロケットを光子ロケットという。

問2ではロケットを推進する力の起源は考えなかったが、ロケットを加速するにはエネルギーが必要である。仮に静止エネルギー (質量) を損失なく光子のエネルギーに変換できる理想的な光子ロケットが実現できたと仮定する。この光子ロケットが、無重力空間において静止

状態から加速されるとしよう。ロケットのはじめの質量を m_0 、ロケットの質量が m になったときのロケットの速さを v とする。ロケットの運動は 1 次元であるとする。

エネルギーの保存則によれば、速さ v のロケットのエネルギー γmc^2 とこの間に放出された光子の全エネルギー E_p の和は、静止していたロケットのエネルギー m_0c^2 に等しい。

$$\gamma mc^2 + E_p = m_0c^2 \quad (19)$$

また運動量保存則によれば、ロケットの速さが v となったときのロケットの運動量の大きさ γmv は放出された光子の全運動量の大きさ $\frac{E_p}{c}$ に等しい。

$$\gamma mv = \frac{E_p}{c} \quad (20)$$

問 6 式 (19), (20) から E_p を消去して、質量の比 $\frac{m}{m_0}$ を $\frac{v}{c}$ で表せ。

問 7 (a) 理想的な光子ロケットの運動量の時間変化 $\frac{dp}{dt}$ と加速度 $\frac{dv}{dt}$ の間には次の関係があることを示せ。

$$\frac{dp}{dt} = \frac{m_0}{\left(1 + \frac{v}{c}\right)^2} \frac{dv}{dt}$$

(b) 静止状態から一定の加速度 $\frac{dv}{dt} = a$ で加速される理想的な光子ロケットの運動量 p を時間 t の関数として求めよ。

問 8 (a) 理想的な光子ロケットの速さが光速の 0.9 倍になったとき、ロケットの質量 m は始めの質量 m_0 の何 % になっているか。有効数字は 2 桁とする (以下同様)。

(b) 理想的な光子ロケットの速さが光速の 0.9 倍になったとき、ロケットの運動量 p は m_0c の何 % か。

問 9 (a) 理想的な光子ロケットが地球上の静止座標系 (慣性系とみなしてよい) からみて静止状態から一定の加速度 10 m/s^2 で加速されるならば、速度が光速の 0.9 倍になるまでの時間はどれほどか。この間に飛行する距離はどれほどか。時間は地球上の静止座標系における時間で日の単位で答えよ。また距離は光年の単位で答えよ。

(b) 理想的な光子ロケットが、出発するときに 10 m/s^2 の加速度を与える一定の推進力 F (問 2, 3 の F と同じ) でその後も加速されるならば、速度が光速の 0.9 倍になるまでの時間はどれほどか。この間に飛行する距離はどれほどか。時間は日の単位で、距離は光年の単位で答えよ。

