光線追跡ともつれた光の生成

便利な公式

$$\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \vec{B}\left(\vec{A} \cdot \vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right)$$

はじめに

$\vec{E}$ を電場, $\vec{H}$ を磁場, $\vec{D}$ を電束密度, $\vec{B}$ を磁束密度とする. 電束密度は $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ で与えられ, $\vec{P}$ は媒質の分極, ϵ_0 は真空の誘電率である.

この問題では非磁性の誘電体のみを考えるので $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ であり, μ_0 は真空の透磁率である. 電磁場のエネルギー密度とエネルギー流密度はそれぞれ, $u_{em} = \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B})$ とポインティングのベクトル $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ で与えられる.

均質な誘電体中では, 単色の平面波の光はその角振動数 ω と波数ベクトル $\vec{k}$ で記述される. マクスウェルの方程式により $\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B}$ および $\vec{k} \times \vec{H} = -\omega \vec{D}$ が得られる. このような波の場合 $\vec{D}$ および $\vec{B}$ の位置 $\vec{r}$ と時間 t に対する依存性は位相 $(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ の正弦関数で与えられる.

Part A. 等方的な誘電体における光の伝搬（1.0 点）

媒質が等方的な場合 $\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}$, $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ と表される. χ 及び $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi)$ はそれぞれ媒質の電気感受率及び誘電率である. このような媒質中の角振動数 ω の光波は, $\vec{k}$ 方向に速度 (位相速度と呼ばれる) $v_p = c/n$ で伝搬する. ここで, c は真空中の光速, n は媒質の屈折率である. また光線を使って光の波の列を表すこともできる. 光線の伝搬は, 電磁場エネルギー流れの方向と速度 v_r によって特徴づけられる.

均質で等方的な誘電体の中を伝播する角振動数 ω と波動ベクトル $\vec{k}$ 平面波光を考えよう.

A.1	位相速度 v_p を ϵ と μ_0 で表せ。	0.4 点

A.2	光波に対する誘電媒質の屈折率 n はどのようなものか。	0.2 点

A.3	電磁波のエネルギーの流れの方向 $\hat{S} \equiv \vec{S}/S$ と速度 v_r を求めよ。	0.4 点

Part B. 一軸性誘電体媒体中の光の伝搬（4.8 点)

ここでは，誘電体媒体が一軸性であると仮定する。すなわち，媒体中に固定された特別な方向，光軸と呼ばれる方向に沿って，電気的に異方性であるとするが，現在はこれを z 方向とする。このような場合，電束密度 $\vec{D}$ と電場 $\vec{E}$ は，$D_x = \epsilon E_x$, $D_y = \epsilon E_y$, と $D_z = \epsilon' E_z$ の関係にあり， x, y, z 軸は相互に直交している。その結果，光波の位相速度は異方的であり，$\vec{k}$ と $\vec{D}$ の方向にも依存することになる。 $n_o = c\sqrt{\mu_0\epsilon}$ と $n_e = c\sqrt{\mu_0\epsilon'}$ として， 以下 **B.1**, **B.2**, **B.3** の質問に答えよ.

B.1　単色の平面光波の波動ベクトル $\vec{k}$ が， xz 平面上で $\vec{k} = k(\sin\theta, 0, \cos\theta)$ のようになっているとしよう。各角度 θ において，光波に対して $\vec{D}$ と $\vec{B}$ はどの方向が許されるか？ 可能なすべての屈折率を求め，その屈折率を θ, n_o, n_e で表せ。屈折率の値が 1 つしか許されない角度 θ を求めよ。 1.5 点

B.2　光の波の偏光（電場 $\vec{E}$ の方向）は， xz 平面に対して垂直な場合と平行な場合がある。 **B.1** で見つけた光の波について，その偏光を単位ベクトルで表し，それが通常の波であるか異常な波であるかを示せ。また， $\tan\alpha$ を計算せよ。α は $\vec{E}$ と $\vec{D}$ の間の角度である。ただし，α は $\vec{E}$ から $\vec{D}$ に時計回りの角を正とする。 0.8 点

B.3　**B.1** と **B.2** の結果を， $\vec{k}$ と z 方向との角度は θ のままで，しかし $\vec{k}$ が xz 平面上にない場合の一般的なケースに拡張する。屈折率のすべての可能な値と，それに対応する偏光を求めよ。 0.6 点

一軸性の媒体では，光波の方向 $\vec{k}$ と光線の方向が異なる場合がある。 光波の位相速度は，c/n で与えられる。n は $\vec{k}$ に沿った屈折率であり, 一方，光線の速度は，エネルギーの流れの方向と速度によって共同で定義される。

