

マックスウェル、レイリー、そしてエヴェレスト山：問題

1897年、レイリー卿はインドのダージリンを訪れた。170km離れたエベレストを見たとき、彼は26年前にマックスウェルが空気による光の減衰と遠くの山々の見え方について彼に質問したことを思い出した。レイリー卿はその2年後の1899年に、有名な研究論文¹を執筆し、この問題についての研究を公表している。本問題では、レイリー卿の推論を少なくとも部分的には現代風に再構成することを試みる。

電子雲の振動: 典型的な中性空気分子を、質量 m 、半径 r 、電荷 $-q$ の球状の一樣電荷雲に囲まれた静止した正電荷 q でモデル化する。分子の固有（角）振動数は ω_0 である。これに光を入射すると、負電荷雲は角振動数 ω で球状を維持したまま光波の電場

$$\vec{E}(t) = E_0 \cos(\omega t) \hat{y}, \quad (1)$$

のもとで次のように振動する。

$$y = y_0 \cos(\omega t), \quad (2)$$

ここで y は定常的な正電荷と分子の負電荷雲の中心との間の距離を表す。

A.1	y の方程式を立てよ。電場による加速度を $E(t)q/m$ とする。	0.5pt
A.2	以上の情報をもとに y の方程式を解き、振幅を求めよ。	0.5pt
A.3	$\omega \ll \omega_0$ の低周波数領域で、空気分子の双極子モーメントの大きさ $p(t)$ を時間の関数として求めよ。	0.5pt
A.4	ω_0 を q, m と r を用いて表せ。	0.5pt

放射強度: 正弦波時間依存の双極子から電磁波が放射される。放射される電力は、双極子モーメントの振幅 $p_0 = qy_0$, 真空の誘電率 ϵ_0 , 光速 c と振動の角振動数 ω に依存する。

B.1	次元解析を用い、放射される平均のパワー（単位時間当たりのエネルギー）を求めよ。	1pt
B.2	比例係数を $1/12\pi$ として放射パワー s を E_0, ω_0, ω などを用いて表せ。 $\omega \ll \omega_0$ とする。	0.2pt

電磁場の強度 $I(x)$ が

$$\frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2. \quad (3)$$

と表される事を思い起こそう。光の経路に沿って強度が低下するのは、単位体積当たりのパワー

$$S = n_0 s \quad (4)$$

が失われるからである。ここで、 n_0 は単位体積あたりの分子の数である。

¹Philosophical Mag. "On the transmission of light through an atmosphere ... and the origin of the blue of the sky", Vol. 47, pg 375-384, 1899

C.1 強度 $I(x)$ の減衰の様子を距離 x の関数として表せ。 1pt

C.2 強度の初期値を I_0 とするとき、強度 $I(x)$ を特徴的な長さ L で測った x の関数として表現せよ。 0.5pt

C.3 電子の質量を m とする (典型的な場合、電子雲は一つの電子だけでできている)。また次の数値が与えられているとする。 0.3pt

$$n_0 = 2.54 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}, \quad (5)$$

$$\omega_0 = 1.25 \times 10^{16} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \quad (6)$$

$$\omega = 3.25 \times 10^{15} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (7)$$

このとき、 L の数値をキロメートル単位で求めよ。

D.1 山のみかけの高さ H' : 図中で P はヒマラヤ東部の丘にあるの海拔 2042 m のダージリン駅を表す。線分 BS はそこから $d = 170 \text{ km}$ 離れた高さ $H = 8848 \text{ m}$ のエヴェレスト山を表す。もう一つの峰カンチェンジュンガ山 (図に示されてはいない) は、ダージリンから 75 km 離れており、高さは 8586 m である。ダージリンから見たこれらの山の見かけの高さ H' を上記の諸量で表し、数値を求めよ。観測者は水平以下は見えない。適切な図を描け。地球の半径 R を 6378 km とする。 2pt

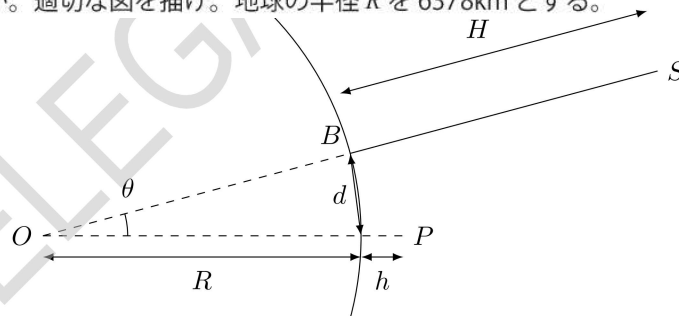


図 1. 高さ H の山 BS と高さ h の観測者 P がその上に乗る大円。図のスケールは正確ではない。

E.1 ダージリンでのカンチェンジュンガ山の強さを基準値とする。ダージリンから見たエベレストの強度は、カンチェンジュンガ山に対してどの程度になるか？この問題では、高さによる空気分子の数密度の変化は無視する。基準値に対して 5% 以上であれば、山が見えるという。ダージリンからエベレストは見えるか？ 1pt

F.1 エアロゾル汚染による減衰長 L_p : 上では、空気分子との散乱による強度低下に伴う特徴的な長さ L を計算した。ここでは、エアロゾル粒子による散乱の強度低下に伴う特性長 L_p に注目する。 L_p は粒子の数密度 n と半径 r のエアロゾル粒子の断面積 πr^2 に依存する。この依存性を物理的な洞察と次元解析を使って求める。無次元定数を $1/8$ とする。汚染が軽度の場合、ダーズリンにおけるエアロゾルの平均密度は $\rho_p = 5 \mu\text{g}/\text{m}^3$ であり、その平均半径は 500 ナノメートルである。長さ L_p はいくらか？ 個々のエアロゾル粒子の密度を $\rho = 3 \text{g}/\text{cm}^3$ とする。ただし、 $1\mu\text{g}=10^{-9}\text{kg}$, $1\text{nm}=10^{-9}\text{m}$ である。 1pt

G.1 カンチェンジュンガ山とエヴェレスト山の相対強度と可視度 : カンチェンジュンガ山とエヴェレスト山が上記の汚染レベルである場合、基準値に対する相対的な強度を見積もれ。ダーズリンからこれらの山が見えるとしたら、どちらの山か。光が通る道全体が一様に汚染されていると仮定して答えよ。 1pt