

## 物理チャレンジ 2023

## 第 2 チャレンジ

## 理論問題

2023 年 8 月 20 日 (日)

理論問題にチャレンジ 9:00~14:00

理論問題にチャレンジする前に下記の<注意事項>をよく読んでください。

問題は、大問 4 題からなります。問題は、一見難問にみえても、よく読むとわかるようになっています。どの問題から取り組んでも結構です。最後まであきらめずにチャレンジしてください。

## &lt;注意事項&gt;

1. 開始の合図があるまで問題冊子を開けないこと。また解答用紙にも手を触れないこと。
2. 解答中に通信機能などを用いて、他の人の助言を受けたり、解を検索するなどの行為は厳禁です。このような不正行為が発覚した場合、物理チャレンジ参加の資格と権利を失います。
3. 問題冊子は表紙、裏表紙と問題 25 ページです。解答用紙は 15 枚です。
4. 配布された電卓を使用することができます。
5. すべての解答は、解答用紙に記入すること。解答用紙の各ページに、必ずチャレンジ番号と氏名を記入すること。
6. 解答ははっきりと書き、消しゴムを使う場合には、きちんと消してください。なお、解答用紙の裏面は使用しないでください。
7. 解答は、最終的な答えのみではなく、解答に至る道筋も詳しく記述すること。
8. 気分が悪くなったときやトイレに行きたくなったとき、または質問がある場合は旗をあげて監督者に知らせること。
9. チャレンジ開始から 200 分 (3 時間 20 分) 経過するまでは、原則として、途中退出はできません。200分経過 (12:20) 後は、退出希望者は旗をあげて監督者に知らせ、すべての解答用紙 (無解答の用紙も含む) は、チャレンジ番号・氏名の記入を確認の上、机の上に置いて退室すること。
10. 他の参加者の迷惑にならないように静粛に解答をすすめること。迷惑行為があった場合は退出させます。
11. 終了の合図があったら、ただちにすべての解答用紙 (無解答の用紙も含む) は、チャレンジ番号・氏名の記入を確認の上、机の上に置いて、監督者の指示を待つこと。
12. 問題冊子ならびに計算用紙は、持ち帰ること。

## 第 1 問 (75 点)

### 力学とくりこみ群

場の量子論の研究の中で芽生えたくりこみ群の理論を、相転移研究で進展したスケーリング理論や粗視化のアイディアと融合させて、大きく発展させたのが、K.G.Wilson で、1982 年のノーベル物理学賞を受賞している。ここでは、ニュートン力学の問題を用いて、くりこみ群の考え方を紹介する。

#### [I] 人工衛星

次のようなことを考えてみよう。崖の上から質量  $m$  の粒子を水平に投げたとする。地球は平面でなく、丸いので、速さが大きくなると、地面に落下することなく、地球を回り続けることになる。図 1 のように、地球の中心を原点とし、原点から距離  $R$  離れた点から、粒子を水平方向に速さ  $U_0$  で打ち出す。ここで、水平方向とは、原点と粒子の位置を結んだ線に垂直な方向という意味である。原点に向かう逆二乗力の万有引力が働いているので、運動を記述するニュートン方程式は

$$m \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}(t) = -mK \frac{\vec{r}(t)}{|\vec{r}(t)|^3} \quad (1)$$

で与えられる。 $\vec{r}(t)$  は時刻  $t$  における 3 次元位置ベクトル、 $K$  は比例定数で、万有引力定数  $G$  と地球の質量  $M$  を用いて、 $K = GM$  と書かれる。粒子が原点から最も遠ざかったときの原点からの距離を  $R_{\max}(U_0)$  と書こう。初速  $U_0$  を決めれば、この最大到達距離は一意的に決まる。

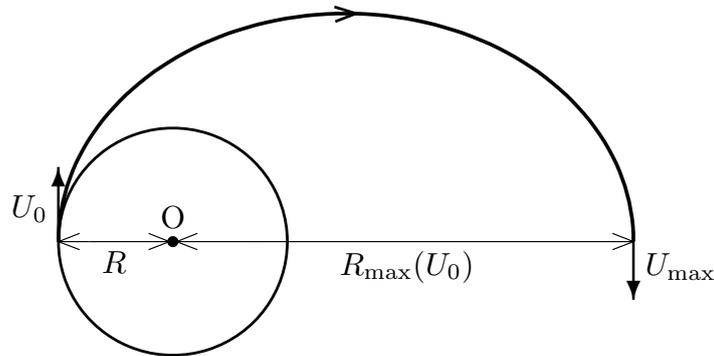


図 1.

問 1 粒子が原点から最も離れた点における速さを  $U_{\max}$  とするとき、 $U_0, R, U_{\max}, R_{\max}(U_0)$  の間に成り立つ、面積速度一定の法則 (角運動量保存則)、エネルギー保存則を書き下せ。なお、粒子が原点から最も遠ざかったとき、速度の鉛直成分はない。

問 2 物体が地球を回り始める初速度  $U_{01}$  (第 1 宇宙速度)、地球から脱出し始める初速度  $U_{02}$  (第 2 宇宙速度) を求めよ。重力定数を  $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ 、地球質量を  $M = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$ 、地球半径を  $R = 6.38 \times 10^6 \text{ m}$  とするとき、 $U_{01}, U_{02}$  を計算せよ。

問 3  $U_0$  を与えたとき,  $R_{\max}(U_0)$  を決める式を求めよ。2つの保存則の式から  $U_{\max}$  を消去すればよい。また,  $U_{01} \sim U_{02}$  の範囲で,  $R_{\max}(U_0)$  のおおよそのふるまいをグラフに示せ。また, 得られた  $R_{\max}(U_0)$  の式に  $U_0 = U_{01}$  を代入して  $R_{\max}(U_{01})$  を計算し, それが, 満たすべき値になることを確かめよ。

問 4  $R_{\max}(U_0)$  は,  $U_0$  が  $U_{02}$  に近づくとき ( $U_0 < U_{02}$ ),

$$R_{\max}(U_0) \doteq \frac{C}{(U_{02} - U_0)^\theta}$$

のように発散する。係数  $C$  と指数  $\theta$  を求めよ。

以下, くりこみ群の考え方で  $\theta$  を求めることをめざす。

## [II] スケール変換

位置ベクトル  $\vec{r}$ , 時間  $t$  に対して,  $\alpha$  および  $s$  を定数として

$$\vec{r}' = \alpha \vec{r}, \quad t' = \alpha^s t$$

のように, それぞれを定数倍した新しい変数  $\vec{r}'$  および  $t'$  を考える。この変換は元の変数  $(\vec{r}, t)$  に対して異なる尺度 (スケール) を用いて測った変数  $(\vec{r}', t')$  に変換することに相当するので, スケール変換と呼ばれている。

問 5 運動方程式 (1) がスケール変換した変数  $(\vec{r}', t')$  で表しても  $\alpha$  に依存せず, 元の方程式と全く同じになるための条件は,  $s = \frac{3}{2}$  であることを示せ。このように, スケール変換した変数で表しても方程式の形が変化しないことをスケール不変という。以下, 求めた  $s = \frac{3}{2}$  の値を使って, 議論を進める。

ここで, [I] と同じように, 原点から距離  $R$  だけ離れた点から, 粒子を打ち出すことを考える。初速度として, 水平方向  $U > 0$  だけでなく, 鉛直方向 (原点から遠ざかる向き) にも  $V > 0$  の成分をもつとする。  $(U, V) = (U_0, 0)$  とすれば, [I] の初期条件と同じになる。この初期条件に対して  $0 < \alpha < 1$  のスケール変換をすると, 上の初期条件は, 図 2 に示すように, 原点から距離  $R' = \alpha R$  だけ離れた点から初速度

$$(U', V') = (\alpha^{-1/2}U, \alpha^{-1/2}V)$$

で粒子を打ち出すという新しい初期条件に移される。なぜなら,  $\vec{r}' = \alpha \vec{r}, t' = \alpha^s t$  であるから, 速さについては,  $U' = \alpha^{1-s}U = \alpha^{-1/2}U$  と変換されるからである。スケール不変性から, この粒子もスケール変換する前の粒子と同じ方程式 (1) に従って運動する。スケール変換された粒子の軌道が, 原点から距離  $R$  に達した時の速度を

$$(\tilde{U}, \tilde{V})$$

とする。これはスケール変換する前の初期条件  $(U, V)$  およびスケール変換のパラメーター  $\alpha$  に依存する。

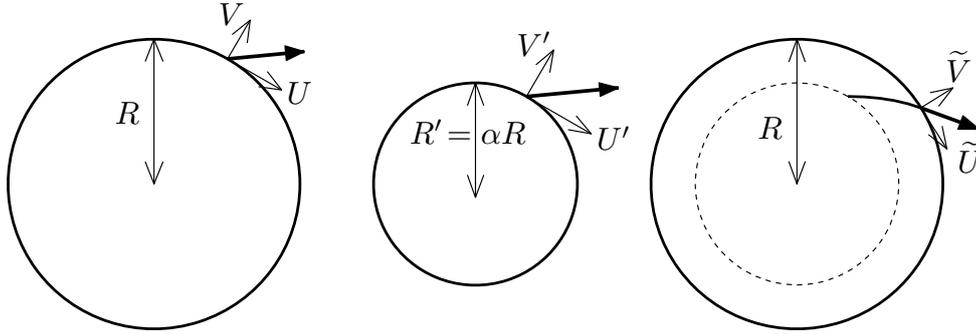


図 2.

