

物理チャレンジ 2022

第 2 チャレンジ

理論問題

2022 年 8 月 24 日 (水)

理論問題にチャレンジ 8 : 30 ~ 13 : 30

理論問題にチャレンジする前に下記の＜注意事項＞をよく読んでください。

問題は、大問 4 題からなります。問題は、一見難問にみえても、よく読むとわかるようになっています。どの問題から取り組んでも結構です。最後まであきらめずにチャレンジしてください。

＜注意事項＞

1. 開始の合図があるまで問題冊子を開けないこと。また解答用紙にも手を触れないこと。
2. 解答中に通信機能などを用いて、他の人の助言を受けたり、解を検索するなどの行為は厳禁です。このような不正行為が発覚した場合、物理チャレンジ参加の資格と権利を失います。
3. 問題冊子は表紙、裏表紙を含め 25 枚 (問題は 23 ページ)、解答冊子は 17 枚です。
4. 配布された電卓を使用することができます。
5. すべての解答は、解答用紙に記入すること。解答用紙の各ページに、必ずチャレンジ番号と氏名を記入すること。
6. 解答ははっきりと書き、消しゴムを使う場合には、きちんと消してください。なお、解答用紙の裏面は使用しないでください。
7. 解答は、最終的な答えのみではなく、解答に至る道筋も詳しく記述すること。
8. 気分が悪くなったときやトイレに行きたくなったとき、または質問がある場合は旗をあげて監督者に知らせること。
9. チャレンジ開始から 200 分 (3 時間 20 分) 経過するまでは、原則として、途中退出はできません。200 分経過 (11:50) 後は、退出希望者は旗をあげて監督者に知らせ、すべての解答用紙 (無解答の用紙も含む) は、チャレンジ番号・氏名の記入を確認の上、机の上に置いて退室すること。
10. 他の参加者の迷惑にならないように静粛に解答をすすめること。迷惑行為があった場合は退出させます。
11. 終了の合図があったら、ただちにすべての解答用紙 (無解答の用紙も含む) は、チャレンジ番号・氏名の記入を確認の上、机の上に置いて、監督者の指示を待つこと。
12. 問題冊子ならびに計算用紙は、持ち帰ること。

第 1 問 (80 点)

津波の物理

我が国では地震に起因する海底の地殻構造の変化や、山体の崩壊等に起因する津波が過去に起こっている。地震の場合は海底の地殻の変形が海面に伝わり、それが波源となり海洋に大きな波の伝播現象を引き起こす。2011 年 3 月の東北地方太平洋沖地震に伴う海底の地殻変動による津波の、東北の三陸海岸や福島への被害が記憶に新しい。津波の構造は、我々が見慣れている風等によって引き起こされる通常の波浪とは異なる性質を持っている。この問題では、津波の構造について物理的観点から理解を深めることを目的とする。

波の最も簡単な例として頭に浮かぶのは、弦楽器の弦を伝わる波であろう。波を伝える媒質は弦、その変位は進行方向に垂直であり、横波と分類される。もう一つの例は空気中の音波である。これは進行方向に空気が運動し、密度の粗密が伝わるものであり、縦波と分類される。また真空中を伝わる電磁波（光を含む）は電場と磁場が進行方向に垂直な振動を行う横波である。

一方海水の波動の伝播現象はこれらに比べて複雑である。海水の場合は水面が上下して、海水の変位には明らかに、進行方向に平行な成分と垂直な成分が存在する。従って上述した横波、縦波といった分類は適用できない。水の場合には少し異なる観点からの分類がなされている。それは波の波長と海水の深さとの大小関係に注目するものである。

ここでは「水深が浅い」水の表面に生成される「小振幅」の波の伝播の現象を考察する。ここで「水深が浅い」と「小振幅」という言葉の定義を明確にしておこう。波の波長を λ 、波の高さを h 、海水の深さを d とする。我々は

$$\lambda \gg d \gg h \quad (1)$$

の条件下の波の伝播を考える。このような波は浅水波と呼ばれる。海は深い。太平洋の平均水深は 4000 m である。この海を伝わり、悲惨な大惨事を引き起こした津波を考えるのに、浅水波を調べるのは奇妙に思うかもしれない。しかし、巨大地震に伴う津波の波長 $\lambda > 100$ km であり、一方、海の深さは $d < 11$ km、波の高さ $h < 100$ m であるから、大規模な津波においては条件 (1) は満たされている。

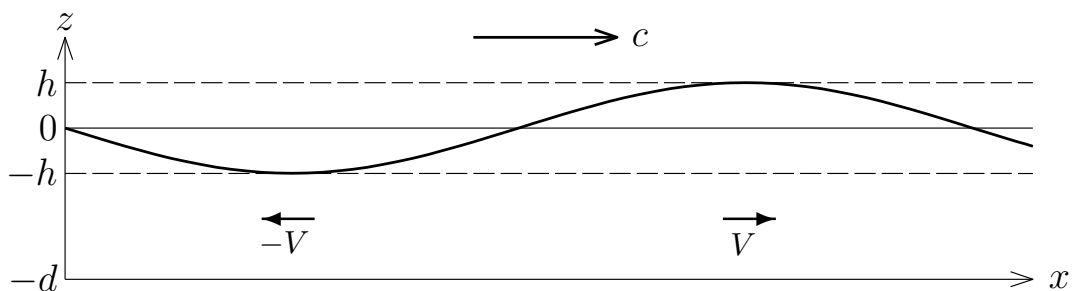


図 1. 静止座標系での波の様子。海底は深さ $-d$ にあり、実線は水面を表す。これは説明のための概念図であり、条件 (1) にそった図ではないことに注意。

浅水波での海水の運動は、ほぼ進行方向に平行な往復運動であり、海面から海底まで同じ速さで一斉に動くが、海水の平均的な位置が移動することはない。図1に示すように、波の頂上の位置では海水は波の進行方向に速さ V で動き、波の谷では進行方向と逆方向に $-V$ で動く。波の山と谷は速さ c ($c \gg V$) で進行する。これらのことは本当は海水の運動方程式に基づいて示されることであるが、正しいと認めることにして、波が伝わる速さ、波が伝えるエネルギーなどを調べていくことにしよう。なお、自由表面を持つ液体で起こる波の場合は、液体の密度の変化は無視することができる。

注：波長と深さの関係が逆の場合 ($\lambda \ll d$)、海水の運動は海面からの深さに依存する。海面から深くなるにつれて運動の振幅は小さくなる。このような場合の水の波を深水波と呼ぶ。

図1に示したように、海水は波の進行方向である x 方向に運動し、それに直交する水平方向 (y 方向) には運動しない。鉛直方向 (z 方向) は平均水面を $z = 0$ とし、海底を $z = -d$ とする。波の伝播は進行方向が一次元ではあるが、海水の運動は厳密に言えば一次元ではなく、鉛直 xz 面内の二次元で行われるので、これを以下次元モデルと呼ぶことにしよう。ここでは問題を簡単にするためにこの一次元的モデルを採用する。

図2のように波とともに速さ c で進む座標系で考えよう。この座標系では波の位置や形は動かないが、海水は後方 (x 軸負方向) に流れている。波の谷の x 座標を x_1 、山の x 座標を x_2 とする。 x_1 では海水は $-V - c$ で後方に流れ、 x_2 では $V - c$ で後方に流れている。 x_1 での海面の高さを $-h$ 、 x_2 での高さを h とする。

