

物理チャレンジ 2024

第 2 チャレンジ

理論問題

2024 年 8 月 21 日 (水)

理論問題にチャレンジ 8 : 30 ~ 13 : 30

理論問題にチャレンジする前に下記の<注意事項>をよく読んでください。

問題は、大問 4 題からなります。問題は、一見難問にみえても、よく読むとわかるようになっていきます。どの問題から取り組んでも結構です。最後まであきらめずにチャレンジしてください。

<注意事項>

1. 開始の合図があるまで問題冊子を開けないこと。また解答用紙にも手を触れないこと。
2. 解答中に通信機能などを用いて、他の人の助言を受けたり、解を検索するなどの行為は厳禁です。このような不正行為が発覚した場合、物理チャレンジ参加の資格と権利を失います。
3. 問題冊子は表紙、裏表紙と問題 29 ページです。解答用紙は 20 枚です。
4. 配布された電卓を使用することができます。
5. すべての解答は、解答用紙に記入すること。解答用紙の各ページに、必ずチャレンジ番号と氏名を記入すること。
6. 解答ははっきりと書き、消しゴムを使う場合には、きちんと消すこと。なお、解答用紙の裏面は使用しないこと。
7. 解答は、最終的な答えのみではなく、解答に至る道筋も詳しく記述すること。
8. 気分が悪くなったときやトイレに行きたくなったとき、または質問がある場合は旗をあげて監督者に知らせること。
9. 他の参加者の迷惑にならないように静粛に解答をすすめること。迷惑行為があった場合は退出させます。
10. 終了の合図があったら、ただちにすべての解答用紙（無解答の用紙も含む）は、チャレンジ番号・氏名の記入を確認の上、机上に置いて、監督者の指示を待つこと。
11. 問題冊子ならびに計算用紙は、持ち帰ること。

共通する数学的表現

以下の複数の問題で共通して用いる数学的表現をまとめておく。

1. 行列と列ベクトルの積

2行2列の行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と列ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の積は列ベクトルであり、次のように定義される。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

2. オイラーの公式

指数関数を複素数に拡張すると、指数関数と三角関数を関連付けることができる。 θ を実数としたとき、

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

の関係式をオイラーの公式とよぶ。

3. 1 次の近似式

$|h| \ll 1$ のとき、

$$(1+h)^\alpha \doteq 1 + \alpha h$$

の近似式が成り立つ。ここで、 α は任意の実数である。これは、一般の微分可能な関数 $f(x)$ について、 $|h| \ll 1$ のときに

$$f(a+h) \doteq f(a) + f'(a)h$$

のように近似できることから導かれる。

第 1 問 (75 点)

連成振り子とニュートリノ振動

振動現象は、バネや振り子のような力学的な振動だけでなく、電気回路の振動、生物現象に現れる振動など、多くの分野で登場する。振動のような物理学における基本概念は、共通する数学的構造を持っている。ここでは、二つの振り子を互いの振動を伝える媒体 (バネなど) によってつなぐことを考える。これを連成振り子と呼ぶ。このように二つ以上の振動が連動する場合、固有振動という考え方が重要になる。

素粒子の一つであるニュートリノが振動するニュートリノ振動は、梶田隆章が 2015 年のノーベル物理学賞を受賞したことから、耳にすることがあるであろう。この問題の後半では、連成振り子と同じ物理法則に従うことに基づき、ニュートリノ振動の直感的な理解を試みる。[I] の問題がすべて解けなくても、[II] は独立に取り組むことができる。

[I] 連成振り子

図 1 のように、長さが L_a と L_b の二つの振り子のおもり a, b がバネで結ばれている。おもりの質量はともに m とし、バネの質量は無視でき、バネの自然長は二つの振り子のおもりの平衡位置における間隔に等しく、バネ定数は k とする。振り子のおもりの運動は一つの鉛直面内に限られ、振り子の振れ角は小さいとすると、おもりとバネの運動は近似的に水平な一直線上 (x 軸) で行われると考えてよい。おもり a, b のそれぞれの平衡点からの変位を x_a, x_b とする。このときバネの自然長からの伸びは $x_b - x_a$ である。

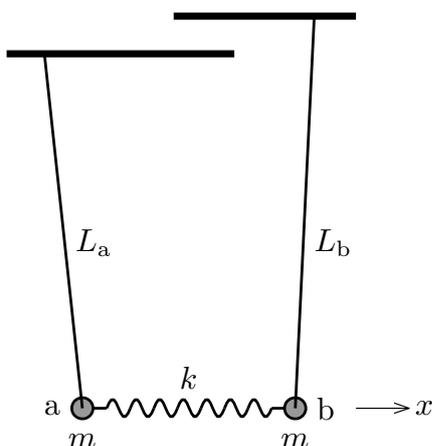


図 1. 連成振り子

問 1 おもり a, b の運動方程式は次の形に書き表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x_a}{dt^2} &= -m(Ax_a + Cx_b) \\ m \frac{d^2 x_b}{dt^2} &= -m(Cx_a + Bx_b) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

係数 A, B, C を m, k, L_a, L_b , および重力加速度の大きさ g を用いて表せ。

次に

$$\left. \begin{aligned} x_a &= \cos \theta x_1 + \sin \theta x_2 \\ x_b &= -\sin \theta x_1 + \cos \theta x_2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

のように変数変換をして、 θ を適当に選ぶと

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -\lambda_1 x_1 \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= -\lambda_2 x_2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

と表せることを示していく。式 (2) の逆変換は

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos \theta x_a - \sin \theta x_b \\ x_2 &= \sin \theta x_a + \cos \theta x_b \end{aligned}$$

である。

問 2 式 (3) を満足するための θ の条件が

$$(A - B) \tan \theta + C(1 - \tan^2 \theta) = 0 \quad (4)$$

となることを示せ。そのとき、 λ_1, λ_2 を A, B, C , および θ を用いて表せ。

問 3 ここで、 $L_a = L_b (= L)$ の場合を考える。 $\lambda_1 > \lambda_2$ を満足する λ_1 と λ_2 を A, B, C で表し、 $\theta = \frac{\pi}{4}$ となることを示せ。

問 4 (a) $L_a = L_b (= L)$ の場合に、 $x_a(t), x_b(t)$ を求めよ。ただし、 $x_a(0) = x_0, x_b(0) = 0, \frac{dx_a(0)}{dt} = 0, \frac{dx_b(0)}{dt} = 0$ とする。ここでは、 λ_1, λ_2 のまま使ってよい。

(b) $\frac{k/m}{g/L} = \frac{kL}{mg} = \frac{9}{32}$ として $x_a(t)$ のグラフを描け。 t の範囲は $t = \left[0, 8\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \right]$ とせよ。三角関数の和が現れる場合には、和を積に直す公式を用いて、振動のふるまいを理解しやすい補助線を記せ。

二つの波の足し合わせで振幅が周期的に変化することが得られたが、この現象はうなりと呼ばれる。

問 5 (a) $L_a \neq L_b$ の一般の場合に、 $\tan \theta$ に関する 2 次方程式 (4) を解き、

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &= \frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{(A - B)}{\sqrt{(A - B)^2 + 4C^2}} \right) \\ \sin^2 \theta &= \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{(A - B)}{\sqrt{(A - B)^2 + 4C^2}} \right) \\ \sin \theta \cos \theta &= \pm \frac{C}{\sqrt{(A - B)^2 + 4C^2}} \end{aligned}$$

となることを示せ。

(b) λ_1, λ_2 を求め, m, g, L_a, L_b, k を用いて表せ。

この問題で, 式 (2) の変換を行列表示したとき, 「共通する数学的表現」1. で示したように

$$\begin{pmatrix} x_a \\ x_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

と表される。問 1 で求めた x_a, x_b に関する運動方程式 (1) も行列表現ができる。また式 (3) は

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d^2 x_1}{dt^2} \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (3')$$