問 6 スケール変換された系の時間発展,  $(R', (U', V'))$  から  $(R, (\tilde{U}, \tilde{V}))$ , における面積速度一定の法則を表す式を書き下せ。また  $\alpha = e^{-\tau}$  として, スケール変換のパラメーター  $\alpha$  を  $\tau > 0$  で表したとき, 面積速度一定の法則から  $\tilde{U}(\tau)$  が次の微分を含む関係式(微分方程式)を満足することを示せ。

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{U}(\tau) = -\frac{\tilde{U}(\tau)}{2} \quad (2)$$

問 7 同様にエネルギー保存則を表す式を書き下し,  $\tilde{V}(\tau)$  に関する次の微分方程式が得られることを示せ。

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{V}(\tau) = \frac{\tilde{V}(\tau)}{2} - \frac{K}{R\tilde{V}(\tau)} + \frac{\tilde{U}(\tau)^2}{\tilde{V}(\tau)} \quad (3)$$

スケール変換された粒子の距離  $R$  における速度  $(\tilde{U}(\tau), \tilde{V}(\tau))$  は, スケール変換される前の粒子が距離  $R$  から  $e^\tau R$  に達するまでの軌道を, スケール変換によって距離  $R$  までの軌道に「くりこんだ」結果得られる速度とみなすことができる。方程式 (2) と (3) は, 粒子が遠方に到達するに従って次々とスケール変換して, いつも原点からの距離が  $R$  になるように軌道をくりこんでいったときに, 距離  $R$  におけるスケール変換された粒子の速度がどのように変化していくかを表しており, くりこみ群方程式と呼ばれる。

問 6, 問 7 が解けなくても, 以下の問は式 (2), (3) を出発点に進められる。式を簡素にするために,  $\tilde{U}(\tau), \tilde{V}(\tau)$  を速さの次元をもつ  $\sqrt{\frac{2K}{R}}$  を単位とする無次元量にして  $u(\tau), v(\tau)$  と表記する。すなわち,

$$u(\tau) = \frac{\tilde{U}(\tau)}{\sqrt{\frac{2K}{R}}}, \quad v(\tau) = \frac{\tilde{V}(\tau)}{\sqrt{\frac{2K}{R}}} \quad (4)$$

問 8 無次元量の変数を用いると、式 (2), (3) は次のように書き換えられることを示せ。

$$\frac{d}{d\tau}u(\tau) = -\frac{u}{2} \quad (5)$$

$$\frac{d}{d\tau}v(\tau) = \frac{v}{2} + \frac{1}{v}\left(u^2 - \frac{1}{2}\right) \quad (6)$$

無次元化した方程式を扱くと、式が簡単になり見通しがよくなるが、結果を解析する際には、次元を戻した元々の変数の意味を考える必要があることに注意する。

式 (5), (6) のセットのくりこみ群方程式を、 $\tau$  を時間的な変数と見て、 $u(\tau), v(\tau)$  が時間が進むと変化していくと解釈する。

問 9 このとき、“時間”  $\tau$  が進んでも変化しない点を固定点と呼び、 $(u^*, v^*)$  と書く。 $u^* = 0$  は即座にわかる。 $v^* (> 0)$  を求めよ。

固定点の非常に近くでのくりこみ群方程式による動きを分析するために、固定点を基準にして、 $u(\tau) - u^*, v(\tau) - v^*$  を新しい変数にする。ただし、 $u(\tau)$  については、固定点  $u^* = 0$  なので、 $u$  をそのまま使う。つまり、

$$u(\tau), \quad w(\tau) \equiv v(\tau) - v^*$$

の 2 変数で記述する。固定点近くでのこの 2 変数  $u(\tau), w(\tau)$  の従う微分方程式を求める。この場合、 $u(\tau), w(\tau)$  は小さい量であり、 $u(\tau) \ll 1, w(\tau) \ll 1$ 、その 2 次量は 1 次量に比べて無視してよい。この 1 次量だけで書かれた微分方程式を線形化されたくりこみ群方程式という。

問 10  $w$  が小さいときの  $w(\tau)$  の線形化されたくりこみ群方程式を求めよ。なお、 $u(\tau)$  の固定点  $u^* = 0$  からのずれの微分方程式は、式 (5) に与えてあるように線形である。

式 (5),(6) のくりこみ群方程式の  $u - v$  平面上の時間発展を調べてみる。 $\tau$  が増加すると、 $u(\tau)$  は式 (5) より、 $u(\tau) \propto e^{-\tau/2}$  で減少していく。固定点に吸い込まれる流れを逆にたどると  $u$  軸にぶつかり、この点を  $(u_c, 0)$  とする。 $u$  軸上で  $(u_c, 0)$  より右の点から出発した流れは、固定点に吸い込まれる流れの上へずれ、固定点の右上から  $v$  軸に沿って上がっていく。一方、 $(u_c, 0)$  より左の点から出発した流れは、固定点の右下から  $v$  軸に沿って下がっていき、再び  $u$  軸にぶつかる。[I] の問題設定と対応させると、初速度  $(u_0, 0)$  で物体を投げる問題に対応し ( $u_0 = u(0)$  は  $U_0$  を無次元化した量)、くりこみ群の流れを定性的に変化させる  $u_0$  の値  $u_c$  は第 2 宇宙速度  $u_{02}$  に他ならない。

以下、 $u(0) (< u_c)$  を  $u_c$  に近づけていく場合を考える。解曲線が下向きに曲がって、 $v$  が 0 になる ( $u$  軸をよぎる)「時点」を  $\tau_{\max}$  とすると、スケール変換の性質から、最高地点の距離は

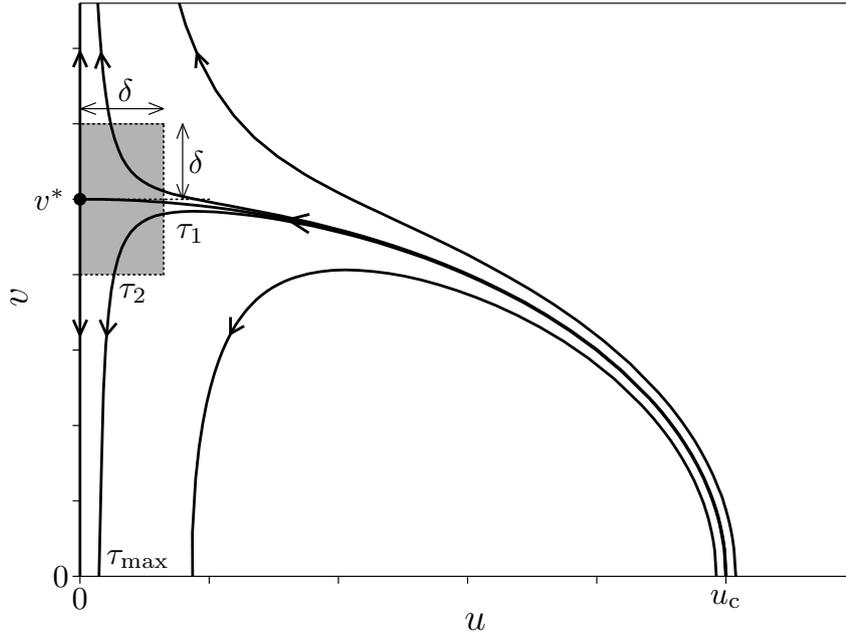


図 3.