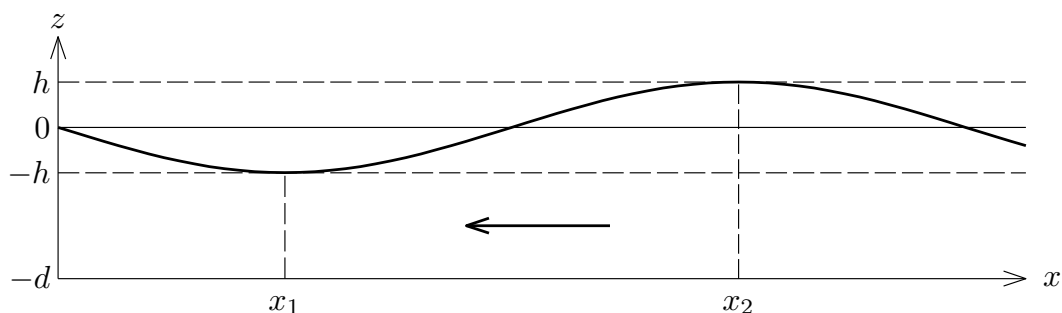


図2. 波とともに動く座標系での波

波の山で海面直下の海水の小さな塊を考えよう。質量を Δm とする。この部分の、波とともに動く座標系での力学的エネルギーは

$$\frac{1}{2} \Delta m (c - V)^2 + \Delta m g h \quad (2)$$

と書ける。この部分は後方に流れて、やがて谷の部分に到達する。ただし g は重力加速度の大きさである。

問 1 (a) 谷に到達したときの Δm の力学的エネルギーを記せ。

(b) この過程では注目している部分の持つ力学的エネルギーは一定である。この条件より V, h, c の間の関係を求めよ。

注：ここでの議論は海面を流れる海水についてベルヌーイの定理を適用したものと考えてもよい。海底を流れる海水についてベルヌーイの定理を適用しても同じ結果が得られる。

図 2 で $x = x_2$ の断面を考える。 y 方向の厚さを δy とする。この面を通して前方より単位時間に流れ込む海水の量は $(d + h)(c - V)\delta y$ である。

問 2 (a) $x = x_1$ の厚さ δy の断面を通して単位時間に後方に流れ出す海水の量はいくらか。

x_1 と x_2 に挟まれた領域にある海水の量は質量保存の法則（流体力学では連続の方程式として知られている）により一定でなければならない。

(b) 質量保存則を用いて V を c, d, h で表せ。

問 3 問 1 および問 2 の解より、波の伝播速度 c は、

$$c = \sqrt{gd} \quad (3)$$

と与えられることを示せ。

ここで x 軸の正方向に進む波を具体的に正弦波で表そう。静止座標系での海水の流速 u の x, t 依存性は次の式で与えられる。

$$u(x, t) = V \sin[k(x - ct)] = V \sin(kx - \omega t) \quad (4)$$

以下でこの表式は必要に応じて使う。ここで V は山と谷での流速の大きさ、 k は波数、 $\omega = kc$ は角振動数である。この波動の周期を T とすれば $\omega = \frac{2\pi}{T}$ 、振動数 $\nu = \frac{1}{T}$ 、波長は $\lambda = cT$ となる。ここで条件 (1) の下で波の速さ c は式 (3) で与えられる。すなわち、浅水波の場合には波の速さは波数によらず、従って角振動数によらず一定であり、これを非分散性波動という。一般の場合は、波の速さは波数 k に依存する。これによる分散効果があるが、ここではこれ以上立ち入らない。非分散性波動では低周波成分も高周波成分も同じ速さで伝播するので波は波形を変えず伝播する。

問 4 (a) 波高の x, t 依存性を $f(x, t)$ とするとき、 $f(x, t)$ は $u(x, t)$ に比例することが知られている。

$$f(x, t) = \left(\frac{d}{g}\right)^{1/2} u(x, t) \quad (5)$$

なる関係があることを導け。

- (b) 海面直下の海水の小さな塊 Δm を考える。波がないときの (x, z) 座標を $(x_0, 0)$ とする。この小問では、任意に選べる x_0 は波がないときの Δm の座標を与える指標であり、変数ではない。波があるときは x 方向の変位 X を用いて、 Δm の座標は $(x_0 + X(x_0, t), f(x_0, t))$ と表される。

$$\frac{dX(x_0, t)}{dt} = u(x_0, t)$$

であることを用いて、 Δm の変位 (X, f) が楕円軌道の式

$$\frac{X(x_0, t)^2}{a^2} + \frac{f(x_0, t)^2}{b^2} = 1$$

を満たすことを示し、主軸半径 a と b を V, ω, d, g を用いて表せ。

1960 年（昭和 35 年）5 月にチリ沖でマグニチュード 9.5 という観測史上最大の地震が発生し、そこを波源とする津波が太平洋を渡って日本の東北地方三陸沖に約 23 時間後に到達し、この地域に大きな被害を与えた。また太平洋上のこの津波の周期は 1 時間以上と観測されている。さらに地球を完全な球と考えれば地理的には日本は地球の中心に対して震源の反対の側に位置している。これを対蹠点^{たいせきてん}という。球面上の震源で発生した津波は球面上に障害物がなければこの対蹠点に収束する傾向があることが理論的に指摘されている。これも三陸海岸での被害が大きくなった原因の一つと考えられる。また数値計算によるシミュレーションによれば、ハワイ諸島の南方を通る波とその北方を通る波は対蹠点である日本の近傍に収束する傾向があることが確認されている。

問 5 我々の一次元的モデルは球面上の問題を厳密には正しく取り扱えないが、球面の半径が地球の場合（ $R = 6378 \text{ km}$ ）のように十分大きければ、このモデルによる近似的な取り扱いが可能であると考えられる。

- (a) 地球を完全な球とすればその赤道の一周の長さは 4 万 km である。チリ沖から地球上の対蹠点に近い三陸沖への距離は約 2 万 km となる。日本の三陸沖に津波が到達するに要した時間は観測データによれば約 23 時間である。この津波の平均的な速さ c を計算せよ。
- (b) 我々の一次元的モデルが成立すると仮定しよう、太平洋の海底の海嶺、海溝などの構造を無視し、水平床であるとし、深さ d は一定と近似する。上記の伝播速度を与える平均的な深さ d を計算せよ。ただし $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ とする。
- (c) 上述の観測データに基づいて津波の周期を 1 時間とする。この津波の波長 λ はどれほどか。このとき、冒頭でのべた条件 (1) の最初の不等式が成立していることを示せ。
- (d) 問 4 の (b) で示されたように、表面の海水は楕円軌道を描く。この問題の例について楕円の主軸半径の比 $\frac{b}{a}$ を有効数字 1 桁で計算せよ。これが何を意味するかを説明せよ。

津波は水深が浅くなるにつれて、波高が高くなることが知られている。沖合ではわずかな波の高さでも海岸に近づくとこれが大きな波高となり港（＝津）に大きな被害をもたらす。ここからは津波の高さ h と水深 d の関係をより詳しく考察しよう。

浅水波の力学的エネルギーについて静止座標系で考察する。まず位置エネルギーについて考える。高さ z にある海水の単位体積あたりの位置エネルギーは密度を ρ として $\rho g z$ であり、海底 ($z = -d$) から水面での波の高さ ($z = f$) まで積分すれば単位底面積あたりの全位置エネルギーが得られる。

$$U_t = \int_{-d}^f \rho g z \, dz = \frac{1}{2} \rho g f^2 - \frac{1}{2} \rho g d^2$$

このうち、浅水波が存在しない場合 ($f = 0$) からの変化分である右辺第 1 項のみを考えるのが津波（浅水波）の位置エネルギーとしては妥当である。すなわち

$$U = \frac{1}{2} \rho g f^2$$

これを 1 周期について平均すれば

$$\langle U \rangle = \frac{1}{2} \rho g \langle f^2 \rangle \quad (6)$$

となる。ここで括弧 $\langle \dots \rangle$ は上記の平均値を示す。

一方、海水が持っている単位体積あたりの運動エネルギーは $\frac{1}{2} \rho u^2$ と表される。これを前と同様に海底 ($z = -d$) から水面での波の高さ ($z = f$) まで積分すれば単位底面積あたりの運動エネルギーとして

$$K = \int_{-d}^f \frac{1}{2} \rho u^2 \, dz = \frac{1}{2} \rho u^2 (d + f)$$

となる。前と同じく 1 周期で平均し、

$$\langle K \rangle = \frac{1}{2} \rho d \langle u^2 \rangle \quad (7)$$

となる。ここで式 (5) の関係を用いれば

$$\langle K \rangle = \frac{1}{2} \rho g \langle f^2 \rangle$$

となり、 $\langle K \rangle = \langle U \rangle$ 。津波の単位底面積あたりの力学的エネルギーの平均値 $\langle E \rangle$ は

$$\langle E \rangle = \langle K \rangle + \langle U \rangle$$

であり

$$\langle E \rangle = \rho g \langle f^2 \rangle = \rho d \langle u^2 \rangle = \frac{1}{2} \rho d V^2 \quad (8)$$