と表すことができ, このように x_1, x_2 について対角の形に変換することを行列の対角化という。 $x_a(t), x_b(t)$ が, 調和振動をする $x_1(t)$ と $x_2(t)$ の和で記述されることを, 二つの固有振動数をもつ固有振動の重ね合わせであると表現する。行列を対角化して固有振動数を求める一般的な手法があるが, ここでは直接的に非対角項が 0 になる条件から議論をした。

問 6 (a) 問 5 の結果から, 系の運動エネルギー

$$T = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{dx_a}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx_b}{dt} \right)^2 \right]$$

ポテンシャルエネルギー

$$V = \frac{m}{2} \left(\frac{g}{L_a} x_a^2 + \frac{g}{L_b} x_b^2 + \frac{k}{m} (x_b - x_a)^2 \right)$$

を x_1, x_2 を用いて表せ。運動エネルギー, ポテンシャルエネルギーのそれぞれが, x_1 だけを含む項と x_2 だけを含む項の和で書けることを示せ。

(b) x_1 だけを含む項の全エネルギー $E_1 = T_1 + V_1$, x_2 だけを含む項の全エネルギー $E_2 = T_2 + V_2$ が, それぞれ時間によらない定数となることを示せ。

[II] ニュートリノ振動

ニュートリノは, 1930 年にパウリがその存在を予言した素粒子で, 電荷を持たない。物質とはほとんど反応しないため, 実験による存在検証が非常に難しく, 1956 年になり原子炉からのニュートリノを観測することで発見された。その後の研究により, 3つの荷電レプトン (電子, ミュー粒子, タウ粒子) に対応して, 3種類 (世代) のニュートリノ, すなわち, 電子・ニュートリノ ν_e , ミュー・ニュートリノ ν_μ , タウ・ニュートリノ ν_τ (さらにそれらの反粒子) があることがわかっている。一つのニュートリノが他のニュートリノに変化していく現象がニュートリノ振動で, 2015 年のノーベル物理学賞が “for the discovery of neutrino oscillations, which shows that neutrinos have mass” の受賞理由で梶田隆章と Arthur B. McDonald に与えら

れた。1970年代に完成した素粒子の標準模型ではニュートリノには質量がないものとして定式化されているが、ニュートリノ振動は、ニュートリノにわずかであるが質量があるという画期的な証拠を与えるものであった。

ニュートリノの運動は、量子力学のシュレディンガー方程式に従う。シュレディンガー方程式の解は一般的に波動関数と呼ばれ、量子系が取り得る量子状態を決定し、また系の量子状態の時間的な変化を記述する。波動関数は複素数値をとり、直接の観測量ではなく、波動関数の絶対値の2乗が存在確率を与える。

ニュートリノ振動を記述する運動方程式（シュレディンガー方程式）は、古典系の連成振り子の方程式とよく似た形をしている。ニュートリノは3種類あるが、今、2種類のニュートリノを考えることにして、 α 型ニュートリノ（例えば ν_μ ）と β 型ニュートリノ（例えば ν_τ ）の波動関数を Ψ_α, Ψ_β とすると、これらは次のようなシュレディンガー方程式

$$\left. \begin{aligned} i\hbar \frac{d\Psi_\alpha}{dt} &= E_\alpha \Psi_\alpha + a\Psi_\beta \\ i\hbar \frac{d\Psi_\beta}{dt} &= a\Psi_\alpha + E_\beta \Psi_\beta \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

を満たす。ここで、 \hbar はプランク定数 h を 2π で割ったもので、 $\hbar = 1.05 \times 10^{-34}$ Js である。この式は行列形式で表せば、二つの連成振り子の運動方程式 (1) と同様な形をしていて、 a が二つの波動関数の混合の程度を表す。ここで、 Ψ_α, Ψ_β について式 (2) と同じ変換

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha &= \cos \theta \Psi_1 + \sin \theta \Psi_2 \\ \Psi_\beta &= -\sin \theta \Psi_1 + \cos \theta \Psi_2 \end{aligned}$$

をして、式 (3) と同様な

$$\left. \begin{aligned} i\hbar \frac{d\Psi_1}{dt} &= \hbar\omega_1 \Psi_1 \\ i\hbar \frac{d\Psi_2}{dt} &= \hbar\omega_2 \Psi_2 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

の形に変換することを考える。行列の表記を用いれば、

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\hbar \frac{d\Psi_1}{dt} \\ i\hbar \frac{d\Psi_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hbar\omega_1 & 0 \\ 0 & \hbar\omega_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \quad (6')$$

である。ここで注意すべきことは、前述のように、量子力学の波動関数は複素数値をとることである。古典的な振動を取り扱う際、オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

を用いると見通しがよくなることが知られているが、得られた複素数解の実部、あるいは虚部が実際の運動を表すものである。それに対して、量子力学では、波動関数は本質的に複素数値

をとる。古典の振動のニュートンの運動方程式は2次微分を含む方程式であり、一方、シュレディンガー方程式は複素数を含む1次微分の方程式である。しかし、変換の形が共通であるので、これまで得た結果をそのまま利用して問題を解くことができる。式(5)は式(1)に、式(6)は式(3)にそれぞれ対応しているので、式(4)に対応する式はすぐ得られる。

式(6)の解は

$$\begin{aligned}\Psi_1(t) &= D_1 e^{-i\omega_1 t} \\ \Psi_2(t) &= D_2 e^{-i\omega_2 t}\end{aligned}$$

となる。

問7 $E_\alpha = E_\beta = E$ の場合に、 ω_1, ω_2 を求めよ。また、 $t = 0$ で $\Psi_\alpha(0) = 1, \Psi_\beta(0) = 0$ とするとき、 $\Psi_\alpha(t), \Psi_\beta(t)$ を求めよ。なお、ここでの問は問3、問4に対応している。

問8 量子力学では波動関数の絶対値の2乗が時間 t における存在確率を表す。前問の条件のとき、 $|\Psi_\alpha(t)|^2, |\Psi_\beta(t)|^2$ を書き下せ。また、 $|\Psi_\alpha(t)|^2, |\Psi_\beta(t)|^2$ をグラフで表せ。

問9 $E_\alpha \neq E_\beta$ の一般の場合に $|\Psi_\alpha(t)|^2, |\Psi_\beta(t)|^2$ を計算せよ。 $|\Psi_\alpha(t)|^2, |\Psi_\beta(t)|^2$ に $\sin^2(2\theta) \sin^2 \frac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2}$ の表式が現れることを導け。 θ は式(4)を満足する角度である。ここで、 $\Psi_\alpha(0) = 1, \Psi_\beta(0) = 0$ とする。これは問5に対応した問である。

ここに現れる θ は Ψ_α, Ψ_β が作る2次元空間における回転角を意味しており、カビボ (Cabibbo) 角と呼ばれることもある。カビボ角は元々はニュートリノではなく、(核子を構成する素粒子である)クォークの変換に関して使われた用語である。さらに、クォークは3世代あることが示され、3次元に拡張したものがカビボ-小林-益川の行列と言われる。2008年のノーベル物理学賞は、“for the discovery of the origin of the broken symmetry which predicts the existence of at least three families of quarks in nature”の受賞理由で、小林誠、益川敏英に与えられた。なお、“for the discovery of the mechanism of spontaneous broken symmetry in subatomic physics”で受賞した南部陽一郎と共同受賞であった。

α 型ニュートリノ(例えば ν_μ)と β 型ニュートリノ(例えば ν_τ)をフレーバー固有状態と呼ぶのに対し、対角化した状態を質量固有状態と呼ぶ。 α から β の遷移確率 $P_{\alpha \rightarrow \beta}$ に質量固有状態の固有振動数 ω_1, ω_2 が現れる。