B.4　問題 **B.1-3** に続いて，$\vec{k} = k(\sin\theta, 0, \cos\theta)$ の光の波を考える。 $\hat{k} \equiv \vec{k}/k$ と光線の方向 $\hat{S}$ とのなす角を α_r とする (α_r は，$\hat{S}$ から $\hat{k}$ へ 時計回りに進むときを正とする)。このとき， $\tan\alpha_r$, 光の速さ v_r，$\hat{S}$ をすべて求めよ。 これらの結果を用いて，光線の屈折率 $n_s = c/v_r$ を $\hat{S}, \hat{x}, \hat{z}, n_o, n_e$ で表せ。 0.8 点

図 1 のように，1 と書かれた等方性媒質と 2 と書かれた異方性媒質の界面を A から B へ光線が伝わっていくことを考えよう。界面は yz 平面と一致しており，入射面は xz 平面である。入射の角度を θ_1 としよう。媒質 1 の屈折率は n, であり，媒質 2 の軸 z_2, y_2, x_2 に対する屈折率はそれぞれ n_e, n_o, n_o である。ここで， y_2 軸は y 軸と一致する。フェルマーの原理とは，光線が A から B に向かう経路の伝搬時間が最小になるというものである。xz 平面に平行な偏光を持ち，角度 θ_1 で入射する光に対して，フェルマーの原理は次の式を導く。

$$\bar{A}(\tan\theta_2)^2 + \bar{B}\tan\theta_2 + \bar{C} = 0 \qquad (1)$$

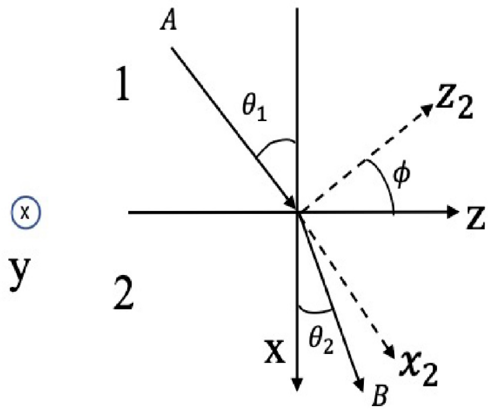

図 1: 等方性媒質 1 と異方性媒質 2 の界面を通る A から B への光の伝播。

B.5 $\bar{A}$, $\bar{B}$, と $\bar{C}$ を P_1, P_2, P_3, と $n\sin\theta_1$ で表せ。ここで，$P_1 = n_o^2\cos^2\phi + n_e^2\sin^2\phi$, $P_2 = n_o^2\sin^2\phi + n_e^2\cos^2\phi$, $P_3 = (n_o^2 - n_e^2)\sin\phi\cos\phi$. 式 (1) から, 対応する $\tan\theta_2$ を 2 つの特別な方向 $\phi = 0$ と $\phi = \pi/2$ のときに求めよ。 1.1 点

Part C. 光のもつれ（エンタングルメント）(4.2 points)

非線形な媒質のなかでは，電場 $\vec{E}$ は以下のような式により，分極ベクトル $\vec{P}$ と関係つけられる。

$$P_i = (\epsilon - \epsilon_0)E_i + \sum_j \sum_k \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k$$

ここで，i,j,k はそれぞれ 3 つの座標成分 x,y,z を任意にとり，$\chi_{ijk}^{(2)}$ は媒質の非線形な二次の分極の様子を表す定数である。$\chi_{ijk}^{(2)}$ が 0 でないということは光波が非線形な媒質中を伝わるにつれて，２つの光波に分かれる可能性があることを示唆している。

今，$\chi_{ijk}^{(2)}$ は全て 0 でないと仮定していると考えると，媒質中の電場は，それぞれ波数ベクトル $\vec{k}$, $\vec{k}_1$,$\vec{k}_2$ で伝播する，角周波数 ω, ω_1, ω_2 の 3 つの平面波の重ね合わせで構成される。$\omega \geq \omega_2$ 及び $\omega_1 \geq \omega_2$ と仮定する。

C.1 これらの角周波数と波数ベクトルとの間に成り立つ関係で，あり得るもの（位相整合の条件）を全て求めよ。光を光子で構成されたものと考えると，これらの条件は３つの光子に関する何の保存則を意味するか？

角周波数 ω，波数ベクトル $\vec{k}$，を持つ 1 つの光子が角周波数 ω_1，ω_2 及び波数ベクトル $\vec{k}_1$，$\vec{k}_2$ で伝播する 2 つの光子に分かれたばあいのこの保存則を表す方程式を書き下せ。