$R_{\max} = e^{\tau_{\max}} R$  で与えられる。従って、 $u(0)$  が  $u_c$  に近づくと連れて、 $R_{\max}$  が無限大になっていくふるまいを見るには、 $\tau_{\max}$  が無限大になっていくふるまいを調べればよい。解曲線を 3つの領域に分けて解析しよう。出発点 ( $\tau = 0$ ) から固定点近傍に入る時点 ( $\tau_1$ ) まで、固定点近傍を動いている間 ( $\tau_1$  から  $\tau_2$  まで)、固定点近傍から外へ出る時点 ( $\tau_2$ ) から  $u$  軸をよぎる  $\tau_{\max}$  までの 3つの領域である。固定点近傍の領域とは、図 3 に灰色で示した  $0 < u < \delta$  かつ  $0 < |w| < \delta$  の領域である。 $\delta$  は十分に小さい量 ( $\delta \ll 1$ ) とすれば、この固定点近傍の領域では、線形化された  $u, w$  のくりこみ群方程式が使える。

出発点  $u(0)$  を  $u_c$  に近づけると、解曲線はその場所をほとんど変えない。 $\tau_1$  は一定の有限値に近づき、また、 $\tau_{\max} - \tau_2$  も一定の有限値に近づき、決して発散しない。無限大になるのは、固定点近傍を動いている間の時間  $\tau_2 - \tau_1$  であり、 $\tau_2$  が無限大になるふるまいを調べればよいことになる。固定点近傍に入る時点  $\tau_1$  は、 $u(\tau_1) = u_0 e^{-\tau_1/2} = \delta$  で決まる。このときの  $w(\tau_1)$  の大きさはもちろん小さい量であって、 $u(0)$  の関数として決まっている。固定点近傍を出る時点  $\tau_2$  は

$$w(\tau_2) = -\delta \tag{7}$$

で決まる。

問 11 問 10 で求めた  $w$  の線形化されたくりこみ群方程式を解いて、式 (7) と比較することにより、

$$e^{\tau_2} = -\frac{e^{\tau_1} \delta}{w(\tau_1)}$$

となることを示せ。

$w(\tau_1)$  は  $u(0)$  の関数であって、 $u(0) = u_c$  のときには 0 になっているはずであるから、テイラー級数展開すれば、

$$w(\tau_1) = C(u(0) - u_c) + O((u(0) - u_c)^2)$$

と書ける。 $C$  は定数である。また、 $O(x^2)$  は  $x$  が 0 に近づくとき、 $x^2$  以下の大きさであることを意味する。

**問 12**  $w(\tau_1)$  のテイラー級数展開の表式を  $e^{\tau_2}$  の式に代入して、 $R_{\max}$  の発散するふるまいが

$$R_{\max} \propto (u_c - u(0))^{-\theta}$$

と表されることを示し、 $\theta$  を求めよ。ただし“ $\propto$ ”は比例関係を表す。

**問 13** これまでの議論を見ると、発散の指数は線形化された  $w$  のくりこみ群方程式における線形項の係数から求まったことがわかる。もし、線形化された  $w$  のくりこみ群方程式の係数が  $k$  であるなら、すなわち、

$$\frac{d}{d\tau} w = kw$$

であるなら、指数はどうか。

なお、指数を求める議論の際には、 $u_{02}$  が問 2 で求めた値であるかは使っていない。実は、式 (5), (6) の微分方程式は厳密に解けて、 $u_c$  が力学の問題として問 2 で解いた  $u_{02}$  となることを示すことができる。くりこみ群方程式の固定点近傍での線形係数 (いわばミクロの性質) が、系の非常に大きなふるまいの指数 (いわばマクロの性質) を直接決めているのである。これは他の手法にはないくりこみ群の手法としての独自性と強力を表している。

---

一般に、くりこみ群の手順は

1. くりこみ群変換を定義する。
2. 固定点を求める。
3. 固定点近傍での近似によって線形化されたくりこみ群変換を求める。
4. その線形係数より、物理量の発散の指数を求める。

から成る。前述したように、相転移の臨界現象の研究等で、臨界指数の計算など、成功を収めてきた。

## 第 2 問 (75 点)

### 電磁波の伝搬と圧力

#### A ファラデー (電磁誘導) の法則とアンペールの法則

##### A.1 ファラデー (電磁誘導) の法則

閉回路を貫く磁束を  $\Phi$  [Wb] とすると、閉回路に生じる電磁誘導起電力  $V$  [V] は磁束  $\Phi$  の時間微分により

$$V = -\frac{d}{dt}\Phi \quad (1)$$

と表される。ここで、磁束の向きと閉回路の向きは右ねじの関係にある。負号は、起電力が磁束の変化を妨げるように電流を流す向きであることを表す。

一方、起電力  $V$  は、電場  $\vec{E}$  [V/m] の回路の向きに沿った成分の線積分 ([注] 参照) として

$$V = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

で与えられる。したがって、ファラデー (電磁誘導) の法則は次の形に表される。

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\Phi \quad (2)$$

[注] 点 P1 から点 P2 に向かう曲線  $l$  を  $\{\vec{s}_i\}_{i=1,\dots,N}$  に分割し、各点の電場  $\vec{E}_i$  と  $\vec{s}_i$  の内積の和  $\sum_{i=1}^N \vec{E}_i \cdot \vec{s}_i$  をとる。  $\sum_{i=1}^N \vec{s}_i$  は P1 から P2 に向かうベクトルである。分割を無限に細かくしたときのこの内積の和の極限を下の右辺のように書き、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \vec{E}_i \cdot \vec{s}_i = \int_{P1}^{P2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

「電場  $\vec{E}$  の曲線  $l$  の接線方向成分の、P1 から P2 までの線積分」と呼ぶ。記号  $\oint$  は閉曲線を 1 周していることを表す。

起電力により電流を流すには回路の実体が必要であるが、実体の存在とは無関係に、空間に考えた回路上には式 (2) を満たす電場が生じている。以下では、「回路」はこのような意味である。

##### A.2 アンペールの法則

大きさ  $I$  [A] の定常な直線電流がつくる磁場  $\vec{H}$  [A/m] による磁力線は、電流に垂直な平面内で電流を中心とする同心円状で、向きは電流の向きと右ねじの関係にある。電流から距離  $r$  [m] の点の磁場の大きさは

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad (3)$$

である。電流に垂直な平面内で、電流を中心とする半径  $r$  の円周に沿って、円周方向の磁場の成分を 1 周線積分すると

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \frac{I}{2\pi r} \times 2\pi r = I \quad (4)$$

が得られる。ここで、円周の向きは電流の向きと右ねじの関係にあるとする。また、記号  $\oint$  の意味はファラデーの法則の場合と同じである。

式 (4) は電流を中心とし、電流の向きと右ねじの関係にある向きの円周について得られた。実は、電流を 1 周し、電流の方向と右ねじの関係にある任意の閉回路で円周を置き換えても式 (4) はそのまま成り立つ。このことを示そう。

問 1 電流に垂直な平面上に図 1 のような閉回路を考える。閉回路の微小部分  $\vec{s}_i$  に着目し、そこでの磁場が  $\vec{H}_i$  で、電流と平面の交点から見て  $\vec{s}_i$  が電流の方向と右ねじの向きに角  $\Delta\theta_i$  をなすとする、 $\vec{H}_i \cdot \vec{s}_i = \frac{I}{2\pi} \Delta\theta_i$  であることを示せ。

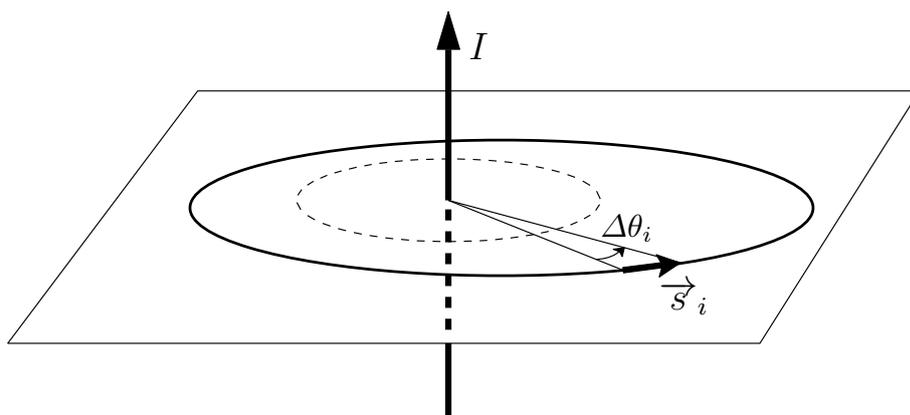


図 1. 電流に垂直な平面上の閉回路

問 1 から、1 周すると積分が  $I$  になることがわかる。

$$\oint_{\text{右ねじの関係にある閉回路}} \vec{H} \cdot d\vec{s} = I \quad (5)$$

また、閉回路は一つの平面上でなくてもよいことも示せる。さらに、閉回路を貫く電流が多数ある場合には、右辺はそれらの和になる。式 (5) をアンペールの法則と呼ぶ。

以下では  $x, y, z$  を直交直線座標 (右手系) とする。

問2 図2のように、 $xy$ 面(面 $z=0$ )に $x$ 方向の一様な電流が流れている(電流は面 $z=0$ に集中している)。 $y$ 方向には電流は無限に広がっていて、電流の大きさは $y$ 方向の単位長あたり $I_0$  [A/m]である。 $z>0$ および $z<0$ における磁場 $\vec{H}$ の $x, y, z$ 成分が $\vec{H}(z>0) = \left(0, -\frac{1}{2}I_0, 0\right)$ ,  $\vec{H}(z<0) = \left(0, \frac{1}{2}I_0, 0\right)$ であることを示せ。  
ヒント: 電流を微小な直線電流に分割して考えてみよ。