となる。ここで最後の等式では式 (4) の具体的関数形を用い、平均値 $\langle \sin^2(kx - \omega t) \rangle = \frac{1}{2}$ を用いている。 V は海水の流速 u の振幅であり、図 1 に示した波の山での流速である。

津波（浅水波）の単位底面積あたりの力学的エネルギー，すなわちエネルギーの面密度に浅水波の速さ $c = \sqrt{gd}$ をかけると y 方向の単位長さあたり，および進行方向 (x 軸正方向) の単位時間あたりのエネルギーの流れの量を評価できる。このエネルギーの流量をエネルギーフラックス Φ という。これは次式で与えられる。

$$\Phi = \langle E \rangle c = \frac{1}{2} \rho d V^2 \sqrt{gd} \quad (9)$$

波の伝播に際して，外部からエネルギーが供給されたり，あるいは外部へエネルギーが失われたりすることがなければ，エネルギーフラックス Φ は一定である。海底に大きな段差があると波の反射が起こるし，海底での摩擦で失われるエネルギーもあるが，以下では，海底は緩やかに変化し，波の反射は無視できるものとし，摩擦も無視でき，エネルギーフラックスは一定と見なせる理想的な場合に何が起こるかを調べて行こう。 Φ を用いて，津波の山や谷での流速 V は

$$V = \left(\frac{2\Phi}{\rho g^{1/2}} \right)^{1/2} d^{-3/4} \quad (10)$$

となる。

問 6 エネルギーフラックス Φ が一定であることを考慮して，津波の波高 h の深さ d 依存性を (係数を含めて) 求めよ。

[ヒント] 式 (5) の関係を考慮せよ。

津波（浅水波）の波高 h は 深さ d が浅くなると問 6 の解答の深さ依存性をもって増加し，同様に流速 V は $d^{-3/4}$ の深さ依存性をもって増加する。

現在では千島海溝，日本海溝，南海トラフの海底の地殻変動による地震が高い確率で起こることが予測されている。従ってこれに由来する津波が起こる可能性が指摘されている。今まで行った考察に基づいて以下の問に答えよ。

問 7 海岸から 200 km 離れた所で地震津波が発生した。発生場所から海岸近くまで水深はほぼ一定で 1000 m と仮定する。

(a) 津波の速さは時速何 km か。

(b) 津波の海岸への最短の到達時間 τ を計算せよ。

問 8 水深 $d = 4000$ m の海域で波高 $h = 1.0$ m の波源が生成され津波が発生した。

(a) このときの，この海域での津波の速さ c ，海水の往復運動の速さ V ，津波のエネルギーフラックス Φ を計算せよ。海水の密度として $\rho = 1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ を用いよ。

(b) 上記のエネルギーフラックスが一定であるとき， hd^α を一定にする α が存在する。 α の値と hd^α の一定値を (単位を含めて) 求めよ。

[ヒント] 問 6 を参考にせよ。

- (c) この津波がエネルギーフラックス Φ 一定を保ったまま深さが 400 m, 100 m, 25 m の海域に到達するとき, それぞれの海域での津波の速さ c , 波高 h , 海水の流速 V を計算せよ。

津波は海岸に近づき深さが浅くなると, 伝播速度 c は遅くなるが, 波高 h , 海水の流速 V はともに増加し, 大きな被害をもたらす。津波（津＝港）なる名称はここに由来している。なお, ここで採用した一次元的モデルは海岸の湾の形状, あるいは岬の存在といった地形による効果は記述ができないが, これらを考慮すると上記の傾向が強調される場合がありうることを指摘しておこう。

第 2 問 (80 点)

2 つの帯電導体球を繋ぐ

点電荷 q のまわりには放射状に電場が生じ、点電荷から距離 r の点における電場の強さ $E(r)$ は

$$E(r) = k \frac{q}{r^2} \quad (1)$$

と表される。ここで k はクーロンの法則の比例定数で、点電荷が真空中にあるとすれば、真空の誘電率 (電気定数) ϵ_0 と $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ の関係にある。また点電荷から距離 r の点における電位 $V(r)$ は、電位の基準点を無限遠にとると

$$V(r) = - \int_{\infty}^r E(r) \, dr = k \frac{q}{r} \quad (2)$$

と表される。

電場のある空間はエネルギーを蓄えている。この電場のエネルギーは静電エネルギーとも呼ばれる。真空中の電場の強さを E とすると、単位体積当たりの電場のエネルギー (電場のエネルギー密度) は、電磁気学の理論によれば

$$\frac{1}{8\pi k} E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (3)$$

と表される。

次に真空中において、半径 r_0 の導体球の表面に電荷 q が一様に分布しているとしよう。対称性から導体球のまわりの電場は放射状に生じることが予想される。実際、球のまわりの電場は、球の中心に置かれた点電荷 q が $r \geq r_0$ の領域に作る電場に等しく、電気力線は図 1 のようになる。導体球の電位は

$$V = k \frac{q}{r_0} \quad \text{あるいは} \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_0} \quad (4)$$

であり、導体球は電荷 q を蓄えているので、電気容量

$$C = \frac{q}{V} = \frac{r_0}{k} \quad \text{あるいは} \quad 4\pi\epsilon_0 r_0 \quad (5)$$

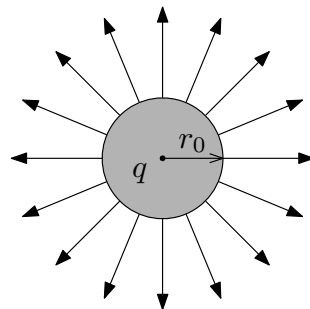


図 1. 帯電した導体球のまわりの電気力線 ($q > 0$ の場合)

のコンデンサーと見なすことができる。なおコンデンサーのもう一方の電極は無限遠にあることになる。

導体球のまわりの電場のエネルギー (静電エネルギー) $\mathcal{E}$ を計算してみよう。導体球の中心から $r \sim r + dr$ ($r > r_0$) の薄い球殻内のエネルギーは、球殻における電場のエネルギー密度と球殻の体積の積

$$\frac{1}{2}\epsilon_0 E(r)^2 \times 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} \quad (6)$$

であるから、 $r = r_0$ から ∞ まで積分して

$$\mathcal{E} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r_0} \quad (7)$$

を得る。式 (4)、式 (5) を使うと

$$\mathcal{E} = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} CV^2 \quad (8)$$

と表される。これが導体球が蓄えている静電エネルギーである。

[I] 十分に離れている半径 a の導体球 (導体 1) と半径 $2a$ の導体球 (導体 2) をまっすぐな細い導線で繋いだ。ただし図 2 に示すように、導線にはスイッチ S と電気抵抗 R が組みこまれている。はじめスイッチは開いており、2つの導体球の表面には一様に電荷 Q が分布している。2つの導体球間の距離は、互いに相手の電場が影響しない程度に離れているが、電気信号は瞬時に伝わると考えてよい距離とする。また導線は細く、各導体球のまわりの電場が球対称から乱れることは無視できるものとする。