問10 (a) ニュートリノ振動を実験的に直接観測した実験として、スーパーカミオカンデの実験がある。式(6)の右辺にある $\hbar\omega_1, \hbar\omega_2$ は、連成振り子の場合の二つの固有振動数の \hbar 倍に対応するが、ニュートリノ振動の場合には二つの異なるニュートリノの質量固有状態のそれぞれのエネルギーを表している。ほぼ光速で飛ぶ非常に小さな質量のニュートリノの場合には、そのエネルギー E は、質量 m と運動量 p の関数として相対論的な公式で表されて、さらに、質量 m が十分に小さいという条件を

課すと、「共通する数学的表現」3. の 1 次近似式を用いて、次のように近似できる。

$$\hbar\omega_1 = E_1 = \sqrt{p_1^2 c^2 + m_1^2 c^4} \doteq p_1 c \left(1 + \frac{m_1^2 c^2}{2p_1^2} \right)$$

$$\hbar\omega_2 = E_2 = \sqrt{p_2^2 c^2 + m_2^2 c^4} \doteq p_2 c \left(1 + \frac{m_2^2 c^2}{2p_2^2} \right)$$

以下では、簡単のために、それぞれの質量のニュートリノの運動量は等しいとし ($p_1 = p_2 = p$) , $E_0 \equiv pc \doteq E_1 \doteq E_2$ を定義しておく。ここで、二つの質量の 2 乗の差 $\Delta m_{12}^2 \equiv (m_1^2 - m_2^2)$ を用いれば、ニュートリノ振動の周期 T は

$$T = \frac{4\pi\hbar E_0}{\Delta m_{12}^2 c^4}$$

で与えられることを示せ。なお、うなりは $\sin^2 \frac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2}$ の項で表される。

- (b) スーパーカミオカンデによる大気ニュートリノの観測データによれば、エネルギー約 1.6×10^{-10} J を持つミュー・ニュートリノが、その振動の 1 周期（ミュー型からいったんタウ型になり再びミュー型に戻るまでの時間）の間に進む距離 (L) は約 1000 km であった。ニュートリノはほぼ光速で進むとして（すなわち $L = cT$ ）, Δm^2 の値を kg^2 の単位で有効数字 1 桁で求めよ。 $c = 3.0 \times 10^8$ m/s である。

ここで議論をしたのは質量固有状態の質量の 2 乗の差である。電子の質量が 9.11×10^{-31} kg であることと比較すると、オーダーとして小さいことがわかる。現在 $\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$, $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_\tau$, $\nu_e \leftrightarrow \nu_\tau$ の $\sin^2(2\theta)$ と Δm^2 を高い精度で測定することを目指して実験が続けられている。

ニュートリノが混合するとか、振動するなどの議論をしてきたが、素粒子を「粒子」と考えると奇妙な面もある。素粒子は量子場の振動（励起）と捉えるとこの現象を理解できる。

参考文献：

Evidence for Oscillation of Atmospheric Neutrinos,
Y. Fukuda, *et al.* (Super-Kamiokande Collaboration),
Phys. Rev. Lett. **81**, 1562 (1998).

第 2 問 (75 点)

素粒子を加速する

「私たちのこの世界は何からできているのか」は自然科学の根源的な問である。1911 年、ラザフォードは自然放射線 (α 線) を金の薄膜に衝突させ、原子は中心の非常に小さな原子核とその周囲の多数の電子からなることを示した。原子核の内部構造を調べるために、陽子を人工的に加速する機械、加速器が開発され、加速された陽子を原子核に衝突させる実験で、原子核は陽子と中性子から作られていることがわかった。陽子や中性子の内部構造を調べるために更に高いエネルギーをめざして、次々と大きな加速器が作られ、1970 年代には陽子や中性子にもまた内部構造があり、クォークと呼ばれる素粒子で作られていることが明白になった。

本問では、粒子を加速する機械、加速器の基本的な要素について考察する。なお、相対性理論の効果については考慮しなくてよい。

[I] 加速と制御

粒子を加速し軌道を制御するには、電場と磁場を用いる。加速する粒子の質量を m 、電荷を $e (> 0)$ とする。図 1 のように、二つの極板間に電位差 V を与えて極板間の電場で加速する。

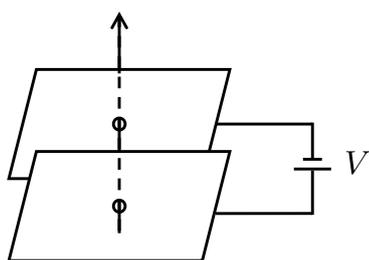


図 1.

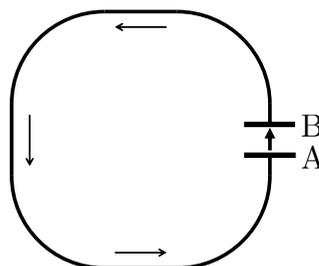


図 2.

- 問 1 加速する粒子の初速度を 0 とする。加速後の粒子の速度の大きさ v を求めよ。
- 問 2 図 1 の電位差を乾電池 1 個分、1.50 V (ボルト) として陽子を加速したときに得られる速度を、地上の重力場中での陽子の自由落下で得るために必要な落下距離はいくらか。有効数字 2 桁で求めよ。ただし、陽子の質量を 1.67×10^{-27} kg、電荷を 1.60×10^{-19} C、地上の重力加速度は 9.81 m/s^2 で高度によらず一定とし、空気抵抗は無視する。

この結果から、以下では、粒子の運動への重力の効果は無視する。

- 問 3 加速された粒子の運動は磁場で制御する。時間に依存しない磁場だけがある空間で粒子が運動するとき、その速度の大きさは変わらないことを証明せよ。

高いエネルギーのビームを作るためには、高い電圧が必要であるが、100 万 V を超える電圧は扱いが困難になる。そこで、図 2 のように加速部 A→B で加速した粒子を磁場で周回させて出発点に戻し、加速部を何度も通らせて加速する方式 (多重加速) が発案された。

問 4 図 2 の加速器で、加速部の極板 A と B の間の電圧が時間に依存せず一定の場合、多重加速はできないことを示せ。

この結果から加速部では交流電圧が必須である。粒子は固定された細い管（ビームパイプ）の内部を走り、軌道を制御する磁場により周回する。加速するにつれ粒子の速度が増加し、同じ軌道で回らせるために、加速部の交流電圧の周波数を高くしながら、磁場の強さも同期させて強くしていく。現代の大型加速器は全てこの同期方式、シンクロトロンである。

シンクロトロンでは、何万回も粒子が周回する。粒子は塊（これをバンチと呼ぶ）になって回っていくが、粒子の速度や位置の分布が膨らんでばらけていき、設計上の軌道からずれて、ついにはビームパイプに衝突して失われてしまう。このバンチがばらけていく現象を防がなければ、シンクロトロンによる多重加速は実現できない。ばらけていく方向には二種類ある。粒子の進行方向（これをビーム軸方向と呼ぶ）とビーム軸に垂直な方向（2次元）である。

[II] 強収束の原理

ビーム軸に垂直な方向への広がり（の抑制）を考える。光なら凸レンズを用いて光線を収束させられる。ビーム粒子の場合には図 3 のような 4 極磁石（Q と記載）を用いる。十字型の空隙を持つ鉄コアを作り、4 つの磁極（二組の N 極と S 極）を作る。紙面に垂直に上から下へビーム粒子が走る中心軌道を原点として、粒子位置の中心軌道からのずれを図 3 の x, y 座標で表す。

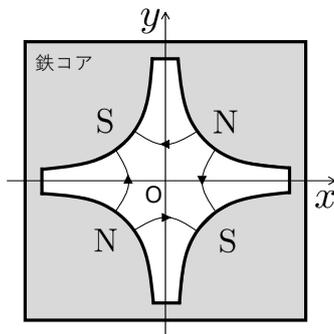


図 3.