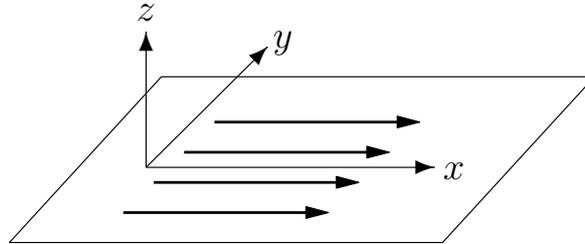


図2. 面 $z=0$ を $x$ 方向に流れる一様な電流

### B 真空中の電磁波と変位電流

真空中に、電場 $\vec{E}$ が $x$ 成分 $E_x$ のみ、磁場 $\vec{H}$ が $y$ 成分 $H_y$ のみをもち、 $z$ 方向に伝わる、次の式(6), (7)のような電磁波が存在するとする( $t$ は時間)。 $xy$ 面内では電磁場は一様である。

$$E_x = E_0 \sin(kz - \omega t) \quad (6)$$

$$H_y = H_0 \sin(kz - \omega t) \quad (7)$$

ここで、 $\omega, k > 0$ で、 $\omega$ は角振動数、波長は $2\pi/k$ である( $k$ を波数と呼ぶ)。

問3 磁気定数(真空の透磁率)を $\mu_0$ とすると、磁束密度 $\vec{B}$ は $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ である。 $xz$ 面内に図3のような、長辺が $\pm x$ 方向に平行な細長い長方形の閉回路を考えてファラデーの法則(2)を用い、 $H_0$ と $E_0$ の比が $f_0 = \frac{H_0}{E_0} = \frac{k}{\mu_0 \omega}$ であることを示せ。

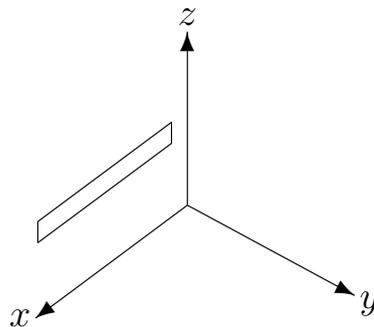


図3.  $xz$ 面内の細長い長方形の閉回路

ところで、仮に、式(7)の磁場が電流によってつくられているとすると、どのような電流であろうか。

問 4  $yz$  面内に図 4 のような長辺が  $\pm y$  方向に平行な細長い長方形の閉回路を考える。アンペールの法則 (5) によれば,  $x$  方向の電流密度 ( $yz$  面を単位時間・単位面積あたりに  $x$  方向に通過する電気量) として

$$-\frac{k^2}{\mu_0\omega} E_0 \cos(kz - \omega t) \quad (8)$$

が存在すればよいことを示せ。

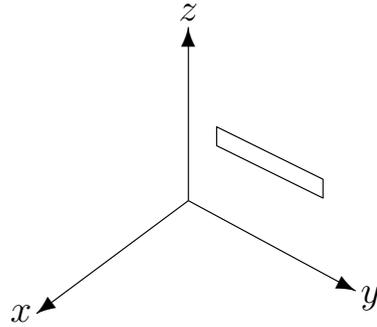


図 4.  $yz$  面内の細長い長方形の閉回路

真空中を式 (6), (7) の電磁波が伝わる時, 実際に電流が流れるわけではないから, 定常な電流と磁場の関係であるアンペールの法則 (5) は時間変化がある場合には修正の必要がある。マクスウェルは電束密度の時間変化も電流のはたらきをすることを発見し, 右辺にこれを含めると時間変化がある場合にも式 (5) が成り立つことを示した (アンペール・マクスウェルの法則)。各点における電束密度  $\epsilon_0 \vec{E}$  の時間微分を電束電流密度と呼ぶ。ここで,  $\epsilon_0$  は電気定数 (真空の誘電率) である。

式 (6), (7) のような波動では, 面  $z = \frac{\omega}{k}t + (\text{定数})$  の上で位相が等しく, 位相が等しい面 (等位相面) が  $z$  方向に速度  $\frac{\omega}{k}$  で進む。一般に等位相面が進む速度  $\frac{\omega}{k}$  を位相速度と呼ぶ。

真空中の電磁波の位相速度は光速  $c$  である。したがって  $\omega = ck$  の関係がある。このことと  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$  を用いると, 式 (8) が  $x$  方向の電束電流密度

$$\frac{d}{dt} \epsilon_0 E_0 \sin(kz - \omega t) = -\omega \epsilon_0 E_0 \cos(kz - \omega t) \quad (9)$$

になっていることがわかる。

式 (6), (7) は  $x$  方向の電場と  $y$  方向の磁場をもち,  $z$  方向に伝わる電磁波であるが,  $y$  方向の電場と  $x$  方向の磁場をもつ, 次の電磁波 ( $\phi_0$  は定数)

$$E'_y = E'_0 \sin(kz - \omega t + \phi_0), \quad (10)$$

$$H'_x = -f_0 E'_0 \sin(kz - \omega t + \phi_0) \quad (11)$$

も同じ位相速度で  $z$  方向に伝わる。

問 5  $E_0 = E'_0 (\neq 0)$  のとき、電磁波 (6), (7) と電磁波 (10), (11) を重ね合わせて、 $z$  軸に垂直な面内で、電場を表すベクトルが円を描くような電磁波 (円偏波の電磁波) としたい。 $\phi_0$  ( $0 \leq \phi_0 < 2\pi$ ) の値を求めよ。

### C 物質中の電磁波

空間に正負の荷電粒子から成る電氣的に中性で一様な気体がある。正電荷は正イオン、負電荷は電子で、電子の数密度 (単位体積あたりの粒子数) は  $n$ , 1 個の電荷は  $-e$ , 質量は  $m$  である。この場合に、**B** で考えた電磁波はどのような影響を受けるであろうか。ただし、正負の荷電粒子の熱運動や再結合は無視でき、正イオンの質量は電子に比べて十分大きいのでその運動も無視できるとする。また、電磁波の振幅は十分小さいとする。

真空中で式 (6), (7) で表される電磁波がどう変わるかを考えると、今の場合には、電束電流密度 (9) に、電場 (6) により電子が運動して生じる電流密度が加わることになる。そのため、 $\omega$  と  $k$  の関係は  $\omega = ck$  とは違ってくる (しかし、各点の電束密度の時間微分が電束電流密度であることに変わりはない)。

問 6 (a) 式 (6) の電場があるとき、電子による  $x$  方向の電流密度  $j_x(z, t)$  を求めよ。ただし、 $j_x(z, t)$  の時間平均は 0 とする。

(b) 今の場合、式 (5) の右辺には電束電流密度  $\frac{d}{dt}\epsilon_0 E_x = -\omega\epsilon_0 E_0 \cos(kz - \omega t)$  と  $j_x(z, t)$  の和が寄与する。ファラデーの法則には変更がないことに注意して、 $\omega$  と  $k$  の関係が次のようになることを示せ。

$$\omega^2 = c^2 k^2 + \frac{ne^2}{\epsilon_0 m} \quad (12)$$

式 (12) によれば、電磁波として伝わるためには角振動数が  $\omega \geq \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m}}$  の必要がある。例えば、真空から荷電粒子のある領域に角振動数  $\omega < \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m}}$  の電磁波が入射すると、その領域の境界 (表面) で反射され、領域の中には伝わらない。

問 7 次の場合に角振動数  $\sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m}}$  の値とその角振動数をもつ真空中の電磁波の波長を 1 桁の精度で求めよ。

(a) 数密度  $n = 9 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$  の自由電子をもつ銅の場合

(b) 数密度  $n = 1 \times 10^{12} \text{ m}^{-3}$  の電子をもつ電離層の場合

ただし、近似値として、次の数値を用いてよい。真空中の光速  $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$ , 電子の電荷の大きさ  $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ , 電子の質量  $m = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ , 電気定数 (真空の誘電率)  $\epsilon_0 = 8.9 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ 。

問 8  $z > 0$  の領域は  $x$  方向の多数の細い導線でしめられていて、平均として数密度  $n$  の電子が存在するが、電子の運動は  $x$  方向だけに限られているとする。 $\omega < \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m}}$  で、問 5 のような円偏波の電磁波が  $z < 0$  の真空領域から進んでくると、 $z > 0$  の領域ではどのような電磁波になるか。

#### D 電磁波の反射と電磁波が及ぼす力

可視光が金属の表面で反射することは、日常の経験として知っているであろう。いま、 $z > 0$  の領域が金属で、式 (6), (7) で与えられる電磁波 (光) が  $z < 0$  の領域 (真空) から  $z$  軸の正方向に進行して、金属表面  $z = 0$  で反射されるとする。

金属は導体であるから、電場の金属表面に沿う成分 ( $x, y$  成分) は 0 のはずである。電磁波はこの条件を満たす必要がある。この条件を満たすには、真空中には次の電磁波が  $-z$  方向に伝わることに着目する。

$$\begin{aligned} (\text{電場の } x \text{ 成分}) &= E'_0 \sin(-kz - \omega t) \\ (\text{磁場の } y \text{ 成分}) &= -f_0 E'_0 \sin(-kz - \omega t) \end{aligned}$$

