

## 中性子星 (10 点)

大きな原子核の安定性を議論し、中性子星の質量を理論的・実験的に見積もる。

### パート A. 原子核の質量と安定性 (2.5 点)

$Z$  個の陽子と  $N$  個の中性子からなる原子核の静止エネルギー  $m(Z, N)c^2$  は、それぞれの数の陽子と中性子 (以下、核子と呼ぶ) の静止エネルギーの和よりも、結合エネルギー  $B(Z, N)$  の分だけ小さい。ここに、 $c$  は真空中の光速である。細かい補正を無視すると、結合エネルギーは、体積項  $a_V$ 、表面項  $a_S$ 、クーロンエネルギー項  $a_C$ 、対称エネルギー項  $a_{\text{sym}}$  から成るものとして次のように近似できる：

$$m(Z, N)c^2 = Am_Nc^2 - B(Z, N), \quad B(Z, N) = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N - Z)^2}{A}. \quad (1)$$

ここで、 $A = Z + N$  は質量数、 $m_N$  は核子の質量である。ここでの計算では、 $a_V \approx 15.8$  MeV、 $a_S \approx 17.8$  MeV、 $a_C \approx 0.711$  MeV、 $a_{\text{sym}} \approx 23.7$  MeV (MeV =  $10^6$  電子ボルト) とせよ。

**A.1**  $Z = N$  の条件の下で、核子 1 個あたりの結合エネルギー  $B/A$  を最大にする  $A$  を求めよ。 0.9pt

**A.2**  $A$  を固定した条件の下で、最も安定な原子核  $Z^*$  の原子番号は、 $B(Z, A - Z)$  を最大化することによって決定される。 $A = 197$  の場合に、式 (1) を用いて  $Z^*$  を求めよ。 0.9pt

**A.3**  $A$  の大きな原子核は、全静止質量エネルギーを最小にするべく、核分裂によって軽い原子核に分裂する。簡単のために、 $(Z, N)$  を持つ核が、2 つの同じ核に分裂する場合を考える。そのとき、次のエネルギー関係が成り立つ： 0.7pt

$$m(Z, N)c^2 > 2m(Z/2, N/2)c^2.$$

上の不等式を

$$Z^2/A > C_{\text{fission}} \frac{a_S}{a_C}$$

と表すとしたとき、 $C_{\text{fission}}$  を有効数字 2 桁で求めよ。

### パート B. 巨大な原子核としての中性子星 (1.5 点)

質量数  $A$  が十分に大きくて、ある閾値  $A_c$  を超える ( $A > A_c$ ) 場合、原子核は、重力による束縛エネルギーが十分に大きいため、核分裂をせずに安定に保たれる。

- B.1** 十分に大きい  $A$  では、 $N = A$  と  $Z = 0$  が実現され、式 (1) は重力による束縛エネルギーを加えればそのまま成り立つと仮定する。重力による束縛エネルギーは 1.5pt

$$B_{\text{grav}} = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

である。ここで、 $M = m_N A$  と  $R = R_0 A^{1/3}$  とは、それぞれ、原子核の質量と半径である。ただし、 $R_0 \simeq 1.1 \times 10^{-15} \text{ m} = 1.1 \text{ fm}$  である。

$B_{\text{grav}} = a_{\text{grav}} A^{5/3}$  として、 $a_{\text{grav}}$  を MeV の単位で有効数字 1 桁で求めよ。次に、表面項を無視して、 $A_c$  を有効数字 1 桁で求めよ。計算では、 $m_N c^2 \simeq 939 \text{ MeV}$ 、 $G = \hbar c / M_P^2$  とせよ。ここで、 $M_P c^2 \simeq 1.22 \times 10^{22} \text{ MeV}$ 、 $\hbar c \simeq 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$ 。

### パート C. 連星系の中性子星 (6.0 点)

一部の中性子星は、電磁波（ここでは簡潔に「光」と呼ぶことにする）を一定の周期で規則的に放射するパルサーである。中性子星はしばしば白色矮星と連星系をなす。図 1 に示すような星の配置を考えてみよう。中性子星 **N** から地球 **E** に向かう光パルスは、連星系の白色矮星 **W** の近くを通る。星の重力の影響を受けたこれらのパルスを測定することで、以下に説明するように、**W** の質量を正確に推定することができ、結果として **N** の質量を推定することができる。