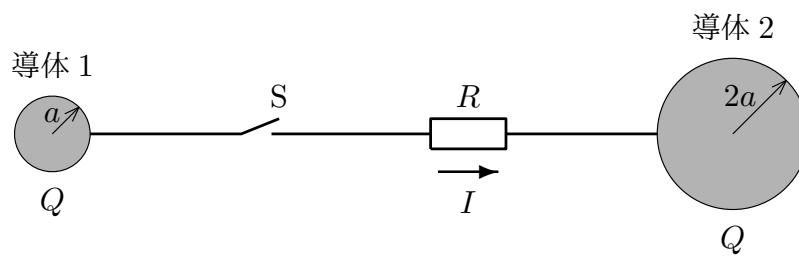


図 2. 帯電した 2 つの導体球を抵抗を介して繋ぐ

スイッチを入れたときに導線に流れる電流について考えよう。導体 1 と導体 2 の電位はそれぞれ $V_1 = k \frac{Q}{a}$, $V_2 = k \frac{Q}{2a}$ である。仮に $Q > 0$ の場合には $V_1 - V_2 > 0$ であるから、スイッチを入れると導体 1 から導体 2 へ電流が流れる。スイッチを入れた瞬間を $t = 0$ として、その後の時刻 t における電流を $I(t)$ 、導体 1 と導体 2 がもつ電荷をそれぞれ $Q_1(t)$, $Q_2(t)$ とする。

問 1 電流 I と電荷 Q_1 , Q_2 の間には次の関係式が成り立つことを示せ。導出の過程を説明すること。

$$IR = k \frac{Q_1}{a} - k \frac{Q_2}{2a} \quad (9)$$

問 2 式 (9) の電流 I を Q_1 の時間微分で表し、電荷保存則に基づいて Q_2 を Q_1 で表すと、 Q_1 の時間変化を記述する微分を含んだ方程式が得られる。この方程式を記せ。

問 3 前問で求めた Q_1 の微分を含む方程式は次の形の解をもつ。

$$Q_1(t) = Q_0 + Q' e^{-t/\tau} \quad (10)$$

ここで Q_0 , Q' , τ は定数である。 $t = 0$ において $Q_1 = Q$ であることを考慮して定数 Q_0 , Q' , τ を求めよ。

問 4 十分に時間が経ったときの Q_1 と Q_2 を求めよ。

2 つの導体球と抵抗からなる図 2 は図 3 のような等価回路で表される。 C_1 , C_2 がそれぞれ導体 1, 導体 2 の電気容量である。破線で囲まれた部分は無限遠にあると考える。

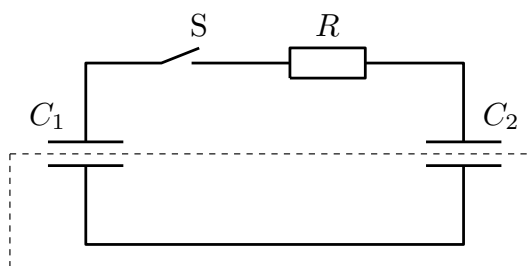


図 3. 図 2 の等価回路

問 5 スイッチを入れてから十分に時間が経つまでの間に抵抗で消費されたエネルギーを求めよ。

問 6 半径 $a = 0.10$ m の孤立した 1 つの導体球の表面に電荷 $Q = 1.0 \times 10^{-5}$ C が一様に帯電している場合に、導体の電位 V と導体の持つ静電エネルギー $\mathcal{E}$ を計算せよ。なお $k \doteq 9.0 \times 10^9$ m/F である。

[II] 次に図 4 のように、ともに電荷 Q をもつ半径 a の導体球 (導体 1) と半径 $2a$ の導体球 (導体 2) を繋ぐまっすぐな細い導線にスイッチ S とインダクタンス L のコイルが組みこまれている場合を考えよう。2 つの導体球間の距離は図 2 の場合と同様に、互いに相手の電場が影響しない程度に離れているが、電気信号は瞬時に伝わると考えてよい距離とする。また導線の電気抵抗は無視でき、導線による電場の乱れも無視できるものとする。さらに電磁場の変動に伴うエネルギーの放射は考えなくてよい。

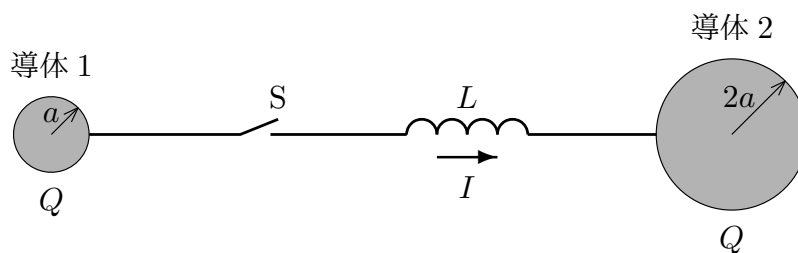


図 4. 帯電した 2 つの導体球をコイルを介して繋ぐ

問 7 スイッチを入れた後の、導体 1, 2 がもつ電荷を $Q_1(t)$, $Q_2(t)$, コイルに流れる電流を $I(t)$ とすると、次の関係式が成り立つことを示せ。導出の過程を説明すること。ただし電流が図の矢印の向きに流れるとき $I > 0$ とする。

$$L \frac{dI}{dt} = k \frac{Q_1}{a} - k \frac{Q_2}{2a} \quad (11)$$

問 8 式 (11) の電流 I を Q_1 の時間微分で表し、電荷保存則に基づいて Q_2 を Q_1 で表すと、 Q_1 の時間変化を記述する 2 階微分を含む方程式が得られる。この方程式を記せ。

問 9 前問で求めた微分を含む方程式を解いて $Q_1(t)$ を求め、電気振動の角振動数 ω を k , a , L で表せ。なお $t = 0$ において $Q_1 = Q$, $I = 0$ であることに注意せよ。

[ヒント]

y を t の関数とすると、2 階微分 $\frac{d^2 y}{dt^2}$ を含む方程式

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -A(y - B) \quad \text{ただし } A(>0), B \text{ は定数}$$

の一般解は $\omega = \sqrt{A}$ とおくと

$$y = B + c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t \quad c_1, c_2 \text{ は積分定数}$$

と与えられる。

問 10 Q_1 , Q_2 の最大値と最小値を求めよ。

2 つの導体球とコイルからなる図 4 の等価回路は、図 3 の抵抗をコイルに置きかえた図 5 のように表される。 C_1 , C_2 はそれぞれ導体 1, 導体 2 の電気容量であり、破線で囲まれた部分は無限遠にあると考える。

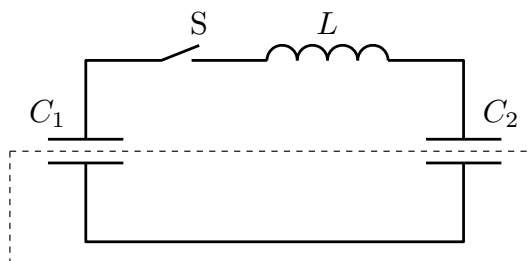


図 5. 図 4 の等価回路

問 11 任意の時刻 $t (> 0)$ における各導体球がもつ静電エネルギー，コイルがもつ磁気エネルギーを計算せよ。また，その総和が時刻によらず一定であることを確かめよ。

問 12 図 4 において導体 1 の半径 $a = 0.10 \text{ m}$ ，コイルのインダクタンス $L = 1.5 \times 10^{-2} \text{ H}$ の場合に，電気振動の周波数 $f = \frac{\omega}{2\pi}$ を計算せよ。

[III] 図 6 のように，半径 a の薄い導体球殻と同心の半径 $2a$ の薄い導体球殻の表面にそれぞれ電荷 Q が一様に分布している場合を考えよう。2 つの球殻を繋ぐまっすぐな細い導線にはスイッチ S と電気抵抗 R が組みこまれている。導線に電流が流れても，球対称の電荷分布および放射状の電場は保たれるとする。