$z < 0$  の真空領域には式 (6), (7) の電磁波に加えて、 $E'_0 = -E_0$  である次の反射波が存在するとすれば、 $z = 0$  での条件を満たすことができる。

$$\begin{aligned} (\text{反射波の電場の } x \text{ 成分}) &= -E_0 \sin(-kz - \omega t) \\ (\text{反射波の磁場の } y \text{ 成分}) &= f_0 E_0 \sin(-kz - \omega t) \end{aligned}$$

問 9 いまの場合、金属中では電磁場はゼロだから、金属表面では  $y$  方向の磁場は次のように不連続である。

$$H_y(z < 0) = 2f_0 E_0 \sin(-\omega t) \quad (13)$$

$$H_y(z > 0) = 0 \quad (14)$$

したがって、金属表面 ( $z = 0$ ) には  $x$  方向に電流が流れている。式 (5) のアンペールの法則を用いて、 $y$  方向の単位長あたりに流れる電流  $I_S$  [A/m] を求めよ。

金属表面の電流  $I_S$  は電磁波の磁場から力を受けるから、金属表面には電磁波から力がはたらく。ただし、問 2 のように  $I_S$  自身も磁場をつくっているので、 $I_S$  が受ける力を求めるとき、 $I_S$  にはたらく磁場は式 (13), (14) の磁場から  $I_S$  自身がつくっている磁場を除いたものとする必要がある。

問 10 金属表面の単位面積あたりにはたらく力の向きと、大きさの時間平均を求めよ。

金属表面に問 10 で求めたような力がはたらくのは電磁波が運動量をもっているからである、と考えることができる。このことはいろいろな実験や観測で確かめられている。

### 第 3 問 (75 点)

#### もう一つのアインシュタインの関係式 — ブラウン運動からアボガドロ定数を見積もる —

「アインシュタインの関係式」というと「質量エネルギー等価則  $E = mc^2$ 」を思い浮かべる人が多いだろう。しかし、統計物理学の分野には「アインシュタインの関係式」と呼ばれているもう一つ別の関係式がある。それは、ブラウン運動するコロイド粒子の拡散係数  $D$  と易動度  $\mu$  の関係を与える式

$$D = \frac{R}{N_A} T \mu \quad (1)$$

である。ここで、 $R$  は気体定数、 $N_A$  はアボガドロ定数、 $T$  は絶対温度を表す。

拡散係数  $D$  は小さな粒子がブラウン運動によってどのように広がってゆくかを表す量で、粒子の軌跡を観察することによって測定できる。易動度  $\mu$  は液体中の粒子が弱い力を加えられたときに動く速さを与える係数で、流体力学を用いて計算できる。

この拡散係数と易動度を結びつける関係式 (1) は揺動散逸定理とも呼ばれ、統計物理学における最も基礎的な関係式の一つだ。アインシュタインは、コロイド粒子のブラウン運動がまわりの水分子との衝突によって引き起こされているという考えに基づき、この関係式を導いた。これを使うと、ブラウン運動するコロイド粒子を観察することによりアボガドロ定数を見積もることができる。それが当時知られていた値とほぼ一致していたことから、ブラウン運動が分子や原子が実際に存在することの目に見える証拠と考えられるようになった。

このもう一つのアインシュタインの関係式を、以下で導出しよう。

1次元上のランダムウォーク： ブラウン運動の最も簡単な数理モデルは、ランダムウォークと呼ばれている。コロイド粒子が、直線上を  $\Delta x$  のステップ幅で時間  $\Delta t$  毎に左右に同じ確率  $\frac{1}{2}$  で動くとする (図 1)。時刻  $t = 0$  で  $x = 0$  から出発したとすると、時刻  $t = s\Delta t$

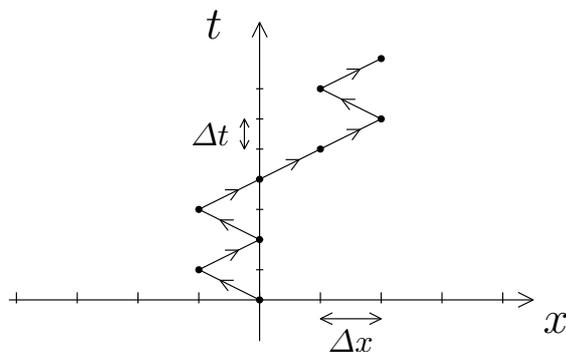


図 1. 一次元上のランダムウォーク

( $s = 0, 1, 2, \dots$ ) での位置  $x(t)$  は

$$x(t) = \sum_{i=1}^s \Delta x_i$$

で与えられる。ここで、 $\Delta x_i$  は時刻  $t = (i-1)\Delta t$  から  $t = i\Delta t$  の間のコロイド粒子のステップで、確率  $\frac{1}{2}$  で  $+\Delta x$  か  $-\Delta x$  のどちらかの値をとる変数 (確率変数) である。異なる時刻の  $\Delta x_i$  と  $\Delta x_j$  ( $i \neq j$ ) は無相関、すなわち統計的に独立とする。

ある量  $A$  の統計平均 (期待値) を  $\langle A \rangle$  と表すことにする。すると、コロイド粒子のステップの統計平均について、

$$\langle \Delta x_i \rangle = 0, \quad \langle \Delta x_i \Delta x_j \rangle = (\Delta x)^2 \delta_{i,j} \quad (2)$$

が成り立つ。ここで、 $\delta_{i,j}$  はクロネッカーのデルタ記号と呼ばれ、2つの整数  $i$  と  $j$  に対して、値が

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

で与えられる関数を表す。式 (2) より、時刻  $t = s\Delta t$  でのコロイド粒子の位置  $x(t)$  の統計平均  $\langle x(t) \rangle$  は

$$\langle x(t) \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^s \Delta x_i \right\rangle = \sum_{i=1}^s \langle \Delta x_i \rangle = 0$$

のように計算され、ゼロである。同様に  $x(t)^2$  の統計平均  $\langle x(t)^2 \rangle$  は

$$\langle x(t)^2 \rangle = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} t \quad (3)$$

となり、時間  $t$  に比例することがわかる。

**問 1** 式 (2) を用いて、式 (3) を示せ。

**拡散現象：** 拡散現象とは、多数の粒子がランダムな運動をしながら系全体に広がってゆく現象をいう。水中に分散した  $1\mu\text{m}$  程度の小さなコロイド粒子がブラウン運動によって拡散してゆく現象が、その典型例だ。一つ一つの粒子が一次元の離散点上をランダムウォークするとき、粒子の数密度すなわち濃度が平均的にどのように変化してゆくかを考えてみよう。

ある時刻  $t$  に、位置  $x = i\Delta x$  ( $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) に粒子が  $N_i(t)$  ( $\gg 1$ ) 個いたとする。その後、時間  $t$  から  $t + \Delta t$  の間に、 $\frac{N_i(t)}{2}$  個が右隣の  $x = (i+1)\Delta x$  に、残りの  $\frac{N_i(t)}{2}$  個が左隣の  $x = (i-1)\Delta x$  に移動するとする。このような移動が、すべての位置の粒子に対して、時間  $\Delta t$  毎に起こるとすると、それぞれの位置の粒子の数  $N_i(t)$  は、どのように時間変化するだろうか。

時刻  $t$  から  $t + \Delta t$  の間に、 $x = i\Delta x$  から  $x = (i + 1)\Delta x$  に移動した正味の粒子の数を  $J_i(t)$  とすると

$$J_i(t) = \frac{1}{2}N_i(t) - \frac{1}{2}N_{i+1}(t) \quad (4)$$

と表される。また、時刻  $t$  から  $t + \Delta t$  の間の  $x = i\Delta x$  の粒子数の変化は  $J_i(t)$  を用いて

$$N_i(t + \Delta t) - N_i(t) = J_{i-1}(t) - J_i(t) \quad (5)$$

と表される。

これらの式で  $\Delta x$  および  $\Delta t$  が小さな極限を考え、一次元上の粒子の濃度  $n(x, t)$  および流束  $j(x, t)$  を用いて表してみよう。濃度  $n(x, t)$  は位置  $x$ 、時刻  $t$  における単位長さあたりの粒子数である。流束  $j(x, t)$  は、 $+x$  方向を正として単位時間あたりに位置  $x$  を正の方向に通過する正味の粒子数、すなわち、 $+x$  方向に通過する粒子数から  $-x$  方向に通過する粒子数を引いたものである。 $\Delta x$  および  $\Delta t$  が十分小さい場合、

$$n(x, t) = \frac{N_i(t)}{\Delta x}, \quad j(x, t) = \frac{J_i(t)}{\Delta t} \quad (6)$$

と表される。ただし、 $x = i\Delta x$  である。上の式 (4) および (5) より

$$j(x, t) = -D \frac{\partial n(x, t)}{\partial x} \quad (7)$$

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial j(x, t)}{\partial x} \quad (8)$$

を得る<sup>注)</sup>。第 1 式に現れる係数  $D$  は拡散係数と呼ばれる量で、今のランダムウォークのモデルでは、

$$D = \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \quad (9)$$

と与えられる。

注)  $n(x, t)$  や  $j(x, t)$  のように、複数の変数を引数にもつ関数の場合、他の変数を定数とみなして、ある一つの変数について微分した微係数を偏微分とよび、 $d$  の代わりに記号  $\partial$  を用いる。例えば、濃度  $n(x, t)$  は  $x$  と  $t$  の 2 変数関数であるが、

