

磁気浮上

役に立つ情報

(1) 空間関数 $f(\vec{r})$ の方向微分は、 $\vec{\nabla}f(\vec{r})$ で与えられる

$\vec{\nabla}f \equiv (\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z})f(\vec{r})$, ここで $\frac{\partial}{\partial x}f(\vec{r})$ は x のみについての微分.

(2) 積分:

$$\int_0^\infty dt \frac{(a+pt)}{[(a+pt)^2+(b+qt)^2]^{3/2}} = \frac{1}{bp-aq} \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}} \right).$$

イントロダクション

我々は、導電性薄膜の近傍における小さな磁気双極子の運動を求めたい。問題文中の双極子(ダイポール)、単極子(モノポール)という言葉は、それぞれ、磁気双極子、磁気単極子と同義である。

一様な磁化 \vec{M} (単位体積当たりの磁気双極子モーメント) と一様な質量密度 ρ_0 をもつ球状の永久磁石からなる双極子は、その半径 R が小さい場合、点状の物体として扱うことができる。このような双極子の表現は、双極子はその球の外側につくる磁場を記述するのに用いることができる。また、双極子から印加磁場源までの距離が R よりもはるかに大きい場合には、印加された磁場が双極子に作用する力についても、この表現は良い近似である。

点状の双極子は、負と正の電荷 $-q_m$ と q_m を持つ単極子のペアと考えることができる。ここで、 δ_m^+ は、南側の単極子 ($-q_m$) から北側の単極子 ($+q_m$) への変位ベクトルである。点状の双極子の位置は、北側の単極子の位置とする。

単極子 q_m の磁場は

$$\vec{B}_{mp} = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi r^2} \hat{r}, \quad (1)$$

ここで、 \vec{r} は q_m から観測点(またはフィールドポイント)への変位ベクトル、 \hat{r} は単位ベクトル $\hat{r} = \vec{r}/r$ 、 μ_0 は自由空間の透磁率である。印加された磁場 \vec{B}' が q_m に与える力は、 $\vec{F} = q_m \vec{B}'$ で与えられる。式(1)で説明したモノポール場の概念を拡張すると、点状双極子からの磁場 \vec{B} は、 $\vec{B} = -\vec{\nabla}\Phi$ の形で与えられるスカラーポテンシャル Φ から導き出すことができる。スカラーポテンシャル Φ は磁気ポテンシャルとも呼ばれる。

導電性薄膜は、 z 方向の厚さが d の均一なものである(図1)。薄膜は x, y 方向に水平に無限に広がっており、その上面は点状のモノポールまたはダイポールから距離 h の位置にある。ここでは、 $h \gg d$ の場合のみを考える。これにより、フィルムに誘起される電流密度を z に依存しないものとすることができ、また、変位電流の影響も無視できるものとする。

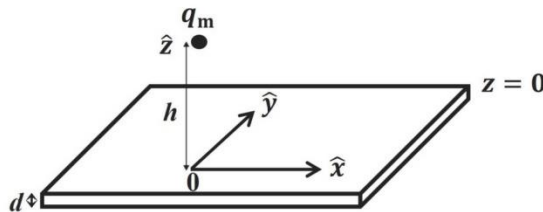


Fig.1 厚さ d の導電性薄膜から距離 h のところにモノポール q_m が現れる。

この問題は3つのパートに分かれています。Part A では、モノポールと薄膜、Part B と Part C では、動くダイポールと薄膜で構成されています。

平面 $z = 0$ は、薄膜の上面と一致する。ベクトル $\vec{\rho} = x\hat{x} + y\hat{y} = \rho\hat{\rho}$ は、面内の位置ベクトルを表す。

Part A. 突然出現する磁気単極子: 薄膜中の初期応答とその後の応答の時間変化 (3.0 points)

我々はまず Fig. 1. 示されるように、 $t = 0$ で突然北側の単極子 (正の単極子) が位置 $\vec{r}_{\text{mp}} = h\hat{z}$ ($h > 0$) に出現した際の、導電性薄膜の初期応答に注目する。この単極子は以後 ($t > 0$) で動かないものとする。

我々が興味あるのは、領域 $z \geq 0$ と $z \leq -d$ での初期磁場 $\vec{B}(\vec{\rho}, z)$ と、薄膜中の誘導された電流密度、全磁場 $\vec{B} = \vec{B}_{\text{mp}} + \vec{B}'$ であり、ここで、 \vec{B}_{mp} と \vec{B}' はそれぞれ磁気単極子と誘導された電流に因るものである。初期磁場 $\vec{B}(\vec{\rho}, z)$ は時刻 t_0 での磁場で、 t_0 は区間 $h/c \leq t_0 \ll \tau_c$ に含まれる。ここで、 τ_c は薄膜中の応答を特徴づける時定数で、 c は真空中の光速である。この問題では、 $h/c \rightarrow 0$ の極限を取ることで、 $t_0 = 0$ とする。