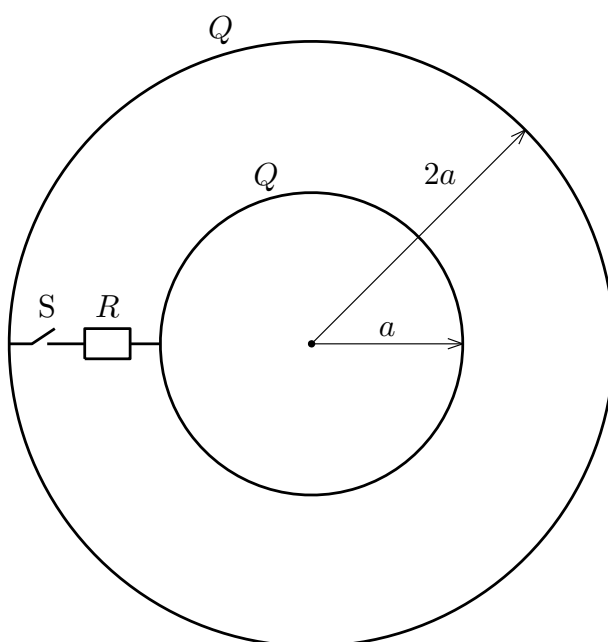


図 6. 2 つの同心の導体球殻

問 13 スイッチを入れて十分に時間が経った後に，内側の球殻のもつ電荷 Q_1 と外側の球殻のもつ電荷 Q_2 を求めよ。

問 14 スイッチを入れてから十分に時間が経つまでの間に，抵抗で消費されるエネルギーを求めよ。

第 3 問 (70 点)

水の蒸発と飽和蒸気圧 (海水温上昇と降水量)

飽和蒸気圧と蒸発熱

乾燥した空気中では、図 1 のように空気と水との界面（水面）を通して水分子が飛び出していく。これが水の蒸発である。水中の水分子は近くの水分子と主に水素結合により引力を及ぼし合っていて、水面から大気中に飛び出すことのできる水分子は大きい運動エネルギーを持った分子だけである。そのため、蒸発の際に余分のエネルギーが必要で、これが蒸発熱である。一方、空気中の水分子は逆に水面から水中に取り込まれる。水蒸気分圧が飽和蒸気圧のとき、飛び出す分子と取り込まれる分子の数が釣り合い、平衡状態となる。飽和蒸気圧の温度依存性と蒸発熱との関係を考えよう。

以下の設問において、必要に応じて表 1 で与える物理定数を用いよ。

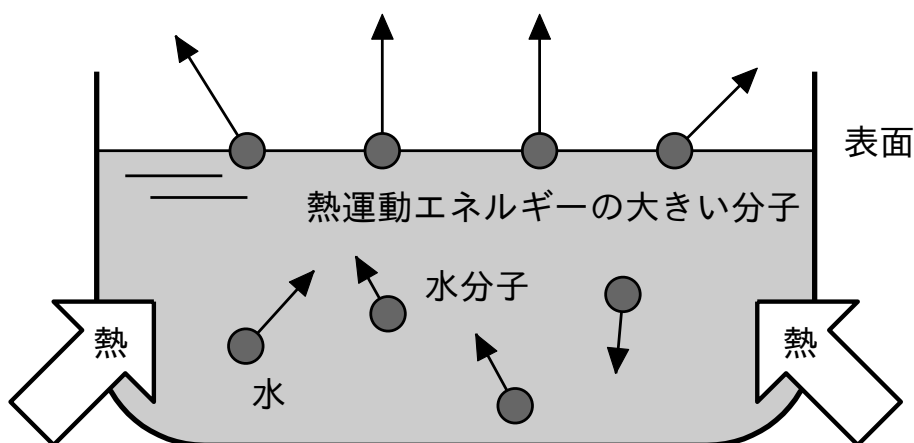


図 1. 水の蒸発

ある系が一連の状態変化を経て元の状態に戻る過程をサイクルといい、サイクルを繰り返すことにより受け取った熱エネルギーの一部を変換して外部に対して仕事をする系を熱機関という。また、熱機関の動作を担う物質を作業物質という。熱機関の中で重要な過程であるカル

表 1. 物理量の記号・数値・単位

物理量	記号	数値	単位
気体定数	R	8.31	$\text{J K}^{-1} \text{mol}^{-1}$
ボルツマン定数	k_B	1.38×10^{-23}	J K^{-1}
アボガドロ定数	N_A	6.02×10^{23}	mol^{-1}
重力加速度の大きさ	g	9.8	m s^{-2}
空気分子の平均質量	M_a	4.78×10^{-26}	kg
水分子の質量	M	2.99×10^{-26}	kg

ノーサイクルとは，次の 4 つの可逆過程（準静的過程）を経由して元の状態に戻るサイクルをいう。

- (a) 等温膨張過程
- (b) 断熱膨張過程
- (c) 等温圧縮過程
- (d) 断熱圧縮過程

等温膨張過程 (a) では，系は絶対温度（以降，単に温度と記す） T_1 の高温熱源に接しており，系は高温熱源から熱を受け取る。等温圧縮過程 (c) では，系は温度 T_2 ($T_2 < T_1$) の低温熱源に接しており，系は低温熱源へ熱を放出する。系が高温熱源から受け取る熱量を Q_1 ，低温熱源へ放出する熱量を Q_2 とすると，1 サイクルの間に系が外部に対してする仕事 W は，熱力学第 1 法則より， $W = Q_1 - Q_2$ となる。

一般に，系が高温熱源から受け取る熱量に対する，系が外部に対してする仕事の割合を熱機関の熱効率という。熱効率を η と記すことにすると，上記のカルノーサイクルの場合は，

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \quad (1)$$

である。カルノーサイクルの熱効率 η は，作業物質によらず，

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (2)$$

であることが知られている。

以下では， $T_1 = T$ ， $T_2 = T - \Delta T$ とし，図 2 のように作業物質として気液 2 相共存状態の水をピストンの付いたシリンダー内に閉じ込めた系を想定し，水蒸気を飽和状態に保ちながら以下の過程 (a)～(d) に従って系を操作する，カルノーサイクルを考える。

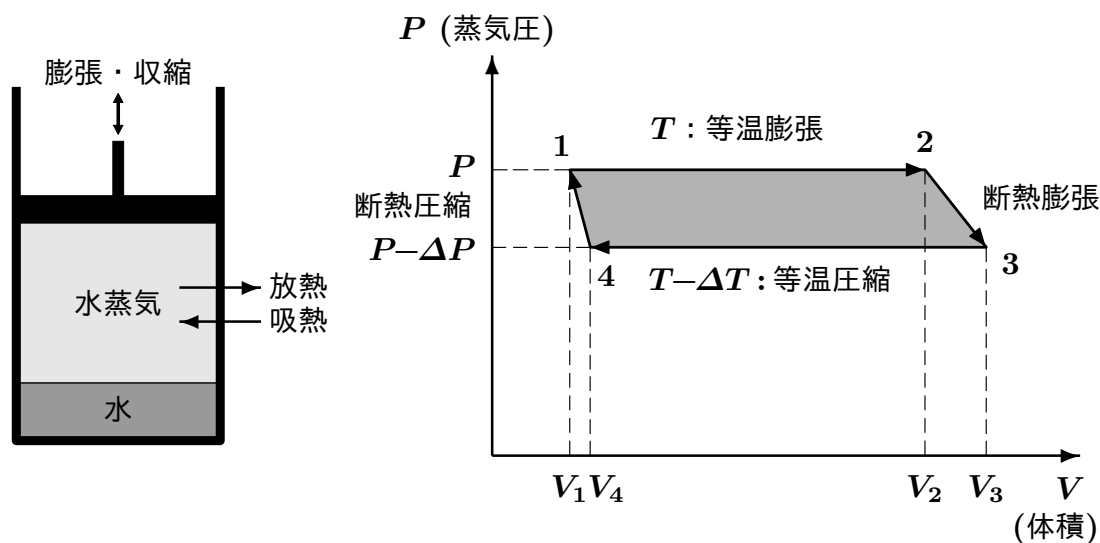


図 2. 気液 2 相共存状態の水を作業物質とするカルノーサイクル

- (a) 温度 T 、体積 V_1 で 2 相共存状態にある系を、温度 T の高温熱源に接触させて体積 V_2 まで等温膨張させる。この間、系は熱量 Q_1 を吸収して液体の水の一部が気化し、系の圧力 P は温度 T の飽和蒸気圧に保たれる。
- (b) 系を高温熱源から切り離し、断熱膨張させる。この間、系の温度は T から $T - \Delta T$ に、圧力は P から $P - \Delta P$ に変化する。
- (c) 系を温度 $T - \Delta T$ の低温熱源に接触させて等温圧縮する。この間、系は熱量 Q_2 を放出して水蒸気の一部が液化し、系の圧力 $P - \Delta P$ は温度 $T - \Delta T$ の飽和蒸気圧に保たれる。
- (d) 最後に、系を低温熱源から切り離し、元の体積 V_1 まで断熱圧縮する。この間、系の温度は $T - \Delta T$ から T に、圧力は $P - \Delta P$ から P に変化する、元の状態に戻る。