0.8 点

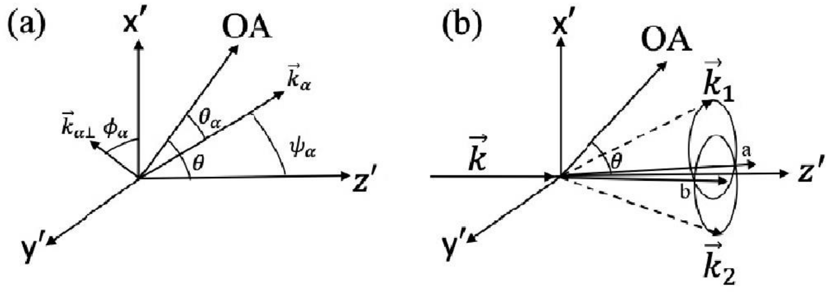

図 2: (a) ベクトル $\vec{k}_\alpha$ は，$\vec{k}_{\alpha\perp}$ を $x'y'$ 平面への射影として，$x'y'z'$ 座標系で角座標 $(\psi_\alpha, \phi_\alpha)$ をもつ。なお，$\vec{k}_\alpha$ は OA と角度 θ_α をなしている。(b) **e** 線の非共線的な分裂により，**e + o** 線が 2 つの円錐形になる。直線 $\overline{ab}$ は y' 軸に平行である。

C.2　一軸性媒体の中の光波を考える。通常光線を o で，異常光線を e で書き表す。この時，以下の 8 つの可能な光波の分裂の仕方が考えられる。 **o → o + o,**　**o → e + o,**　**o → o + e,**　**o → e + e,** **e → o + o,**　**e → e + o,**　**e → o + e,**　**e → e + e** 屈折率 n_o,n_e が共に ω の単調増加関数と仮定する。波数ベクトルに関して，問題 C1 と同じ記号を用い，$\vec{k}$，$\vec{k}_1$，$\vec{k}_2$ が同じ方向を向いている（共線的な）場合を考え，8 通りの分裂の仕方のうち，どの方法がありえないかを指摘せよ。　0.8 点

屈折率 $n_e < n_o$ の一軸性媒体中を波数ベクトル $\vec{k}$ と $\omega = \Omega_p$ をもって z' 方向に進む異常光線 (**e** 線）が入射した。同一直線上での **e → e + o** という分裂において, $k_1 = K_e$, $\omega_1 = \Omega_e$, $k_2 = K_o$, ，$\omega_2 = \Omega_o$ という位相整合条件が実現されたとする。 ここで，添え字 1 と 2 は異常光線 **e** 線おおび通常光線 **o** 線を表している。また，$\vec{k}_1$, $\vec{k}_2$ と $\vec{k}$ はいずれも z' 方向を向いている。図 2（a）に示すように，媒質の光軸（OA）は，$x'z'$ 平面にあり，z' 軸と角度 $\theta < \pi/2$ をなす。したがって，n_e は ω と θ の関数，すなわち，$n_e = n_e(\omega, \theta)$ となる。波動ベクトル $\vec{k}$ と $\omega = \Omega_p$ をもつ同じ入射異常光線 **e** が，非共線的な **e + o** 光線に分裂し，後者の 2 つの光線が，図 2(b) で示すように，$\omega_1 = \omega_2 = \Omega$, $k_1 = k_2$ の 2 つの円錐上に残るとする。なお，非共線的な分裂では，Ω_e は既に Ω_o に近く，また，Ω は Ω_e よりもわずかに小さいだけである。$\vec{k}$ に垂直な平面では，$\vec{k}_1$ と $\vec{k}_2$ の円錐上の 2 つの円は，y' 軸に平行な直線 $\overline{ab}$ と点 a，b で交差する。図 2(a) に示すように，$\vec{k}_\alpha (\alpha = 1, 2\,)$ は，光軸に対して 角度 θ_α をなし，$x'y'$ 平面への射影である $\vec{k}_{\alpha\perp}$ とともに角度座標 $(\psi_\alpha, \phi_\alpha)$ をもつ。各ベクトル $\vec{k}_\alpha$ は z' 軸からわずかにずれており，$|(\Omega - \Omega_e)/\Omega_e| \ll 1$,　$|\vec{k}_{\alpha\perp}|/k_\alpha \ll 1$，$|\theta_\alpha - \theta| \ll 1$ である。$\vec{k}_\alpha$ の z' 成分を次数 $k_{\alpha\perp}^2$ の項まで，角度 θ_α を次数 $(\theta_\alpha - \theta)^2$ の項まで考えるという近似を用いると，$\vec{k}_{2\perp} = (q_{x'}, q_{y'})$ は $M(q_{x'} + N)^2 + Mq_{y'}^2 = L$ を満す必要があることがわかる。