- 変数  $t$  を定数とみなし変数  $x$  について微分した偏微分は  $\frac{\partial n(x, t)}{\partial x}$
- 変数  $x$  を定数とみなし変数  $t$  について微分した偏微分は  $\frac{\partial n(x, t)}{\partial t}$

と記す。記号  $\partial$  は筆記体の  $d$  を記号化したもので、rounded  $d$  (丸い  $d$ ) とも呼ばれる。

**問 2**  $\Delta t$  および  $\Delta x$  が十分小さなおとき、上の式 (7) および式 (8) を、式 (4) と式 (5) より導け。

式 (7) は拡散による流束が濃度勾配に比例していることを示している。また式 (8) は連続の式と呼ばれ、粒子数のように保存する物理量があれば、その濃度と流束に対して一般に

成り立つ関係式である。式 (8) に式 (7) を代入すると、 $n(x, t)$  の偏微分が満たす方程式、すなわち偏微分方程式

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n(x, t)}{\partial x^2} \quad (10)$$

が得られる。これは、拡散方程式と呼ばれる。

動く物体が液体から受ける抵抗力： ブラウン運動しているコロイド粒子のように、液体中を運動する物体は液体から抵抗力を受ける。その抵抗力がどう表されるかを考察しよう。

液体の流体としての性質はその密度  $\rho$  [kg/m<sup>3</sup>] と粘性係数  $\eta$  [Pa·s] で特徴づけられる。一方、物体を球とすると、その形状は半径  $a$  [m] のみで特徴づけられる。従って、液体中を一定の速度で運動する物体の受ける力は、 $\rho$ ,  $\eta$ ,  $a$  と物体の速さ  $v$  のみの関数として表されるはずである。

さて、動く物体がまわりの液体から受ける抵抗力には、物体が周りの液体を動かす力の反作用である慣性抵抗と、液体の粘性散逸に由来する粘性抵抗の2つの寄与がある。前者は主に液体の密度  $\rho$  に依存し、後者は主に粘性係数  $\eta$  に依存する。

これらのことに注意して、動く球形の物体が液体から受ける抵抗力の速さ依存性を、以下のような簡単な考察から求めてみよう。

**問 3** 物体の速さ  $v$  が遅いときには慣性抵抗は無視でき、物体が受ける抵抗力は液体の密度  $\rho$  によらない粘性抵抗で与えられる。このことから次元解析を用いて、物体が液体から受ける抵抗力  $F$  が  $\eta a v$  に比例することを示せ。

**問 4** 逆に物体の速さが大きいときには抵抗力  $F$  は主に慣性抵抗となり、 $\eta$  に依存する粘性抵抗は無視できる。次元解析を用いて、その場合には物体が液体から受ける抵抗力  $F$  が  $\rho^x a^y v^z$  に比例するとしたとき、指数  $x$ ,  $y$ ,  $z$  の値を求めよ。

ブラウン運動しているコロイド粒子の速さは遅く、流体から受ける抵抗力は粘性抵抗で与えられる。半径  $a$  の球状粒子の場合の粘性抵抗は、流体力学的な計算によって

$$F = 6\pi\eta a v \quad (11)$$

となる。これを  $v$  について解いて、

$$v = \mu F; \quad \mu = \frac{1}{6\pi\eta a}. \quad (12)$$

としたときの係数  $\mu$  が易動度である。式 (11) または (12) はストークスの法則と呼ばれている。

アインシュタインの関係式の導出： さて、拡散係数  $D$  は易動度  $\mu$  に比例しており、アインシュタインの関係式 (1) が成り立っている。これは、以下のような状況を考えることによって示すことができる (図 2)。

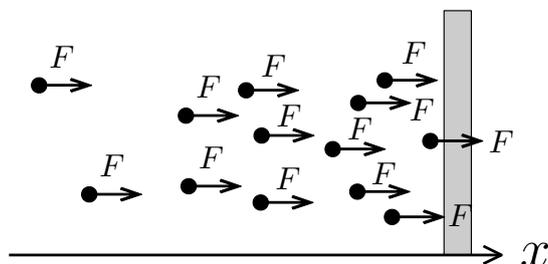


図 2.

いま、 $x$  軸を右向きにとり、一つ一つのブラウン粒子に  $x$  軸の正の方向 (右向き) に力  $F$  を加えたとする。右端に壁があってそれより右には行けないとすると、粒子は式 (12) に従い右方向に移動するので、系の右側の粒子濃度が高く左側の粒子濃度が低くなる。一方、粒子はブラウン運動をしているので、このような濃度の勾配ができると、ブラウン運動による拡散のために今度は逆に濃度の高い方から低い方へ流れが生じる。やがて両者は釣り合い、定常状態に達する。

単位体積あたりの粒子濃度  $n$  が  $x$  方向にのみ変化している場合を考えると、ブラウン運動による流束は式 (7) で与えられる。この場合、流束  $j$  は  $x$  軸に垂直な面を  $+x$  方向に単位断面積あたり単位時間に通過する粒子数を表す。

問 5 力  $F$  による粒子の流れの流束  $j_F$  を求めよ。

問 6 定常状態では力  $F$  による流束  $j_F$  と、ブラウン運動による流束  $j$  が釣り合っているととして、 $n$  と  $\frac{\partial n}{\partial x}$  が満たす関係式を導け。

さて、今考えた外力  $F$  による粒子の流れとブラウン運動による拡散の釣り合いを、別の視点から分析してみよう。

コロイド粒子のブラウン運動を周りの水分子の熱運動の現れと解釈し、コロイド粒子の集団を理想気体とみなす。この理想気体の温度  $T$  は水の温度と同じで、コロイド粒子の浸透圧が理想気体の状態方程式で与えられる。すると、外力による流れと拡散による流れの釣り合いは、外から加えられた力  $F$  と浸透圧の釣り合いと見ることができる。

問 7 中心軸が  $x$  軸に平行な円柱状の領域を考え、その断面積を  $S$  とする (図 3)。座標が  $x$  と  $x + \Delta x$  の間の微小領域にある粒子が受ける外力が、その領域の両端から受ける粒子

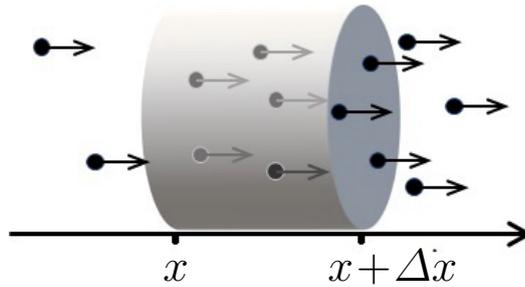


図 3.

の浸透圧と釣り合っているととして、 $n$  と  $\frac{\partial n}{\partial x}$  が満たす関係式を導け。

問 8 問 6 と問 7 で求めた 2 つの釣り合い条件は、同じ物理的状況に対して与えられたものである。これらは同じものであるべきということから、アインシュタインの関係式 (1) を導け。

■アボガドロ定数の見積もり：式 (3) の右辺を式 (7) の拡散係数  $D$  で表すと、

$$\langle x(t)^2 \rangle = 2Dt \quad (13)$$

となる。多数のコロイド粒子の運動の軌跡から、それぞれの粒子の  $x$  座標が一定時間にどれだけ変位したかを測定し、その 2 乗の平均を求めると、この式から拡散係数  $D$  を見積もることができる。易動度  $\mu$  が式 (12) で与えられるとすれば、アインシュタインの関係式 (1) よりアボガドロ定数を求めることができる。

問 9 アインシュタインは、逆に、アボガドロ定数として当時知られていた値  $N_A = 6 \times 10^{23} / \text{mol}$  を用いて、コロイド粒子の平均 2 乗変位を見積もった。式 (1) の関係が正しければ、直径  $1 \mu\text{m}$  のコロイド粒子の  $t = 1 \text{ s}$  における  $x$  座標の変位の 2 乗平均の平方根  $\sqrt{\langle x^2 \rangle}$  はいくらになるはずか、見積もれ。ただし、水の温度を  $17^\circ\text{C}$ 、水の粘性係数  $\eta = 0.1 \times 10^{-2} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ 、気体定数  $R = 8.3 \text{ J}/(\text{K}\cdot\text{mol})$  とせよ。

## 第 4 問 (75 点)

### ファブリ-ペロー干渉計

本問では、はじめに準備として平行薄膜に照射された光の干渉を考える。続いて、波長の近い光を識別 (分光) して観測するとき利用される、高い分解能 (2 つの接近した波長の光を分離して識別する能力) をもつファブリ-ペロー干渉計 (Fabry-Pérot interferometer, 以下、FPI と略記する) の原理について考察する。