ここで、飽和水蒸気の状態が保たれたまま水の一部が蒸発して体積が増加する等温膨張過程 (a)、および、水蒸気の一部が凝縮して体積が減少する等温圧縮過程 (c) では、圧力はそれぞれの温度の飽和蒸気圧 P および $P - \Delta P$ で、一定であることに注意しよう。

問 1 温度 T の飽和蒸気圧 P における液体状態の水 1 モルあたりの体積を V_{liq} 、水蒸気 1 モルあたりの体積を V_{gas} 、水 1 モルあたりの蒸発熱を L とする。過程 (a) において作業物質が吸収する熱量 Q_1 をこれらの量を用いて表せ。

1 サイクルの間に系が外部にする仕事 W は、図 2 の状態図で四角形で囲まれた部分の面積に等しい。いま、圧力変化 ΔP 、温度変化 ΔT が十分に小さく、仕事 W は、

$$W \doteq (V_2 - V_1)\Delta P$$

と近似できるとする。

問 2 カルノーサイクルの熱効率 (1) が式 (2) に等しいことを用いて、関係式

$$\frac{\Delta P}{\Delta T} \doteq \frac{L}{T(V_{\text{gas}} - V_{\text{liq}})} \quad (3)$$

を導け。ただし、 $\Delta T \ll T$ と近似してよい。

式 (3) で温度変化 ΔT が無限小の極限をとると、飽和蒸気圧の温度依存性を表す以下の関係式を得る。

$$\frac{dP}{dT} = \frac{L}{T(V_{\text{gas}} - V_{\text{liq}})} \quad (4)$$

この式はクラウジウス・クラペイロンの式と呼ばれる。

問 3 水蒸気の体積 V_{gas} にくらべ、水の体積 V_{liq} が無視できるとし、また、水蒸気の状態方程式を理想気体のもので近似すると、式 (4) は

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dT} = \frac{L}{RT^2} \quad (5)$$

となることを示せ。ここで R は気体定数である。

問 4 温度が T_0 の水の飽和蒸気圧を P_0 とし、蒸発熱 L が温度によらないとしたとき、式 (5) を積分して、温度 T の飽和蒸気圧が

$$P = P_0 \exp \left[\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \frac{L}{R} \right] \quad (6)$$

で与えられることを示せ。ここで $\exp[x]$ は指数関数 e^x を表す。

問 5 実測によると、 0°C および 25°C の水の飽和蒸気圧は、それぞれ $0.611 \times 10^3 \text{ Pa}$ および $3.17 \times 10^3 \text{ Pa}$ である。式 (6) を用いて水の蒸発熱 L を求めよ。また、 27°C の飽和蒸気圧 P_{27} を求めよ。ただし、気体定数 R には表 1 に与えられた数値を用いよ。

水の蒸発熱の実測値は温度 25°C で $L = 4.40 \times 10^4 \text{ J/mol}$ であり、温度とともにわずかに小さくなることが知られている。以下では、水の蒸発熱の値として、温度によらず $L = 4.4 \times 10^4 \text{ J/mol}$ を用いて、設問に答えよ。

問 6 水の蒸発熱 L のうち、外部への仕事 $P(V_{\text{gas}} - V_{\text{liq}})$ を取り除いたものが水分子が水中から飛び出すのに必要なエネルギーと考えてよい。 25°C のとき 1 個の水分子が水中から飛び出すのに必要なエネルギー U_v を求めよ。また、この U_v は、その温度の水分子の並進運動エネルギーの平均値 K_{25} の何倍か。問 3 と同様、 V_{gas} に対して V_{liq} を無視してよい。必要なら表 1 の物理定数の数値を用いよ。

大気中の水の量と温暖化による大雨の可能性

南太平洋の海水の温度が 25°C から 27°C まで 2°C 上昇したとき、上空の水蒸気の量が単位面積あたりどれほど増加するかを推定し、海水の温度上昇により雨量がどれほど増加する可能性があるか考えよう。

高度 x での気温（絶対温度）を $T(x)$ 、大気圧を $P_a(x)$ 、大気の水蒸気分圧を $P(x)$ とする。 $T(x) = T(0)f(x)$ としたとき、観測によると高度 x による平均的な気温の降下は、

$$f(x) = 1 - \frac{\alpha}{T(0)}x, \quad (\alpha = 6.0 \times 10^{-3} \text{ K/m}) \quad (7)$$

と与えられる。ただし、 $T(0)$ は海面 ($x = 0$) での気温である。高度 x として対流圏の範囲 $0 \leq x \leq 10^4 \text{ m}$ を考えることにすれば、海面の温度 $T(0)$ を 0°C 程度としても、 $f(x)$ の第 2 項は $0 \leq \frac{\alpha}{T(0)}x < 0.22$ となり、第 1 項よりもかなり小さい。

問 7 高度 x の気温 $T(x)$ に対する式 (6) の飽和蒸気圧を $P_s(x)$ とする。 $1 \gg \frac{\alpha}{T(0)}x$ のとき,

$$P_s(x) \doteq P_s(0) e^{-Ax} \quad (8)$$

と近似できる。 A を求めよ。ただし、 $T(0)$ 依存性以外は単位つきの数値で表せ。

問 8 大気圧 $P_a(x)$ の高度 x 依存性を求めたい。

(a) 高度 x における大気の密度を $\rho(x)$ として、圧力による力と重力の釣り合いの式を導け。

(b) それを解くことにより,

$$P_a(x) = P_a(0) \exp \left[-\frac{M_a g}{k_B T(0)} \int_0^x \frac{1}{f(x')} dx' \right]$$

となることを示せ。ただし、 $P_a(0)$ は海面での大気圧である。また、空気を分子 1 個あたりの平均質量が M_a の理想気体とせよ。

(c) $f(x) \doteq 1$ と近似すると

$$P_a(x) \doteq P_a(0) e^{-Bx} \quad (9)$$

と表せる。この B を求めよ。ただし、 $T(0)$ 依存性以外は単位つきの数値で表せ。必要ならば表 1 の物理量の数値を用いよ。

さて、これらの表式を用いて、大気の水蒸気分圧が飽和蒸気圧になる高度を求めよう。

まず、高度の上昇につれて大気圧 $P_a(x)$ は減少する。大気の水蒸気分圧 $P(x)$ も大気圧に比例して減少する、すなわち

$$\frac{P(x)}{P(0)} = \frac{P_a(x)}{P_a(0)} \quad (10)$$

と仮定する。

問 9 海面での水蒸気分圧 $P(0)$ と飽和蒸気圧 $P_s(0)$ の比を q (湿度), すなわち

$$q = \frac{P(0)}{P_s(0)}, \quad (0 \leq q \leq 1)$$

とする。

(a) すでに求めた $P_s(x)$ および $P_a(x)$ の高度変化の式 (それぞれ式 (8), (9)) を用いて、水蒸気分圧が飽和蒸気圧に等しくなる高度 x_s の表式を求めよ。

(b) $q = 0.6$ で海面温度が 25°C のとき、水蒸気分圧が飽和蒸気圧に等しくなる高度 x_s はいくらか。

問 9 の結果は、 $q < 1$ ，すなわち、海面で湿度が 100% でなくても上空では湿度が 100% に達し、それより上空で雲が発生することを意味する。すなわち x_s は「雲が発生する高度」ということで、“雲底の高度”と呼ばれている。海面での湿度が 100% の場合は雲底は海面になる。

最後に、 $q = 1$ ，すなわち、海面での水蒸気分圧が飽和蒸気圧に達しているとして、海面上空の大気中に含まれる単位面積当たりの水蒸気の質量 F [kg/m²] を求めよう。