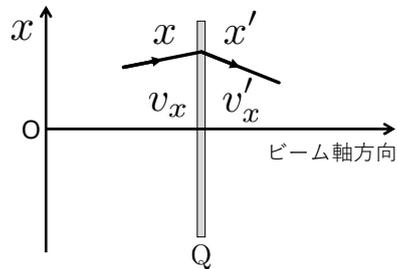


図 4.

空隙内の位置 x, y での磁束密度の x, y 成分は $b (> 0)$ を定数として

$$B_x = -by, \quad B_y = -bx \quad (1)$$

と調整されており、ビーム軸方向の成分は 0 である。この磁束密度はビーム軸方向の位置にはよらない。Q のビーム軸方向の厚み（磁場が存在する部分の長さ）を D とする。

Q に粒子が入射する時の位置を x, y 、速度ベクトルの x, y 成分を v_x, v_y とする。ただし v_x, v_y は粒子の速度の大きさ v に比べて非常に小さく、速度のビーム軸方向の成分は常に一定値 v として扱い、粒子が Q を通過するのに要する時間は v_x, v_y によらず一定値 $\frac{D}{v}$ とする。また、Q の厚み D は十分に薄く、Q の内部では位置座標 x, y は変わらないとする。

問 5 Q 内部での粒子の運動方程式を速度 $v_x(t), v_y(t)$ を用いて書け。

得られた運動方程式の x 成分と y 成分は互いに独立しているので別々に扱える。まず、 x 成分について考える。図 4 のように Q を通過直後の粒子の座標を x' 、速度の x 成分を v'_x とする。上の説明から、座標 x とビーム軸方向の速度 v は Q を通過する間は一定で変わらないとできる。すると、「共通する数学的表現」1. に従い、行列と列ベクトルを用いて次の関係式が得られる。

$$\begin{pmatrix} x' \\ v'_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v_x \end{pmatrix}, \quad \text{ただし } q \text{ は正の定数} \quad (2)$$

問 6 運動方程式から $v'_x - v_x$ を計算することによって、式 (2) の正の定数 q を求めよ。

以下の問では、この定数 q を用いて解答せよ。

問 7 図 5 のように、ビーム軸に平行に Q に入射する粒子は全て点 F で中心軌道 ($x = 0$) に到達すること、すなわち Q が凸レンズとして働くことを、変換 (2) を用いて示し、 Q から点 F までの距離 f (焦点距離) を求めよ。なお Q の厚みは無視する。

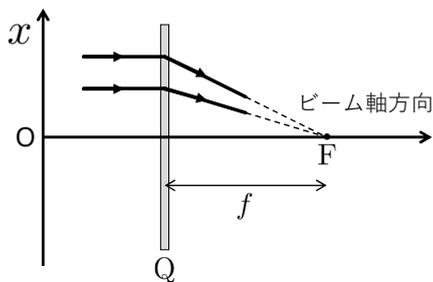


図 5.

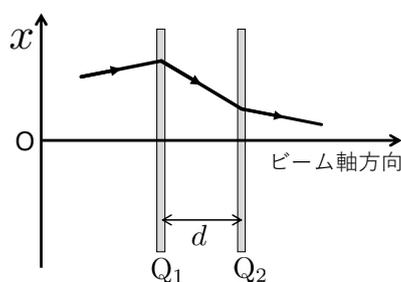


図 6.

これまでの計算を y 成分について繰り返して、 y と v_y の変換を与える行列を求めると、同じ定数 $q (> 0)$ を用いて、次のように書けることがわかる。

$$\begin{pmatrix} y' \\ v'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ +q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ v_y \end{pmatrix} \quad (3)$$

問 8 変換 (3) を用いて、ビーム軸に平行に Q に入射する粒子の運動を解析して、 y 成分については Q は凹レンズと同じ作用をすることを示し、その焦点距離を求めよ。

図 3 の 4 極磁石は、 x 方向には凸レンズ、 y 方向には凹レンズとして働くことがわかった。式 (1) ではなく、もし B_x の符号を逆にした磁束密度を用意できれば、 y 成分も凸レンズとなるが、それは不可能であることがアンペールの法則から証明される。

加速器の歴史の中で画期的な「強収束の原理」が 1952 年にリビングストン、クーラントらによって発見された。二つの 4 極磁石 Q_1 、 Q_2 を距離 d だけ離して設置する方法である。ただし、二つ目の Q_2 はビーム軸回りに 90 度回転して設置する。すると、 x 成分については Q_1 は凸レンズ、 Q_2 は凹レンズとなり、 y 成分については Q_1 が凹レンズ、 Q_2 が凸レンズとなる。

ビーム軸に平行に座標 x, y で Q_1 に入射する粒子の Q_2 出口での座標と速度を求めよう。まず x 成分を考察する (図 6)。 Q_1 では変換 (2) によって、座標は変わらず、速度 v'_x が決まる。

次に、 Q_2 入口までは時間 $\frac{d}{v}$ だけ自由運動を行うので、速度は v'_x のままで変化しないが座標は $x + \frac{d}{v}v'_x$ と変化する。これは次の変換で表せる。

$$\begin{pmatrix} 1 & d/v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v'_x \end{pmatrix} \quad (4)$$

Q_2 では変換 (3) が加わる。この 3 ステップをまとめて、 Q_2 出口での座標 x'' と速度 v''_x は、

$$\begin{pmatrix} x'' \\ v''_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ +q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d/v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

と表現できる。右端のベクトルに 3 つの行列が右から順にかかっていく。 y 成分についても同様に考察できるが、 Q_1 と Q_2 の役割（凸と凹）が入れ替わるだけなので、 Q_2 出口での y 成分の座標と速度は上の x 成分の結果から $q \rightarrow -q$ とするだけでも得られる。

問 9 Q_2 を通過後の粒子は、 Q_1 入射時の座標に依らずに、 x 成分については Q_2 からの距離 f_x の点で、 y 成分については Q_2 からの距離 f_y の点で、それぞれ中心軸に収束することを示し、 f_x, f_y を求めよ。ただし、 $d < f$ とする。

上の結果から、 Q_1, Q_2 の合成システムは x, y 両成分について凸レンズとして働くことがわかる。この強収束の原理は、発見後すぐに実装されてシンクロトロンが実現した。

[III] 位相安定性の原理

次に、ビーム軸方向のばらつきについて考える。図 2 の加速部 B に対する A の電位として図 7 のような交流電圧がかけられており、設計上は時刻 a で加速部を通過し、1 周した後 a' で再び加速されるとする。バンチの後方で遅れて到着する粒子は、時刻 b で加速部を通過すると、時刻 a に比べて加速電圧が高くなり、速度増加が設計値より大きくなって 1 周にかかる時間が短くなり、 b' より手前で加速部に戻り遅れを回復する。この位相安定性の原理は 1944 年にベクスラーとマクミランによって独立に発見された。この原理を定量的に考察する。

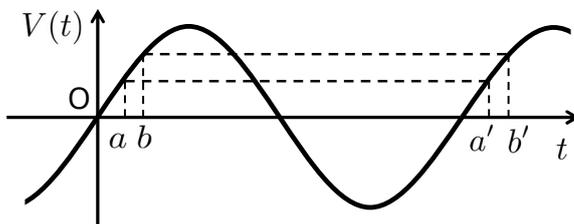


図 7.

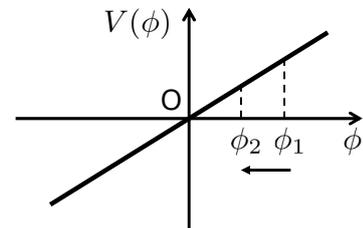


図 8.