光路長 (あるいは光学距離) は、実際の経路長と媒質の屈折率の積で与えられる。本問で用いられる光は可干渉距離が長く (長い光路差 (光路長の差) を与えて重ね合わせても干渉が観測され)、平行光線は十分遠方で (あるいは凸レンズで焦点面に集光されると) 干渉するものとする。また、装置はすべて空気中に置かれているとし、空気の屈折率は 1 とする。

#### 1. 薄膜の干渉

屈折率  $n (> 1)$ , 厚さ  $d$  の透明な平行薄膜を空気中に置き、図 1 のように、波長  $\lambda$  (空気中) の平面波を入射する。点 B での入射角を  $\theta$  (反射角も  $\theta$ )、屈折角を  $\phi$ 、点 D から直線 BF へ引いた垂線の足を E、点 B から CD に引いた垂線の足を H とする。

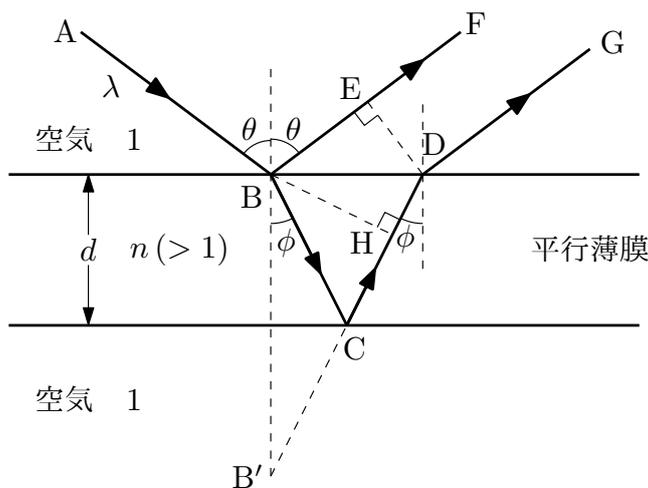


図 1.

問 1 BE 間の光路長と HD 間の光路長が等しいことを示せ。

問 2 図 1 を参考に、光線 ABE と ABCD の光路差 (光路長の差) が、

$$l = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} \tag{1}$$

で与えられることを示し、平行光線 BF と DG が十分遠方で互いに干渉して (同位相で) 強め合う条件を、 $d, n, \theta, \lambda$ , および、干渉の次数を表す整数  $m = 0, 1, 2, \dots$  を用いて求めよ。ここで、点 B と点 C での反射光線の位相変化の違いに注意せよ。点 B, 点 D での透過光線の位相は変化しない。

## 2. ファブリペロー干渉計

屈折率 1 の板状透明物質の両側に小さな透過率をもつ 2 枚の薄い平面鏡 M1, M2 を平行に向かい合わせて密着させた装置 E に平面波の光を入射させると、多重反射のために、特定の波長の光だけが透過する。また、図 2 のように、E の前に凸レンズ L1 を置き、広がりのある光源を用いると、E に入射する平行光線の入射角にある程度の広がりをもたせることができる。E を通過した平行光線は凸レンズ L2 により、L2 の焦点面 (焦点を含む光軸に垂直な面) に置かれたスクリーン S 上に、図 3 のような同心円状の明線が生じる。このような装置を、ファブリペロー干渉計 (FPI) という。ここで、E 内の透明物質の厚さは  $d$ 、レンズ L2 の焦点距離は  $f$  であり、スクリーンはレンズ L2 の焦点面に置かれている。また、点  $O_1, O_2$  はそれぞれレンズ L1, L2 の中心である。

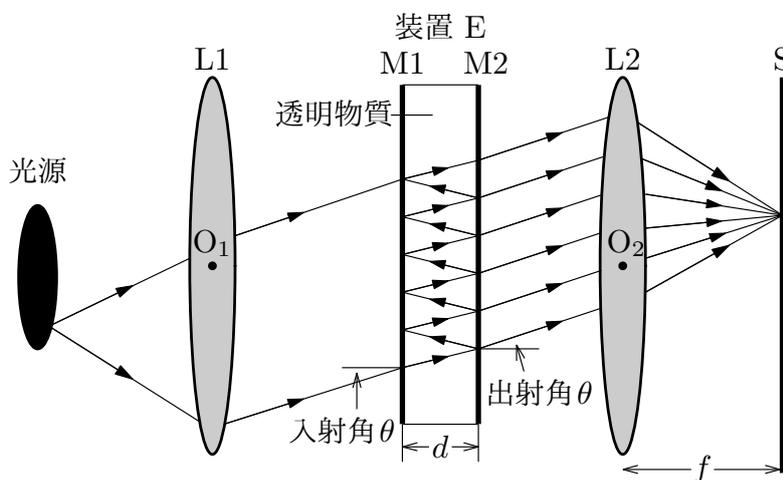


図 2. ファブリペロー干渉計 (FPI) の模式図

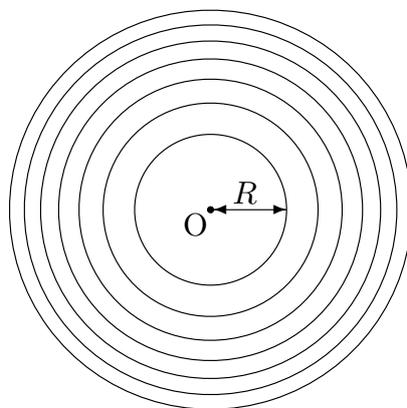


図 3. スクリーン S 上に生じる同心円の明線

問 3 光源から空気中での波長  $\lambda$  の光が発せられ、装置 E から角  $\theta$  ( $|\theta| \ll 1$ ) で出射する平行光線の中で、凸レンズ L2 の中心  $O_2$  を通る光は直進し、直進した光がスクリーン S に達する点は、出射角  $\theta$  の平行光線が強め合う点である。また、図 3 に示した同心円の中心 O を角  $\theta = 0$  の平行光線が強め合う点とする。スクリーン上に生じる同心円の明線の最小半径  $R$  を、最小半径の明線に対する出射角  $\theta$  とレンズ L2 の焦点距離  $f$  で表せ。ここで、近似式  $\tan \theta \doteq \theta$  を用いよ。

問 4 装置 E に角  $\theta$  で入射した光線がスクリーン上で強め合う条件を、正の整数 (干渉次数)  $m$  を用いて書き下せ。また、スクリーン上に生じる同心円において、外側の円の方が干渉次数  $m$  は大きいのか、小さいか、答えよ。ただし、装置 E を通過した後には、各平行光線間に位相の差は新たには生じないものとする。ここでは、平面鏡 M1, M2 での反射の際の位相変化は  $\pi$ 、透過の際の位相変化は 0 とする。

問 5 スクリーン上に生じる同心円の最小半径を  $R$  として、光源から発せられる光の波長  $\lambda$  を  $d, f, R$  を用いて表せ。また、 $d = 5.0 \text{ cm}$ ,  $f = 30 \text{ cm}$ ,  $R = 0.95 \text{ mm}$  のとき、波長  $\lambda$  を有効数字 2 桁の数値で求めよ。ここで、 $|\theta| \ll 1$  として近似式

$$\cos \theta \doteq 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

を用いよ。

### 波の式の複素数表現

波の変位を表す式 (波動の式) を複素数で表現すると便利ことが多い。その場合、実際の波の変位 (実数) は、複素数の実数部分で表される。その際、オイラーの式

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha \quad (\alpha: \text{実数}) \quad (2)$$

が用いられる。ここで、 $i = \sqrt{-1}$  である。

振幅  $A$ 、波数  $k$  ( $= \frac{2\pi}{\lambda}$ ,  $\lambda$ : 波長), 角振動数  $\omega$  ( $A, k, \omega$  は実数とする) で  $x$  軸方向に伝わる 1 次元の正弦波の式

$$y = A \cos(kx - \omega t + \varphi) \quad (\text{位相 } \varphi \text{ は実数とする})$$

を、複素数を用いて、

$$z = A e^{i(kx - \omega t + \varphi)} = A e^{i\varphi} e^{i(kx - \omega t)}$$

と表し、その実数部分を実際の波の式と考える。こうすると、元々実数であった振幅  $A$  を複素数の振幅  $A' = A e^{i\varphi}$  (これを複素振幅という) を考えることにより、位相  $\varphi$  を取り込むことができ便利である。

### 振幅透過率

図 4 のように、装置 E への入射光線を  $a_0$ 、光線  $a_0$  の透過光線を  $a_1, a_2, a_3, \dots$  とする。

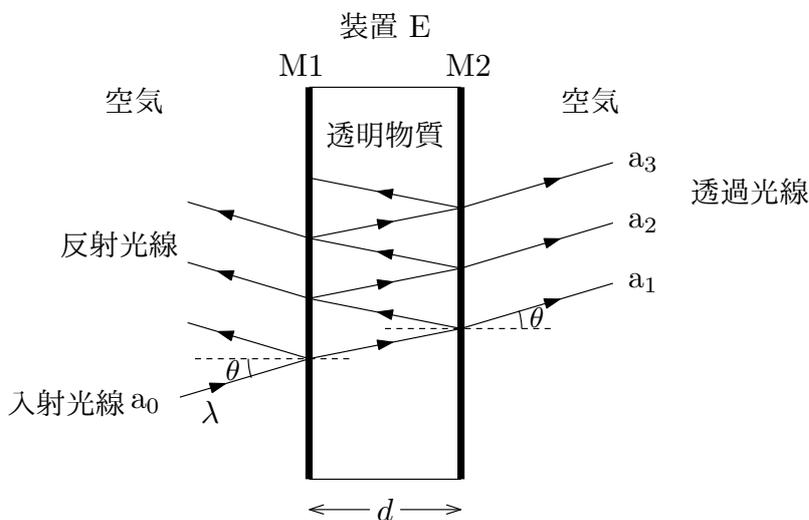


図 4.