問 10 雲の寄与は無視すると、高度 x での大気の水蒸気分圧 $p_s(x)$ は $\frac{N_A M P_s(x)}{RT(x)}$ で与えられる。ただし、 M は水分子の質量である。

(a) $\rho_s(x) \doteq \frac{N_A M P_s(x)}{RT(0)}$ の近似の下で、 F の表式を求めよ。ただし、この近似は任意の x で成り立つとせよ。

(b) 海水温度が 25°C および 27°C のときの F の値、 F_{25} および F_{27} を求めよ。ただし、飽和蒸気圧の値は、問 5 で与えられたもの、およびそこで求めたものを用いよ。

大気中に含まれる水蒸気量 F は可降水量と呼ばれる。上の結果は、海水温の上昇により雨量が増加することを示唆している。しかし、地球温暖化によりそれぞれの地域の降水がどう変化するかは、ここでは考慮していない雲の発生や大気の流れなど、複雑なプロセスもかかわっており単純ではない。

第 4 問 (70 点)

主系列星の光度と表面温度

宇宙の基本的構成要素である星の物理を考えてみよう。

図 1 はヘルツシュプルング・ラッセル図 (HR 図) と呼ばれる, 個々の星の表面温度と光度 (単位時間あたりのエネルギー^{ふくしや}輻射量) を示したものである。歴史的慣習により, HR 図の横軸の温度は, 左から右に低くなる表示となっている。左上から右下にかけての系列が顕著に見られることから, この系列を主系列, そこに分布する星を主系列星と呼ぶ。表 1 の物理定数表を適宜活用しながら, この主系列の物理的意味を考えてみよう。

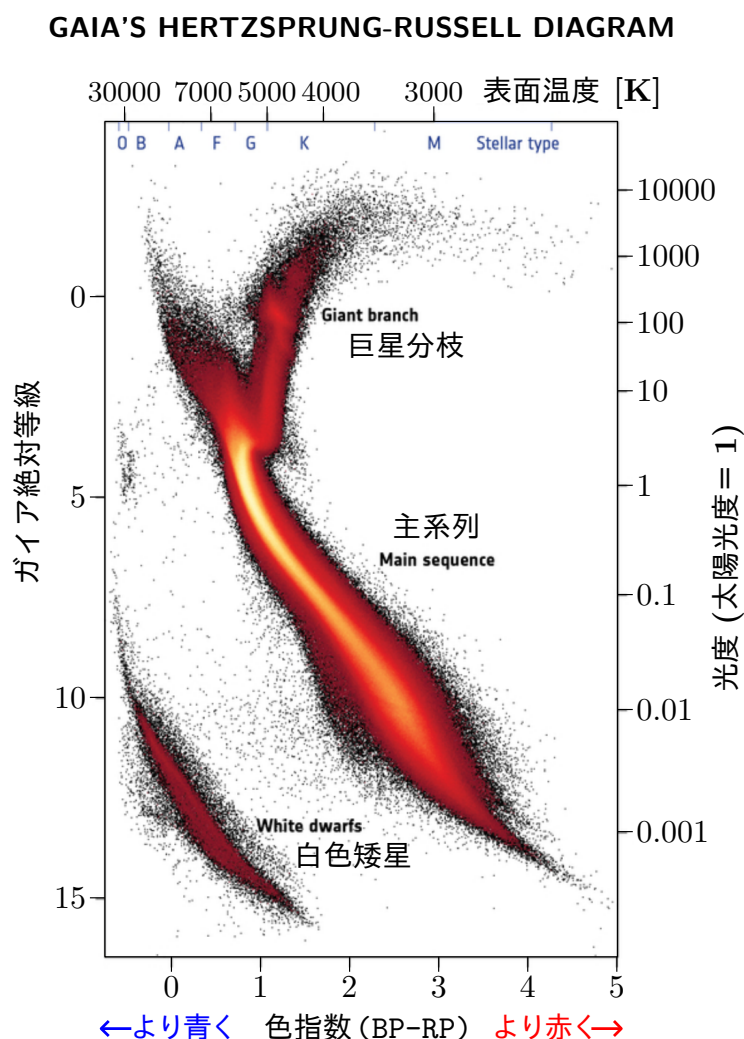


図 1. 欧州宇宙機関の観測衛星ガイア (Gaia) は, 銀河系の精密な 3 次元地図を作成することを目的とし, 1000 億個もの恒星の位置や運動の測定や種々の物理量の測定を行なっている。この図は, ガイアによって測定された星について, 太陽光度を 1 とした星の光度 L を右側の縦軸に, 星の表面温度 T_e (単位は K) を上側の横軸にして表示したヘルツシュプルング・ラッセル図 (HR 図) である^{*1} (出典: 欧州宇宙機関 <https://sci.esa.int/web/gaia/-/60198-gaia-hertzsprung-russell-diagram>)。

^{*1} 左側の縦軸の目盛りは見かけの明るさにガイアで測定した距離の効果のみを補正した「ガイアの絶対等級」。右側の縦軸に示した光度は, それに他の較正を加味して暫定的に換算したものである。

表 1. 物理定数表

名称	記号	数値	単位
真空中の光速	c	3.00×10^8	m s^{-1}
万有引力定数	G	6.67×10^{-11}	$\text{N m}^2 \text{kg}^{-2}$
陽子の質量	m_p	1.67×10^{-27}	kg
ボルツマン定数	k	1.38×10^{-23}	J K^{-1}
アボガドロ定数	N_A	6.02×10^{23}	mol^{-1}
輻射密度定数	a	7.56×10^{-16}	$\text{W m}^{-3} \text{s K}^{-4}$

以下の問では、星は、ガス球からなり、質量は中心のまわりに球対称に分布しているとする。
また、物理定数表に与えられた定数の記号と数値は自由に用いてよい。

問 1 図 2 の模式図の様に、星の内部で、中心から半径 r 、質量 m の球をとり、そのすぐ外側の、厚み Δr 、質量 Δm の球殻を考える。 Δr と Δm は微小量とし、球殻内の密度は一定値 ρ とみなす。微小量の積を含む 2 次以上の項は落とすこととすれば、球殻の体積は $4\pi r^2 \Delta r$ となるので、

$$\Delta m = 4\pi r^2 \Delta r \rho$$

と表すことができる。

$\Delta m \rightarrow 0$ の極限をとることにより、導関数 $\frac{dr}{dm}$ を、 r と ρ で表せ。

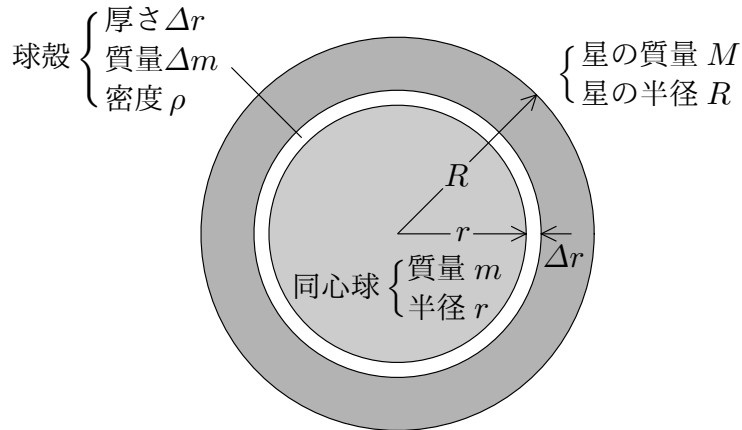


図 2. 星の断面の模式図

以下では、質量 m を独立変数として、半径 r や密度 ρ などの物理量を m の関数とみなそう。

- 問2 星は、重力で収縮しようとする力と膨張させようと働くガスの圧力による力とが釣り合って、力学的平衡状態にある。球殻に働く重力は、内側のガス球から働く重力のみであるから、外向きを正として

$$-\frac{Gm\Delta m}{r^2}$$

となる。一方、単位面積あたりに働くガス圧力を p と記せば、球殻に働くガスの圧力による力は外向きを正として、球殻の面積 $4\pi r^2$ に、球殻の内側表面での圧力 $p(m)$ と外側表面での圧力 $p(m + \Delta m)$ の差 $\Delta p \equiv p(m + \Delta m) - p(m)$ を乗じた

$$-4\pi r^2 \Delta p$$

になる。

$\Delta m \rightarrow 0$ の極限をとることにより、導関数 $\frac{dp}{dm}$ を、 m と r 、および物理定数 G で表せ。