ここでは加速をせずに一定の速度でビーム粒子を周回させる状況を考え、設計上は加速部を図 7 の時刻 0 で通過しちょうど 1 周期で戻ってくるとする。図 7 の原点近傍を拡大して図 8 のように直線近似し、横軸は時間ではなく位相 ϕ （交流の 1 周期が 2π ）で表す。すなわち、加速部 B に対する A の電位は、 $K (> 0)$ を定数として、通過時の位相 ϕ の一次式とする。

$$V(\phi) = K\phi \quad (6)$$

図 8 で、設計位相 0 から遅れて位相 ϕ_1 で加速部に入る粒子（ただし、粒子の速度は設計値）は、加速部で加速されて速度が設計値より速くなる。このため、加速電圧の交流周期よりも短い時間で周回をして、位相 ϕ_1 から早くなった位相 ϕ_2 で加速部に戻り、設計位相 0 に近づく。

位相 ϕ とビーム軸方向の速度 v の周回毎の変化を考える。速度は設計速度 \bar{v} に対するずれの割合 $u \equiv \frac{v - \bar{v}}{\bar{v}}$ で表し、このずれは十分に小さい ($|u| \ll 1$) とする。図 2 において、加速部 A に入る時の位相を ϕ_0 、速度を u_0 とし、加速部 B を出る時の位相を ϕ' 、速度を u' とする。加速部は短く、バンチ内でのビーム軸方向の位置を表す位相は加速部の前後で変化しない。加速あるいは減速によって粒子の運動エネルギーが $eV(\phi_0)$ だけ変化するが、変化の割合は十分に小さいとする。

線形近似、すなわち $|u| \ll 1$ なので、 u に比べて u^2 は無視するという近似の範囲で、加速部通過による位相と速度の変化は、 k を定数として、以下のように書ける。

$$\phi' = \phi_0, \quad u' = u_0 + k\phi_0 \quad (7)$$

問 10 式 (7) の定数 k を求めよ。

以下の問では、この定数 k を用いて解答せよ。

周回軌道長を L とすると、設計上の周回時間は $T = \frac{L}{\bar{v}}$ である。速度のずれ u があると周回時間にずれ ΔT が発生するが、その割合は $\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{1+u} - 1 \doteq -u$ であり（「共通する数学的表現」3.）、位相の変化は $-2\pi u$ となる。なお、ビーム軸方向の速度は周回する間は変わらない。従って、1 周回ってきて再び加速部の入口 A に到達したときの速度 u_1 と位相 ϕ_1 を、 ϕ' と u' で表すと、

$$\phi_1 = \phi' - 2\pi u', \quad u_1 = u' \quad (8)$$

問 11 式 (7) と式 (8) を合わせると、周回数 (n) 毎の加速部入口 A での位相と速度、 ϕ_n, u_n の漸化式が得られる。 ϕ_{n+1}, u_{n+1} のそれぞれを ϕ_n, u_n で表す漸化式を求めよ。

問 12 上の連立漸化式から、次の形の ϕ_n だけの 3 項間漸化式を導き、定数 b, c を求めよ。

$$\phi_{n+2} + b\phi_{n+1} + c\phi_n = 0 \quad (9)$$

3 項間漸化式 (9) を解くために、まず単純な等比数列解： λ を定数として $\phi_n = \lambda^n$ となる解を探す。これを式 (9) に代入すると、 λ の 2 次方程式： $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ が得られる。この二つの解は、定数 k が十分に小さければ、絶対値が 1 の互いに共役な複素数になり、実定数 θ を用いて、 $\lambda_1 = e^{i\theta}, \lambda_2 = e^{-i\theta}$ と書ける。3 項間漸化式 (9) は各項の一次式の和であるから、見つけた二つの等比数列解 λ_1^n, λ_2^n にそれぞれ定数係数 (C_1, C_2) をかけて足したもの

$$\phi_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n = C_1 e^{in\theta} + C_2 e^{-in\theta} \quad (10)$$

もまた解である。任意の初項と第 2 項、 ϕ_0, ϕ_1 に対して、二つの定数係数 C_1, C_2 が決められるので、任意の解は式 (10) で表せる。式 (10) を一般解と呼ぶ。

問 13 一般解 (10) を利用して、 ϕ_n, u_n の初期値が $\phi_0 = 0, u_0 = \varepsilon$ の場合の解 ϕ_n を求めよ。
実定数 θ はそのまま使ってよい。

この解から、位相と速度の設計値からのずれは振動的に変化し、発散せず安定していることがわかる。これが位相安定性の原理であって、シンクロトロンを実現する必須要素である。

[IV] 衝突ビーム型加速器の必要性

粒子を加速してターゲット粒子にぶつける時に、加速によって加えられたエネルギーのどれくらいの割合が有効に使われるのかを考察する。加速する粒子の質量を M 、静止しているターゲット粒子の質量を m とし、二つの粒子の間のクーロン力（斥力）による位置エネルギーを $V(r) = \frac{C}{r}$ (C は正定数) とする。初期状態では、二つの粒子は十分に離れているのでクーロン力による位置エネルギーは無視できる。

簡単のために、図 9 のようにビーム粒子とターゲット粒子は、正面衝突を行い衝突後も同じ直線上を運動するとする。クーロン力（斥力）に抗してどこまで近づけるかが大切な指標である。近づけば近づくほど、内部のより細かい構造を調べるデータが得られるからである。

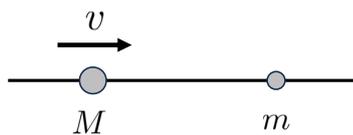


図 9.

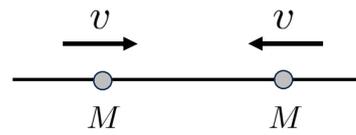


図 10.

問 14 二つの粒子が最も近づいた時のクーロン力による位置エネルギー V_{\max} と加速によってビーム粒子に与えられたエネルギー $\frac{1}{2}Mv^2$ との比 $\frac{V_{\max}}{\frac{1}{2}Mv^2}$ を M と m で表せ。

上で求めた比は、 $\frac{M}{m}$ を大きくすると 0 に近づき、加速によって与えたエネルギーの中の極めて一部しか有効に使われなくなる。実は、高速粒子の相対論的な効果の一部は質量の増加という形でも理解することができるので、有効に使われるエネルギーの割合は高エネルギーに加速すればするほど激減してしまい、粒子の内部構造に迫ることができなくなる。

そこで、新たに考えられたのが、加速したビーム粒子同士を正面衝突させる方法（衝突ビーム型）である。図 10 のように、両側から速度 v に加速した質量 M の粒子同士を衝突させる。

問 15 二つのビーム粒子が最も近づいた時のクーロン力による位置エネルギー V_{\max} と加速によって二つの粒子に与えられたエネルギー Mv^2 の比 $\frac{V_{\max}}{Mv^2}$ はいくらになるか。

衝突ビーム型実験では、加速器がビーム粒子に与えたエネルギーを有効にマイクロ構造の探索に利用できる。マイクロ世界を調べるエネルギーフロンティア加速器はこの衝突ビーム型であり、その最大のものはスイスとフランスにまたがる国際共同研究所 CERN に設置されている周長 27 km の LHC (Large Hadron Collider) である。LHC が理論的に予言されていたヒッグス粒子を発見したのは、ラザフォードの実験から 100 年後、2012 年のことであった。

第 3 問 (75 点)

光子の偏光と干渉

光は粒子なのか、それとも波なのか、歴史的に長い論争があった。19 世紀にはマクスウェルの電磁理論により光は電磁波すなわち波動であるという形で決着がついたかに見えた。ところが 20 世紀に入り、空洞放射のスペクトル、光電効果、コンプトン散乱など、光を単なる波動と見なしては理解できない現象が次々と発見された。現在では、光は波動性と粒子性を併せ持った光子として、量子力学によって記述されている。

ここでは特に光の偏光と干渉に注目し、通常の粒子と見た時の光子の振る舞いの不可解な点を明らかにしよう。

I. 電磁波としての光

電磁気学によると、光は振動する電場と磁場からなる波動である。単純な平面波の場合、電場、磁場、および伝播方向は互いに垂直で、この順序で右手系をなす (図 1)。例えば、 z 方向に伝播する光の電場と磁場は $x-y$ 平面内で直交する方向に振動している。電場と磁場は互いに関係しているので、以下では振動する電場で光の伝播を記述しよう。