この場合、透過光線  $a_1$  と  $a_2$  の間の位相差  $\delta$  は、問 2 で求めた光路差  $l$  を用いて、

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} l \quad (3)$$

と表される。

複素振幅を用いて、合成の透過率を求めよう。

いま、空気中から装置 E の平面鏡 M1 あるいは M2 に入射する光の

$$\text{振幅反射率} = \frac{\text{反射光の複素振幅}}{\text{入射光の複素振幅}} \text{ を } r, \text{ 振幅透過率} = \frac{\text{透過光の複素振幅}}{\text{入射光の複素振幅}} \text{ を } t,$$

透明物質から平面鏡 M1 あるいは M2 に入射する光の振幅反射率を  $r'$ 、振幅透過率を  $t'$  とする。一般に、 $r, r', t, t'$  は入射角  $\theta$  および入射光の波長  $\lambda$  に依存するが、本問では  $|\theta| \ll 1$ 、 $\left| \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \right| \ll 1$  ( $\Delta\lambda$ : 波長の差) の場合だけを考えるので、 $r, r', t, t'$  の  $\theta$  および  $\lambda$  依存性は無視して一定値とする。また、 $r, r', t, t'$  は実数とする。

**問 6**  $A_0$  は装置 E への入射光線  $a_0$  の複素振幅、 $A_1, A_2, \dots$  は透過光線  $a_1, a_2, \dots$  のそれぞれの複素振幅、装置 E から十分に遠く離れた点での透過光線の合成複素振幅を  $A_t = A_1 + A_2 + \dots$  とする (図 4 参照)。

(a) 透過光線  $a_1$  の複素振幅は  $A_1 = tt'e^{i\delta/2}A_0$  と書ける。ここで、 $e^{i\delta/2}$  は平面鏡 M1 への入射光線  $a_0$  が平面鏡 M2 に達するまでの位相変化の複素振幅への寄与を表している。平面鏡透過光線  $a_2$  の複素振幅  $A_2$ 、透過光線  $a_3$  の複素振幅  $A_3$  を、それぞれ  $A_0, \delta, t, t', r, r'$  の中で必要なものを用いて書き下せ。

(b) 入射光線  $a_0$  に対する合成透過光線の振幅透過率  $T_A = \frac{A_t}{A_0}$  が,

$$T_A = \frac{tt'}{1 - r'^2 e^{i\delta}} e^{i\delta/2} \quad (4)$$

と表されることを導け。

### 干渉計 (FPI) のエネルギー透過率

合成透過光線のエネルギー透過率  $T = |T_A|^2$  が, 空気中から平面鏡 M1 あるいは M2 へ入射する光線のエネルギー反射率と, 透明物質中の経路差による位相差  $\delta$  によりどのように表されるかを考えよう。光の吸収はないものとする。

図5のように, 空気中から平面鏡 M1 あるいは M2 に点 O で複素振幅  $A$  の光線が入射し, 空気中への反射光線の複素振幅が  $rA$ , 透明物質中への透過光線の複素振幅が  $tA$  となる現象を考える。この現象に, 時間反転対称性すなわち光線の逆行性を仮定する。そうすると, 点 O に, 空気中から複素振幅  $rA$  の光線が入射したとき空気中への反射光線の複素振幅は  $r(rA)$ , 透明物質中から複素振幅  $tA$  の光線が入射したとき空気中への透過光線の複素振幅は  $t'(tA)$  と書くことができ, これらの光線が同位相で重なって複素振幅  $A$  の光線が空気中に出て行くことになる。このとき透明物質中に進む光線は存在しない。

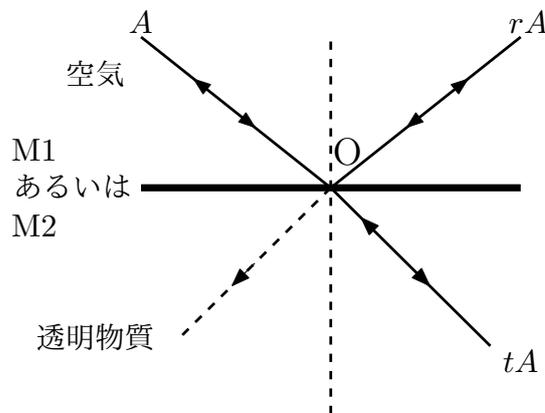


図5.

問7 上の説明から,  $r, r'$  の間の関係式, および,  $r, t, t'$  の間の関係式を導いたうえで, 空気中から平面鏡 M1 あるいは M2 に入射する光のエネルギー反射率を  $r_0 = r^2$  として, エネルギー透過率  $1 - r_0$  が

$$1 - r_0 = tt' \quad (5)$$

と表されることを導け。

問 8 前問 7 の式 (5) を用いて, 図 4 の装置 E の入射光線  $a_0$  の合成エネルギー透過率  $T = |T_A|^2$  が,

$$T = \frac{1}{1 + 4F^2 \sin^2 \frac{\delta}{2}}, \quad F = \frac{\sqrt{r_0}}{1 - r_0} \quad (6)$$

と表されることを示せ。ここで, 複素数  $z = a + ib$  ( $a, b$ : 実数) の複素共役を  $\bar{z} = a - ib$  とすると,

$$|z|^2 = z\bar{z} = a^2 + b^2$$

と書けることに注意せよ。

### 干渉計 (FPI) の分解能

装置 E のエネルギー透過率  $T$  は位相差  $\delta$  とともに変化し, 式 (6) で与えられる。その値は,  $r_0 = 0.2, 0.9$  に対して図 6 のようになる。この図からわかるように,  $r_0$  の値が大きくなって 1 に近づくと,  $\delta = 2m\pi$  でのピークは次第に鋭くなる。この鋭いピークは, FPI で波長  $\lambda$  と  $\lambda + \Delta\lambda$  ( $\left|\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right| \ll 1$ ) の光を区別 (分光) するのに用いることができる。

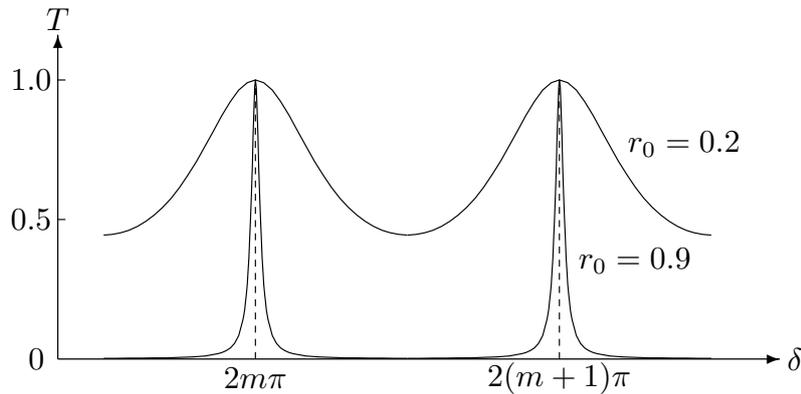


図 6.

まず,  $m$  を正の整数として, 波長  $\lambda$  の光のエネルギー透過率  $T$  がピークを与える場合を考える。このとき,

$$\delta = 2m\pi \quad (7)$$

が成り立つ。

波長  $\lambda + \Delta\lambda$  の光の透過率  $T$  の値が  $\frac{1}{2}$  となるときを, 波長  $\lambda$  と  $\lambda + \Delta\lambda$  の 2 つの光を区別することの限界 (分解限界の条件) と考える。分解能は, 分解限界のときの  $\lambda$  と  $\Delta\lambda$  の比  $\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$  で定義される。波長が  $\lambda$  のときの位相差を  $\delta$ , 波長が  $\lambda + \Delta\lambda$  のときの位相差を  $\delta - \Delta\delta$  とする。

問 9 式 (7) および  $\Delta\delta \ll 1$  を用いて式 (6) より, 干渉計 FPI の分解能  $\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$  が

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \doteq \frac{\sqrt{r_0}}{1 - r_0} \delta \quad (8)$$

と書けることを示せ。

問 10 波長  $\lambda = 5 \times 10^{-7}$  m の光を  $d = 5$  cm の FPI に照射するときの分解能を有効数字 1 桁で求めよ。ただし,  $r_0 = 0.9$  とし,  $|\theta| \ll 1$  より  $\cos \theta \doteq 1$  とせよ。