- 問3 星の中心では、質量 $m = 0$ 、半径 $r(0) = 0$ である。星の中心での密度を $\rho(0) = \rho_c$ 、圧力を $p(0) = p_c$ とする。一方、星の表面では、質量 m は星の全質量 M に等しく、また、星の半径を R とすると、 $r(M) = R$ である。表面での密度 $\rho(M)$ と圧力 $p(M)$ は、それぞれ ρ_c と p_c より十分に小さいので、共に $\rho(M) = 0$ 、 $p(M) = 0$ とする。

(a) 問1で求めた導関数は

$$\frac{dr}{dm} = f(r, \rho)$$

の形で表されている。左辺 $\frac{dr}{dm}$ を星の中心と表面との間の $r(m)$ の平均の変化率とし、右辺の r と ρ には星の中心と表面の値の平均値を用いることにより、 ρ_c を、 M と R で表せ。

(b) 問2で求めた導関数は

$$\frac{dp}{dm} = g(m, r)$$

の形で表されている。左辺 $\frac{dp}{dm}$ を星の中心と表面との間の $p(m)$ の平均の変化率とし、右辺の m と r には星の中心と表面の値の平均値を用いることにより、 p_c を、 M と R 、および物理定数 G で表せ。

- (c) 星の質量と半径を、それぞれ現在の太陽程度の値 $M = 2 \times 10^{30}$ kg、 $R = 7 \times 10^8$ m として、 ρ_c と p_c の概略値を、それぞれ有効数字1桁で求めよ。

- 問4 星の成分は水素であるとしよう。星の中心部では温度が高いため水素原子はイオン H^+ と電子 e^- に電離していると考えられる。また、ガスは理想気体とみなすことができる。

(a) 中心での H^+ と e^- の粒子数密度（単位体積あたりの粒子数）の和を見積もり、ガスの温度 T_c を、 M と R 、および物理定数 G 、 k 、 m_p で表せ。

(b) $M = 2 \times 10^{30}$ kg、 $R = 7 \times 10^8$ m として、 T_c の概略値を、有効数字1桁で求めよ。

中心は温度が高く、表面は温度が低いので、エネルギーは必然的に内から外へと流れる。結果として、星はどのくらいの明るさで輝いているのであろうか。それを考えるために、まずは温度 $T(m)$ についての導関数 $\frac{dT}{dm}$ を導いてみよう。

問 5 ここでは、エネルギーは全て光（電磁波）の輻射で運ばれるとして扱おう。星の内部は光にとっては著しく不透明で、イオンと電子による吸収・発光のため、光（光子・フォトン）の道筋は著しく不規則なもの（ランダム・ウォーク）となり、1 秒間に外向きに進める距離は、星の中心部ではセンチメートル程度に過ぎない。この過程で質量 Δm 、半径 $r(m)$ 、厚さ Δr の球殻ガスが輻射から受ける力を考えてみる。

球殻に単位時間あたりに吸収される輻射のエネルギー量は、球殻に入射する単位時間あたりのエネルギー量（輻射光度） $\ell(m)$ 、並びに球殻の厚さ Δr に比例すると共に、その球殻の不透明さの度合いにも依る。そこで、単位密度あたりの不透明度を κ （次元は $[\text{長さ}]^{-1}[\text{密度}]^{-1}$ ）とすれば、球殻に吸収されるエネルギーは、単位時間あたり、

$$\kappa \rho \ell \Delta r$$

と表される。よって、光速度を c として、球殻は、輻射から

$$F = \frac{\kappa \rho \ell}{c} \Delta r$$

の外向きに働く力を受けることになる。

一方で、輻射圧 p_{rad} は、温度 T の 4 乗に比例することが知られている。その比例係数は、輻射密度定数と呼ばれる a の $1/3$ であり、

$$p_{\text{rad}} = \frac{a}{3} T^4$$

と表される。よって、球殻に対して働く輻射による外向きの力 F は、球殻の面積 $4\pi r^2$ に球殻の内側表面での輻射圧 $p_{\text{rad}}(m)$ と外側表面での輻射圧 $p_{\text{rad}}(m + \Delta m)$ の差 $\Delta p_{\text{rad}} \equiv p_{\text{rad}}(m + \Delta m) - p_{\text{rad}}(m)$ を乗じたものであるから、内側表面での温度 $T(m)$ と外側表面での温度 $T(m + \Delta m)$ の差 $\Delta T \equiv T(m + \Delta m) - T(m)$ を用いて、

$$F = -4\pi r^2 \frac{4a}{3} T^3 \Delta T$$

とも表される。

以上の考察に基づき、温度 $T(m)$ についての導関数 $\frac{dT}{dm}$ を、 ℓ 、 r 、 T 、 κ 、および物理定数 a 、 c で表せ。

問 6 星の中心では $\ell(0) = 0$ である。また、星の表面での輻射光度 $\ell(M)$ は星の光度 L に他ならない。

(a) 問 5 で求めた導関数は

$$\frac{dT}{dm} = h(\ell, r, T, \kappa)$$

の形で表されている。左辺の導関数 $\frac{dT}{dm}$ を星の中心と表面との間の $T(m)$ の平均の変化率で置き換え、右辺の ℓ, r, T には星の中心と表面の値の平均値を用い、また κ を星全体での平均値 $\langle \kappa \rangle$ で置き換えることにより、星の光度 L を、 M と $\langle \kappa \rangle$ 、および物理定数 a, c, G, k, m_p で表せ。ただし、星の表面の温度は、中心での温度 T_c に比べると十分に低いので、ここでは 0 とみなしてよい。

(b) 星の質量と半径を、それぞれ現在の太陽程度の値 $M = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$, $R = 7 \times 10^8 \text{ m}$ とし、 $\langle \kappa \rangle = 10^2 \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$ としたとき、星の光度 L の概略値（単位は W）を、有効数字 1 桁で求めよ。

問 7 星の表面温度を T_e とすると、星から単位時間に発せられる輻射エネルギー（星の光度） L は、 T_e の 4 乗と表面積との積に比例する。星の半径 R が、星の質量 M に比例していると仮定したとき、問 6(a) の結果を使って $\langle \kappa \rangle^{-2} L$ の T_e 依存性（何乗に比例するか）を求めよ。

地球上で見つかっている最も古い隕石の年齢を根拠に、現在の太陽の年齢は 47 億年と見積もられている。これほど長い寿命の合理的な説明として、主系列星のエネルギー供給源は中心部での水素からヘリウムへの核融合反応であると考えられる。

仮に生まれた時には水素のみから成る星であったとしても、星の中心部で水素が枯渇するまで水素の核融合反応が進むと、やがてはヘリウム原子核が核融合反応を起こして炭素原子核を生成するようになる。同様に、ヘリウムが枯渇すると、炭素が核融合を起こすようになるであろう。しかしながら、HR 図は、水素核融合反応が起きている主系列段階の星が、圧倒的に多数であることを示している。これはどうしてであろうか。いくつかの原因要素のうち、ここでは、核融合反応が星のエネルギー供給源である時間が、原子核の種類により異なることを考えてみよう。

問 8 仮に、星のエネルギー供給源が中心部でのヘリウム原子核の核融合の場合も、また炭素原子核の核融合の場合も、星の光度は、主系列星のときと同じ程度であるとしよう。水素の核融合反応では、水素原子核 4 つからヘリウム原子核 1 つが生じ、ヘリウムの核融合反応では、ヘリウム原子核 3 つから炭素原子核 1 つが生じる。このこと、および、水素 (^1H)、ヘリウム (^4He)、炭素 (^{12}C) の原子量が、それぞれ、1.008, 4.002, 12.000 であることに着目して、水素の原子核の核融合反応がエネルギー供給源である時間とヘリウムの原子核の核融合反応がエネルギー供給源である時間との長さの比を求めよ。