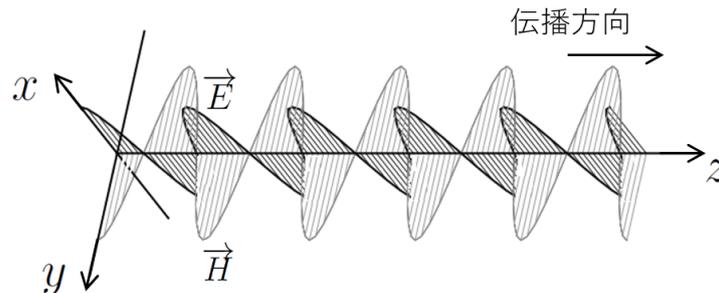


図 1. 電磁場の伝播

一般には光の振動電場の向きは $x-y$ 平面内で固定されておらず、回転したり複雑に変化したりするが、ここでは電場 (および磁場) が一定の方向で振動する光を考える。このような光を直線偏光あるいは単に偏光と呼び、その振動電場の方向を偏光方向とする。

例えば、 z 方向に伝播する直線偏光の振動電場 $\vec{E}(z, t)$ は、その振幅を E_0 、 $x-y$ 平面内にある振動電場の方向を表す単位ベクトルを \vec{t} として

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \vec{t} \cos(kz - \omega t + \delta) \quad (1)$$

と表される。 \cos の引数 $(kz - \omega t + \delta)$ を位相といい、座標 z と時間 t の係数 k と ω は、それぞれ波数および角振動数と呼ばれるパラメーターである。ここで、ベクトル \vec{t} で表される光の振動電場も、 $-\vec{t}$ の振動電場も、光の偏光方向としては区別されないことに注意しよう。

問 1 式 (1) を波数 k と角振動数 ω の代わりに波長 λ と周期 τ を用いて表せ。

複素数を用いた波の表現

波を数学的に表現するのに、オイラーの公式 (「共通する数学的表現」2. を参照) を用いて、

複素数の関数で表すと便利ことが多い。

振幅を複素数に拡張した複素振幅 \tilde{E}_0 を導入して、複素数の係数がかかったベクトル

$$\vec{E}(z, t) = \tilde{E}_0 \vec{t} e^{i(kz - \omega t)}$$

を定義すると、電場ベクトルはこの実部で与えられる：

$$\vec{E}(z, t) = \text{Re} [\vec{E}(z, t)]. \quad (2)$$

ここで、 \vec{t} は $x - y$ 平面内の単位ベクトルで、光の偏光方向を表す。

問 2 式 (1) が式 (2) で与えられるためには複素振幅 \tilde{E}_0 をどうとればよいか。 E_0 と δ を用いて表せ。また、 $\delta = \frac{\pi}{2}$ および π のときには、 \tilde{E}_0 はそれぞれどうなるか。

以下では記号を簡単にするために、複素振幅 \tilde{E}_0 および複素振動電場 $\vec{E}(z, t)$ を、それぞれ単に E_0 , $\vec{E}(z, t)$ と記すことにする。実際の振幅は E_0 の絶対値、電場は $\vec{E}(z, t)$ の実部で与えられる。

光はエネルギーを運ぶ。光の強度は単位時間・単位面積あたりに運ぶエネルギーで定義され、振動電場の振幅の 2 乗に比例する。 E_0 を複素振幅とすると、光の強度 I は

$$I = a|E_0|^2 = aE_0^* E_0; \quad a: \text{比例係数}. \quad (3)$$

と表される。ただし、 E_0^* は E_0 の複素共役を表す。

偏光板の働き

一般の方向 \vec{t} に偏光した直線偏光の振動電場は

$$\begin{aligned} \vec{E}(z, t) &= E_0 \vec{t} e^{i(kz - \omega t)} \\ &= E_0 \cos \phi \vec{x} e^{i(kz - \omega t)} + E_0 \sin \phi \vec{y} e^{i(kz - \omega t)} \end{aligned} \quad (4)$$

のように、 x 方向に振動する成分と y 方向に振動する成分の和として表される。ただし、 ϕ は偏光方向のベクトル \vec{t} と x 軸のなす角で、 \vec{x} および \vec{y} はそれぞれ x 軸方向、 y 軸方向の単位ベクトルである (図 2)。

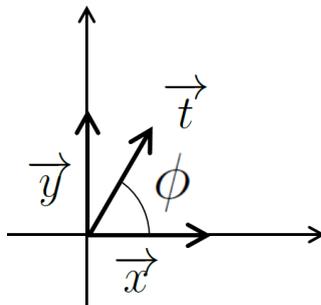


図 2. 偏光方向を表すベクトル \vec{t}

偏光板（図3）と呼ばれる素子に光を通すと、その透過軸に平行な振動電場の成分を持つ光のみが透過し、透過軸に垂直な成分は反射または吸収され、透過しない。その結果、偏光板を透過した光は透過軸の方向に偏光した直線偏光になる。実際の偏光板はこのように理想的には働かないが、以下では、透過軸に平行な偏光成分だけが完全に透過する、理想的な偏光板を考える。

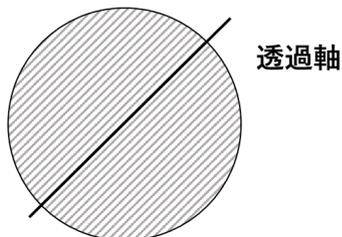


図3. 偏光板

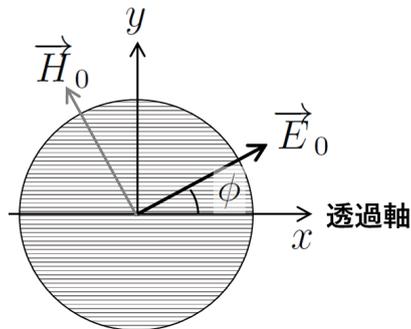


図4. 偏光板 P_x

問3 振動電場が式(4)で表される偏光を考える。

(a) この光を、透過軸が x 軸に平行な偏光板 P_x (図4)に通すと、透過した光の電場の複素振幅 E_1 はいくらか。

(b) さらに、その透過光を、透過軸を x 軸から角度 θ だけ傾けた偏光板 P_θ に通すと、透過光の電場の複素振幅 E_2 はいくらか。

(c) 上で求めたそれぞれの透過光の強度 I_1 および I_2 を入射光の強度 I_0 で表せ。

通常の光（自然光）は、多くの発光源からの光の重ね合わせで、個々の発光源から発せられる光はそれぞれ異なる振動方向の電場を持つ。いま、入射光を N 個 ($N \gg 1$) の発光源からの z 方向に伝播する光の重ね合わせとし、 j 番目の発光源の光は ϕ_j 方向の直線偏光とする。各発光源からの光の偏光方向 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$ はランダムにすべての方向に様に分布しているとする。簡単化のために、各発光源からの振動電場の波数および複素振幅は全て同じ値 k および E_0 としよう。

問4 この入射光が問3と同様に二つの偏光板を順に透過したとする。偏光板 P_x を透過した後の光の強度 I_1 、および偏光板 P_x と P_θ を透過した後の光の強度 I_2 を、入射光の強度 I_0 で表せ。

[ヒント] 各光源の偏光がランダムであることから、光の強度はそれぞれの光源からの光の強度の和で表され、光源の偏光方向 ϕ_j の関数の和は

$$\sum_{j=1}^N f(\phi_j) = \frac{N}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) d\phi$$

として求められる。このことを用いてよい。

II. 光子：粒子としての光

20世紀に入って、光は粒子としての性質も示すことが明らかになった。光のエネルギーはとびとびの値を取り、光を構成している粒子、すなわち光子1個のエネルギーはその振動数 f