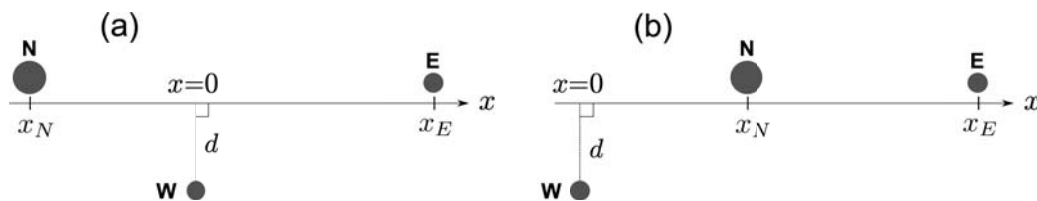
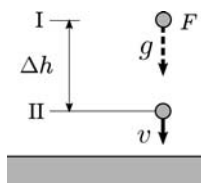


図 1: N と E を結ぶ直線に沿って  $x$  軸をとった場合の配置。(a)  $x_N < 0$  の場合と (b)  $x_N > 0$  の場合。

- C.1** 下図に示すように、一定の重力加速度  $g$  の下で、高低差  $\Delta h (> 0)$  のある2つの高さ I と II を考える。I, II, および自由落下系である  $F$  にそれぞれ、まったく同じ時計、時計-I, 時計-II, 時計- $F$  を設ける。 1.0pt



思考実験の設定.

観測者は時計- $F$  と共にあり、最初は時計-Iと同じ高さで、その速度はゼロであると仮定する。また、時計は同じものなので時間の進む間隔は同じであり、 $\Delta\tau_F = \Delta\tau_I$  が成り立っている。次に、 $F$  を自由落下させ、慣性系である  $F$  の系で考える。この系では時計-II は時計- $F$  のそばを速度  $v$  で通り過ぎるので、時計-II の時間の伸張はローレンツ変換によって求めることができる。時計- $F$  が時間  $\Delta\tau_I$  を刻む間に、時計-II では時間  $\Delta\tau_{II}$  が経過している。

$\Delta\tau_{II}$  を、 $\Delta\tau_I$  を使って  $\Delta\phi/c^2$  の一次のオーダーで表せ。ここで  $\Delta\phi = g\Delta h$  は重力ポテンシャルの差、すなわち、単位質量あたりの重力ポテンシャルエネルギーの差である。

- C.2** 重力ポテンシャル  $\phi$  のもとでは、時間の遅延が、局所的には光速は  $c$  であるにもかかわらず、無限遠から観測される光の実効速度に変化をもたらす。 $\phi(r = \infty) = 0$  のとき、光の実効速度  $c_{\text{eff}}$  は、 $\phi/c^2$  の一次のオーダーまででは、次のように表される： 1.8pt

$$c_{\text{eff}} \approx \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) c.$$

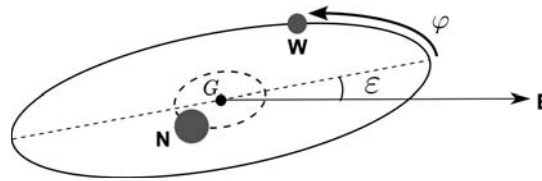
これには、**C.1** では取り上げなかった空間の歪みの影響も含まれている。なお、光路は直線で近似できる。

図 1(a) に示すように、中性子星 **N** から地球 **E** への光路に沿って  $x$ -軸をとり、白色矮星 **W** が光路に最も近い点を  $x = 0$  とする。**N** の  $x$  座標を  $x_N (< 0)$ 、**E** の  $x$  座標を  $x_E (> 0)$ 、**W** と光路との距離を  $d$  とする。

質量  $M_{\text{WD}}$  の白色矮星によって引き起こされる、**N** から **E** への光の到着時間の変化  $\Delta t$  を、以下の小さな量の高次の項を無視して、簡単な形で評価せよ： $d/|x_N| \ll 1$ 、 $d/x_E \ll 1$ 、 $GM_{\text{WD}}/(c^2d) \ll 1$ 。必要であれば、次の公式を用いよ。