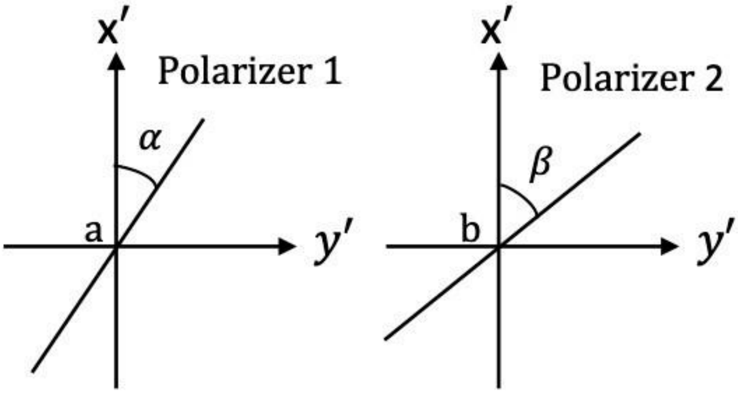

図 3: a と b を通過する光子の同時計数測定のための 2 枚の直線偏光子 1 と 2。

C.3　$M > 0$ としよう。M, N, L を Ω, Ω_e, Ω_o, K_e, K_o および

$$N_e(\omega,\theta) = \frac{1}{n_e(\omega,\theta)}\frac{\mathrm{d}n_e(\omega,\theta)}{\mathrm{d}\theta}$$

と，**o** 線と **e** 線の群速度 $u_o = \dfrac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}k_2}$ と $u_e = \dfrac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}k_1}$ を用いて表せ。
円錐の軸と z' 軸の間のなす角，及び，コーンの角度を M, N, L, K_o を用いて概算せよ。

1.3 点

問題 **C.3** では，光子が 2 つの光子に分裂して，点 a と点 b を通過したときに垂直な方向に偏光した 2 つの光子に分かれることがあることを示している。このような 2 つの光子をもつれた光子 (*entangled photon pair*) と呼ぶ。a を通過する光子 (a 光子) は $\hat{x}'$ 方向に偏光し, b を通過するもう一方の光子 (b 光子) は $\hat{y}' \perp \hat{x}'$ の方向に偏ることになり, もし a 光子 が $\hat{y}'$ に偏光すれば, b 光子 は $\hat{x}'$ に偏光することになる。もつれた光子対の状態は実験的に準備できる。これは上記の 2 つの状態の重ね合わせであり，

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\hat{x}'_a\rangle|\hat{y}'_b\rangle + |\hat{y}'_a\rangle|\hat{x}'_b\rangle)$$

と表すことができる. ここで， $|\hat{x}'_a\rangle|\hat{y}'_b\rangle$ は a 光子 が $\hat{x}'$ 方向に，b 光子 が $\hat{y}'$ 方向に偏極している。$|\hat{y}'_a\rangle|\hat{x}'_b\rangle$ にも同様の定義が適用される. 係数 $1/\sqrt{2}$ は， a 光子 と b 光子の電場の振幅（適切な単位で表される）の積とみなすことができる。図 3 に示すように， 2 つの直線偏光子 1 と 2 は， 角度 α と β で表すことができる伝送軸を持っている。これらを使って a と b を通過する 2 つの光子の同時計数測定を行うことができる。偏光子 1 と 2 を通過する 2 つの光子が同時に見つかる確率を $P(\alpha,\beta)$ とする。これはまた， $P(\alpha,\beta)$ は 2 つの偏光子を通過した光の（適切な重ね合わせ後の）強度の積に比例しているとみなすこともできる。$\alpha + \pi/2$ と $\beta + \pi/2$ を $\alpha_\perp$ と $\beta_\perp$ で表す。

C.4　直線偏光子によって投影される全電場を考える。 確率 $P(\alpha,\beta)$, $P(\alpha,\beta_\perp)$, $P(\alpha_\perp,\beta)$, $P(\alpha_\perp,\beta_\perp)$ を求めよ。 0.8 点

C.5　偏光子 1 が角度 α で a 光子を発見した場合，$\sigma_a = 1$ を， 偏光子 1 が角度 $\alpha_\perp$ で a 光子を発見した場合， $\sigma_a = -1$ を，それぞれ割り当てる。同様に，偏光子 2 が 角度 β または $\beta_\perp$ で b 光子を発見した場合， $\sigma_\beta = 1$ または -1 を割り当てる。$E(\alpha,\beta)$ が $\sigma_a\sigma_b$ の平均を表すとすると, 量

$$S = |E(\alpha,\beta) - E(\alpha,\beta')| + |E(\alpha',\beta) - E(\alpha',\beta')|$$

は重要な意味を持つ。古典的な光の理論では， $S \le 2$ である。これはベルの不等式の変形版（クラウザー・ホーン・シモン・ホルトの不等式）である。

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \qquad \alpha' = 0, \beta = -\frac{\pi}{8}, \qquad \beta' = \frac{\pi}{8}$$

の場合の S の表式を求め，S の数値を計算せよ。S が古典的な理論と一致するかどうか答えよ。 0.5 点