に比例する。ただ、光子1個のエネルギーは非常に小さいために、我々が日常的に目にする強度の光でも莫大な数の光子から構成されていて、あたかも空間的に広がった連続的な波のように見える。しかし、光の強度を弱めてゆき、光子が一度に一つずつ飛んで来る程度になると、感光板に到達した光の粒が感光剤分子を一つずつ感光してゆく様子が観測され、粒子としての性質があらわになる。この粒子としての光子の振る舞いは、非常に奇妙なものであることが示された。このことを以下で見てゆこう。

偏光板に対する光子の振る舞い

I. で調べた電磁波としての光が偏光板を透過したときの様子は、多数の光子の集団としての振る舞いに対応している。それをもとに、粒子としての光子の振る舞いを考察してみよう。

式 (1) で表される光はその強度 $I_0 = a|E_0|^2$ に比例した莫大な数の光子の流れである。この光を透過軸が x 軸に平行な偏光板 P_x に通すと、透過光の強度 I_1 に比例した数の光子が透過し、透過した光子は x 軸方向の直線偏光 (x 偏光) となる。

では、入射光を構成する一つひとつの光子はどう振る舞うのだろうか。まず、1個の光子の偏光状態を記号 $\vec{\psi}$ で表すことにする。式 (1) のベクトル \vec{t} は光の偏光を完全に指定しているので、それを構成する一つひとつの光子の偏光状態 $\vec{\psi}$ も全て同じ単位ベクトル \vec{t} で指定される：

$$\vec{\psi} = \vec{t} = \cos \phi \vec{x} + \sin \phi \vec{y} = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}. \quad (5)$$

この状態の光子一つが偏光板 P_x を通るとどうなるだろうか。上で議論した、光子の集団の振る舞いから考えると、一つひとつの光子はそれぞれ確率 $|\cos \phi|^2$ で偏光板 P_x を通り抜け、確率 $1 - |\cos \phi|^2 = |\sin \phi|^2$ で吸収されるか反射して偏光板でブロックされる。通り抜けた光子の偏光状態 $\vec{\psi}_1$ は

$$\vec{\psi}_1 = \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

に変化する。

それぞれの光子は振動数に比例する一定のエネルギーを持った粒子で、一つの光子が偏光板で分裂して一部がブロックされて残りが透過するといったことは起こらない。また、全ての光子の偏光は同じ式 (5) で記述され区別はないので、どの光子が偏光板を通り抜け、どの光子がブロックされるかは、確率的で予測できない。

もし、同じ偏光状態 (5) の光子を y 軸に平行な偏光板 P_y に通すと、今度は確率 $|\sin \phi|^2$ で通り抜け、確率 $|\cos \phi|^2$ でブロックされる。通り抜けた光子の偏光状態 $\vec{\psi}_1$ は

$$\vec{\psi}_1 = \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

になる。

この光子の振る舞いは奇妙だ。すなわち、同じ状態の光子であっても偏光板を通り抜けたりブロックされたりして、どちらになるか予測できないというのだ。

「決まった状態にある光子に対する測定結果が確率的にしか予測できない」というのは物理法則としては受け入れがたい。本当は、「式 (5) の \vec{t} で表される光子の偏光はすべて同じ状態にあるのではなく、いくつかの異なる偏光状態の光子が統計的に混合しているのではないか」という疑問が生じる。つまり、

- x 偏光や y 偏光は決まった偏光状態で、それらの光子の偏光測定の結果は確実に予測できるが、
- \vec{t} で表される光子には x 偏光と y 偏光の光子が $|\cos \phi|^2 : |\sin \phi|^2$ の比で統計的に混じっていて、その結果、偏光測定の結果が確率的にしか予測できない

のではないかというわけだ。実際、 x 偏光の光子は偏光板 P_x を確実に透過し、 y 偏光の光子は確実にブロックされる。そして、 \vec{t} で表される偏光の光子が上のような比率で混じったものだったとすれば、それが偏光板 P_x を透過する確率は、確かに $|\cos \phi|^2$ となる。

しかしこの解釈では、別の偏光測定に対しては明らかに実際の結果と矛盾してしまう。

問 5 透過軸が式 (5) のベクトル \vec{t} に平行な偏光板を P_t とする。以下のそれぞれの光子が、偏光板 P_t を通った場合の透過確率を求めよ。

- x 偏光の光子。
- y 偏光の光子。
- x 偏光の光子と y 偏光の光子が $|\cos \phi|^2 : |\sin \phi|^2$ の比で統計的に混じった光子。

現在の量子力学の標準的な解釈では、式 (5) で与えられる状態 $\vec{\psi}$ も \vec{x} や \vec{y} と同様に量子力学的には確定した状態である。つまり光子の偏光状態が確定していても、測定する偏光の方向によって、透過するかブロックされるか確実に予測できる場合もあるし、どちらになるか確率的にしか予測できない場合もあるのだ。

ビームスプリッター

ある一つの方向からの入射光を二つの方向の出射光に分離する光学素子をビームスプリッター (BS, 半透明鏡) という。BS には一般に二つの可能な入射方向と、二つの出射方向があり、それぞれ図のように二つの入射方向をポート 1, ポート 2, それに対応する出射方向をポート 1', ポート 2' と呼ぶことにする (図 5)。

議論を簡単にするために、入射光として反射面に平行 (紙面に垂直) な振動電場成分を持つ直線偏光 (S 偏光と呼ぶ) だけを考えることにする。すると、反射波および透過波も S 偏光になり、以下の議論で偏光を考慮する必要はない。

ポート 1 から複素振幅 E_1 の光が入射した時、ポート 1' に出射する透過波とポート 2' に出射する反射波の複素振幅 E'_1 と E'_2 は、電磁気学によって求められ、複素数 t および r を用いて

$$E'_1 = tE_1, \quad E'_2 = rE_1$$

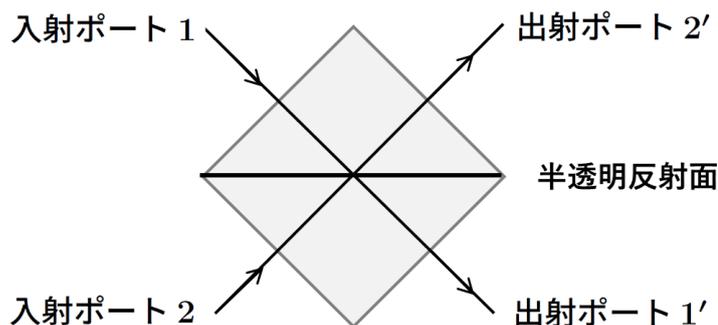


図 5. ビームスプリッター (BS)

と表される。同様に，ポート 2 から複素振幅を E_2 の光が入射した時の，ポート 2' の透過波とポート 1' の反射波の複素振幅 E'_2 と E'_1 は，

$$E'_2 = t'E_2, \quad E'_1 = r'E_2$$

と与えられるとする。ポート 1 とポート 2 の両方から入射波があると，出射波の振幅は二つの入射ポートからの出射波の和となり，入射波と出射波の関係は 2 行 2 列の行列 U を用いて

$$\begin{pmatrix} E'_1 \\ E'_2 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

と表される。(行列とベクトルの積は「共通する数学的表現」1. を参照のこと。)

問 6 ポート 1 だけから入射光があった場合の，BS の透過率 T および反射率 R はいくらか。
 t と r を用いて表せ。ただし，透過率および反射率とは，入射波の強度に対する，それぞれ透過波および反射波の強度の比である。

問 7 式 (8) の 2 行 2 列の行列 U を， t, t', r, r' を用いて具体的に書き下せ。

問 8 ロスがなく入射波の全強度と出射波の全強度が等しい BS を考える。

(a) 複素係数 t, t', r, r' が満たさなければならない条件を導け。

(b) $t = t' = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $r = r'$ の時，可能な r の値を求めよ。