初期磁場 $\vec{B}(\vec{\rho}, z)$ の計算に際して、仮想単極子を導入することで計算が容易になる。 $z \geq 0$ の領域での $\vec{B}(\vec{\rho}, z)$ では、仮想単極子は磁荷 q_m を持ち、 $z = -h$ の位置にある。一方、 $z \leq -d$ の領域での $\vec{B}(\vec{\rho}, z)$ では、仮想単極子は磁荷 $-q_m$ を持ち、 $z = h$ に位置している。

初期応答

A.1	$z \geq 0$ の領域での、初期時刻 $t_0 = 0$ の全磁場 $\vec{B}(\vec{\rho}, z)$ を求めよ。	0.4pt
A.2	$z \leq -d$ の領域での、初期時刻 $t_0 = 0$ の全磁場 $\vec{B}(\vec{\rho}, z)$ を求めよ。	0.2pt
A.3	初期時刻 $t_0 = 0$ での、薄膜の表面 $z = 0$ と $z = -d$ を貫く磁束 Φ_B を求めよ。	0.4pt
A.4	初期時刻 $t_0 = 0$ での、導電性薄膜中の電流密度 $\vec{j}(\vec{\rho})$ を求めよ。	0.6pt

$t > 0$ では、全磁場 \vec{B} は重ね合わせ $\vec{B}(\vec{\rho}, z; t) = \vec{B}_{\text{mp}}(\vec{\rho}, z) + \vec{B}'(\vec{\rho}, z; t)$ となる。ここで、 $\vec{B}'(\vec{\rho}, z; t)$ は薄膜中の誘導された電流による磁場である。 $z = 0$ の薄膜表面付近での $B'_z(\rho, z; t)$ についての方程式を求めるには、以下のようにする必要がある。 B'_z の時間変化の挙動を見ると、 $t > 0$ における $z \approx 0$ 付近の磁場 \vec{B}' の記述として、移動する仮想磁気単極子を用いる描像 (あるいは表示) が見えてくる。

薄膜中の磁場が満たす方程式は以下で与えられる。

$$\frac{\partial^2 B'_z(\rho, z; t)}{\partial z^2} = \mu_0 \sigma \frac{\partial B'_z(\rho, z; t)}{\partial t}. \quad (2)$$

この方程式は薄膜内部にマクスウェル方程式と導電性薄膜におけるオームの法則的な挙動 $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ (ただし σ は電気伝導率) を課し、変位・電流効果を無視することで得られる。また、Eq.(2) の左辺のにおける $\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \frac{\partial B'_z}{\partial \rho})$ の項は $h \gg d$ により無視している。

その後の応答

A.5	式 (2) から、 $z \approx 0$ 付近の $B'_z(\rho, z; t)$ の満たす方程式を導出せよ。この導出した方程式には、 z に対する $B'_z(\rho, z; t)$ の一階偏微分と、 t に対する一階偏微分がそれぞれ別々に含まれている。	0.6pt
------------	--	-------

A.6 $z \approx 0$ 付近の $t > 0$ での $B'_z(\rho, z; t)$ の一般解を解け。

0.4pt

A.7 **A.6** で求めた解から、磁場 $B'_z(\rho, z \approx 0; t)$ について、下向きで動く仮想単極子での描像がわかることを示せ。また、問題文から既知のパラメータを用いて仮想単極子の下向きの速度 v_0 を求めよ。

0.4pt

Part B. 一定の速度と高さ h で動く点近似された双極子に働く磁力 (4.0 points)

$z \approx 0$ 付近における B'_z に対して **A.7** で明らかになった運動する仮想単極子の概念は $z \geq 0$ における \vec{B}' についても成り立つ。これは導電性薄膜内の応答についての時間発展が十分遅い場合には良い仮定である。

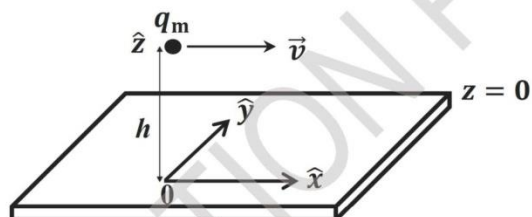


Fig.2 導電性薄膜から一定の高さ h の所を一定速度 \vec{v} で動く単極子 q_m の $t = 0$ における単極子の座標。

単極子 q_m (Fig.2) は一定速度 $v\hat{x}$ ($v \ll c$)、一定の高さ $z = h$ 、で現在時刻 ($t = 0$) まで動かされている。その現在の座標 (x, y) は $(0, 0)$ である。上の軌道に沿って動いているこの単極子によって発生する全ての仮想単極子による磁気ポテンシャル Φ_+ に注目する。

細かい時間幅 (非常に小さい時間幅 τ) によって q_m の軌道を分割することで、 q_m の運動を各時間ステップの開始時点でホッピング (跳躍) されたものに置き換える。ホッピングは磁気単極子の追加 (create) と消去 (remove) を同時に考えることで表現する。追加された単極子の位置をこの時間ステップの開始時点で、単極子の軌道上の一点にとる。従って消去された単極子の位置は一つ前の時間ステップの開始時点での軌道上の位置と一致する。これはつまり二つの磁気単極子 (q_m と $-q_m$) が同時に突然出現することで実現される。その二つの磁気単極子 (q_m と $-q_m$) はそれぞれこの時間ステップと一つ前の時間ステップの開始時点での軌道上の位置にある。その二つの位置はホッピング距離 $\Delta x = v\tau$ によって隔てられている。この時間ステップ近似は全ての時間ステップにおいて生成される全ての仮想単極子、そしてそれらの位置の決定を容易にする。