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + d^2}} = \frac{1}{2} \log \left( \frac{\sqrt{x^2 + d^2} + x}{\sqrt{x^2 + d^2} - x} \right) + C. \quad (\log \text{ は自然対数を表す})$$

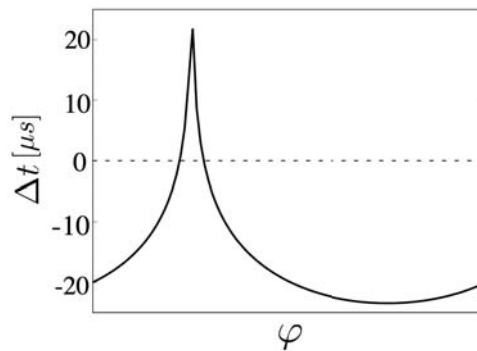
- C.3** 以下に示すように、連星系の **N** と **W** は、軌道面上で、質量中心  $G$  を中心とする離心率ゼロの円軌道を動いていると仮定する。  $\varepsilon$  を  $G$  から **E** に向けた直線と軌道面がなす軌道傾斜角とし、  $L$  を **N** と **W** の間の距離、  $M_{\text{WD}}$  を白色矮星の質量とする。以下では、  $\varepsilon \ll 1$  と仮定する。 1.8pt



連星系.

**N** から遠く離れた **E** で **N** からの光パルスを観測する。 **E** への光路は **N** と **W** の配置によって時間的に変化する。 **E** に到着するパルスの時間間隔の遅れは、  $x_N \simeq -L$  で最大値  $\Delta t_{\text{max}}$ 、  $x_N \simeq L$  で最小値  $\Delta t_{\text{min}}$  となる (図 1(b) を参照)。 **C.2** で行ったような、小さな高次項を無視した単純な形で、  $\Delta t_{\text{max}} - \Delta t_{\text{min}}$  を計算せよ。 **W** 以外の天体の重力による影響は  $\Delta t_{\text{max}} - \Delta t_{\text{min}}$  では相殺されるものとする。

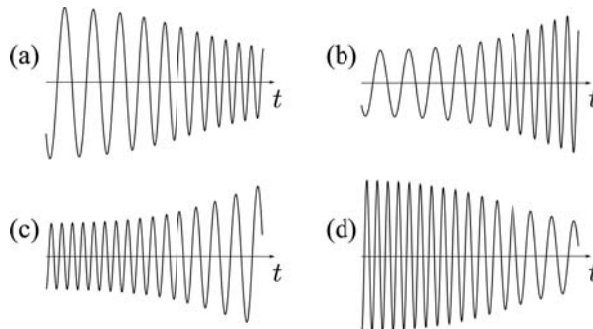
- C.4** 下の図は、  $L \approx 6 \times 10^6 \text{ km}$  で  $\cos \varepsilon \approx 0.99989$  である連星系について、観測される時間遅延を軌道の位相  $\varphi$  の関数として示したものである。  $M_{\text{WD}}$  を太陽質量  $M_{\odot}$  を単位として推定し、結果を  $M_{\text{WD}}/M_{\odot}$  として有効数字 1 桁で示せ。その際、  $GM_{\odot}/c^3 \approx 5 \mu\text{s}$  として近似して良い。 0.8pt



**N** と **W** を軌道上の配置を表す軌道の位相  $\varphi$  (**C.3** に示した図参照) の関数として観測されるパルス時間間隔の遅れ  $\Delta t$  .

- C.5** 中性子星同士の連星系では、2つの星は重力波を放出することによりエネルギーと角運動量を失い、やがては衝突して合体する。簡単のため、半径  $R$ 、角速度  $\omega$  の円運動のみを考えると、相対論的效果を無視すれば、  $\omega$  にも  $R$  にも依存しない一定の値をもつ係数を  $\chi$  として  $\omega = \chi R^p$  が成り立つ。  $p$  の値を求めよ。 0.4pt

- C.6** C.5 の連星系から放出される重力波の振幅は  $R^2\omega^2$  に比例する．下の図は，4つの異なる時間変化のグラフを定性的に示している．2つの星の衝突前に観測される重力波の時間変化のグラフとして最も適切なものを (a)~(d) の中から 1つ選べ． 0.2pt



観測される重力波の時間変化のグラフ．