運動している単極子

B.1 q_m と $-q_m$ 型で表される仮想単極子全ての現在 ($t = 0$) での位置を書き下せ。時間ステップの開始時点は $t = -n\tau$, ($n \geq 0$) である。

0.8pt

B.2 **B.1** で求めた $t = 0$ における仮想単極子全てによる磁気ポテンシャルを合わせた $\Phi_+(x, z)$ を求めよ。

0.7pt

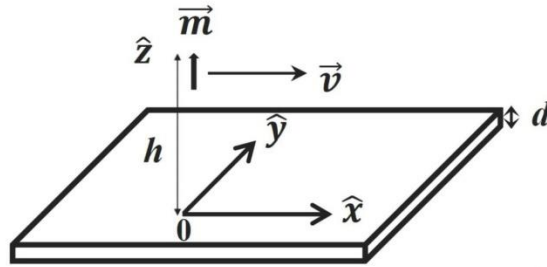


Fig.3 上向き磁気双極子モーメント \vec{m} を持つ磁気双極子。速度は一定値 \vec{v} 、導電性薄膜からの高さは一定値 h である。 $t = 0$ における座標が示されている。

ここで Fig.3 に示されているような点状と見做した動く磁気双極子を考える。双極子モーメント $\vec{m} = m\hat{z}$ を持つ双極子が一定速度 $v\hat{x}$ 、一定の高さ $z = h$ で現在時刻 ($t = 0$) まで動いている。その現在の座標は $(0, 0)$ であるとする。点状と見做した双極子はイントロダクションで説明されたように二つのわずかに離れた単極子によって表される。磁気双極子の位置は北側の (正の) 単極子の位置とし、 \vec{m} は固定されているとする。

運動している双極子

B.3 $t = 0$ において導電性薄膜によって点状と見做した磁気双極子に働く力 \vec{F} を求めよ。1.5pt

v_0 と v の関係

以下、Part B での数値評価では、銅からなる導電性薄膜を考える。 $\sigma = 5.9 \times 10^7 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$, $d = 0.50 \text{ cm}$, and $h = 5.0 \text{ cm}$.

B.4 A.7 に従って、仮想単極子の速度 v_0 の値を計算せよ。0.3pt

電磁波が導電性平板に侵入できる距離である侵入深さ δ (表皮深さと呼ばれる) は、波の角周波数 ω に依存することが知られている。その依存は以下ようになる。

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}}. \quad (3)$$

以下の考察に対して $\omega = v_L/h$ とする。ただし、 v_L は v と v_0 の大きい方の速度に等しいとする。

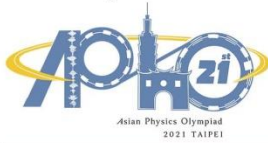
B.5 v が小さい領域と大きい領域のそれぞれについて v に依存する $v_0(v)$ を求めよ。0.4pt

B.6 B.5 の二つの領域における $v_0(v)$ の値が一致する際の臨界速度 $v = v_c$ を求めよ。0.3pt

Part C. 導電性薄膜が超伝導になったときの磁気双極子の動き (3.0 点)

上記の考察は、電気伝導度 $\sigma \rightarrow \infty$ という仮定をとれば、常に磁場が超伝導体から完全に反発する (マイスナー効果をもつ) タイプ I 超伝導体の場合にも適用できる。

ここでは、 $(x, y, z) = (0, 0, h)$ に位置する、水平向きの磁気双極子モーメント $\vec{m} = m\hat{x}$ 、質量 M_0 の点状の磁気双極子を考える。重力加速度 $\vec{g} = -g\hat{z}$ を持つ重力場の作用下での磁気双極子の垂直方向の運動に注目する。



与えられた双極子の向きとその質量中心の動きの間の弱い結合は無視する。そのため、以下の考察では、磁気双極子モーメントを上記のように固定する。また、超高真空環境を想定し、残留空気による運動の減衰は考慮する必要がない。

C.1 双極子の超伝導薄膜からの釣り合いの位置 (平衡距離) h_0 を求めよ。 1.2pt

C.2 平衡状態を中心に振動する双極子の角周波数 Ω を求めよ。 0.8pt

球状の永久磁石の物理的パラメータは以下の通りである: 半径 $R = 1.0 \mu\text{m}$ 、(質量)密度 $\rho_0 = 7400 \text{ kg m}^{-3}$ 、磁化 $|\vec{M}| = 75 \times 10^{-2} \text{ T}/\mu_0$ 、また各物理定数は $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ 、 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T A}^{-1} \text{ m}$ 。

C.3 h_0 の値を計算せよ。 0.7pt

C.4 Ω の値を計算せよ。 0.3pt

DELEGATION PRINT