マッハ・ツェンダー干渉計

図 6 のような，一つの光源からの光を BS1 で二つに分割し，二つの経路 A と B を通った光を BS2 で干渉させて，検出器 C と D で光を検出する干渉計を，マッハ・ツェンダー干渉計という。経路 B は経路 A より光路が長く，経路 B を取る光は位相 ϕ を余分に生じるとする。

BS1 および BS2 での光の複素振幅の変化を表す行列 U は

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

で与えられ，M1 と M2 は完全反射の鏡として以下の問いに答えよ。

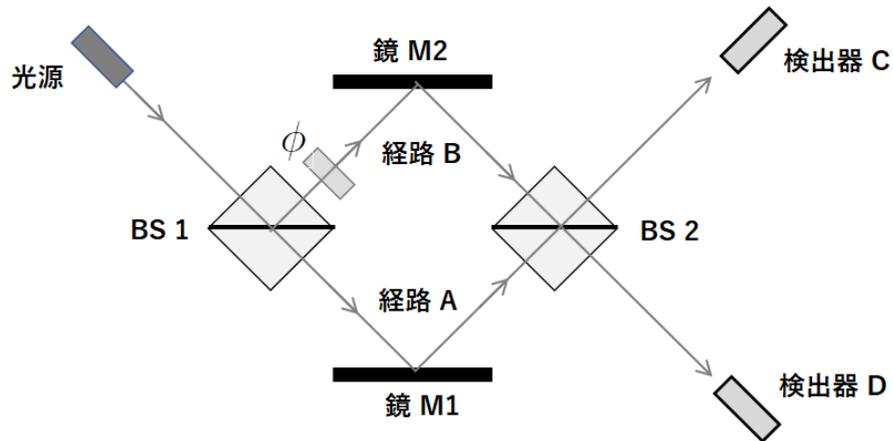


図 6. マッハ・ツェンダー干渉計

- 問 9 光源からの光の複素振幅を E_0 としたとき、経路 A を通って C および D に出射する光の複素振幅 E_{AC} および E_{AD} を求めよ。ただし、M1 および M2 での反射による位相変化は無視せよ。
- 問 10 同様に、経路 B を通って C および D に出射する光の複素振幅 E_{BC} および E_{BD} を求めよ。
- 問 11 検出器 C および D で検出される光の強度 I_C および I_D を光源の強度 I_0 を用いて表せ。位相差 ϕ の関数として I_C の概形をグラフに描け。

光が光子の集まりとすると、一つひとつの光子が C または D に到達する統計確率の比は、検出器 C と D で観測される光の強度 I_C と I_D の比に等しい。光源から出る光子の状態がまったく同じで完全に確定した状態であっても、C か D のどちらに到達するかは予測できず確率的なのである。これは、初期条件を一つに指定しても結果が一つに決まらない、すなわち、光子は非決定論的に振る舞うということを示している。

また、光源の強度を弱くして、この干渉計の中に同時に二つ以上の光子が存在しない状況にしても、長時間観測すると、検出器 C と D での光子の検出確率の比が二つの経路の位相差 ϕ に依存する様子は変わらない。つまり、それぞれの光子の振る舞いが空間的に離れている二つの経路の光路差に依存する。このことは、一つひとつの光子はそれぞれどちらか一方の経路を通ってくるのではなく、一つの光子が両方の経路の状況に依存する非局所的な存在であることを示している。

この非決定論性と非局所性が本当の自然の姿なのか、長い間論争の的であった。アインシュタインは量子力学の記述が不完全な為にそのように見えるだけではないかと疑問視し、受け入れなかった。しかし、今日では非決定論性と非局所性は量子力学による記述の欠陥によるものではなく、自然本来の姿であると信じられ、量子コンピュータや量子暗号などそれらを用いた量子技術の研究も活発に行われている。

2022 年のノーベル物理学賞は、このような非決定論性と非局所性を示す光子の振る舞いを、いわゆる量子もつれ状態を用いた実験により明らかにした物理学者 3 名に授与された。

第 4 問 (75 点)

原始惑星系

宇宙は約 140 億年前に誕生し、その中には星の集団である多くの銀河が存在する。我々の住む銀河（天の川銀河）には、数千億個の恒星（太陽と同様に光輝いている天体）が存在し、その多くは、惑星系を伴っていることがわかってきた。太陽系以外の惑星を系外惑星という。系外惑星が最初に発見されたのは 1992 年であり、その後、多くの系外惑星が発見されている。発見された系外惑星には、太陽系とは似ても似つかないものが多いが、太陽系に類似した惑星系も存在するはずと考えられている。

銀河系内の恒星とその周囲の惑星系は、星間物質の高密度部分である星間分子雲から形成されると考えられている。

水素分子 H_2 を主成分とする分子雲の一部分が、ある臨界の密度を超えると自身の重力で収縮し、原始中心星が生まれる。その際、大きな角運動量をもつ分子雲から形成された気体（固体微粒子すなわちダストを含む気体）は、中心星のまわりに球状に取り巻いて公転するのではなく、円盤を形成して周回する。この円盤を原始惑星系円盤という（図 1）。

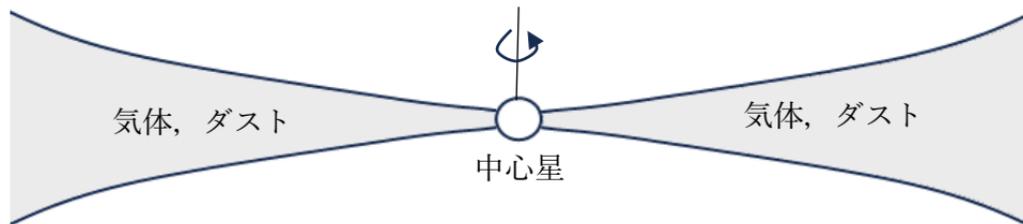


図 1. 原始惑星系円盤

原始惑星系円盤を構成している物質は、H や He などの軽元素が多いが、わずかな重元素を含んでいる。ただし、これらの元素は恒星内のような高温状態ではすべて気体であるが、円盤内では一般に温度が低く、重元素の一部は凝縮してダストになっている。円盤は気体（理想気体とみなされる）と 1 % 程度のダストから構成されていると考えられる。そのときのダストのサイズは $0.1 \sim 1 \mu\text{m}$ 程度である。

以下の本問では、現在の惑星系形成論とほぼ同義である太陽系形成論の標準モデル、特に、林忠一郎、中沢清等によって進められたモデル（京都モデルあるいは林モデルと言われる）に従い、より現代的な考え方を加味しながら議論を進める。

§ 1 では、原始惑星系の気体からなる円盤（気体円盤）の形状と厚みを明らかにする。§ 2 で気体の運動とダストの運動の違いを明らかにし、§ 3 で円盤中のダストからどのようにして大きな惑星が形成されるかを考察する。最後に、ダストが自己重力により収縮して微惑星を生成する可能性を考える。

近似式

$$|x| \ll 1 \text{ のとき, } \alpha \text{ を実数として, } (1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x \quad (1)$$

を, 必要に応じて用いよ。

本問では, 中心星からの輻射圧は無視する。

§ 1 原始惑星系円盤

原始惑星系円盤を考えるために, まず, 問1～問3で円盤を構成している気体の力学的平衡条件(円盤の赤道面に垂直な方向)を用いて気体円盤の密度分布を考察し, 円盤の形状を明らかにする。問4では, 気体がダストと熱平衡にあることから気体の温度が中心星の光度と中心星からの距離で決まることを示す。問5では, 気体の温度分布を用いて円盤の厚みを求める。考える円盤の大きさは, 太陽系程度のものを想定している。

問1 図2のように, 地球上の高度 z での大気の圧力を $P(z)$, 大気の質量密度を $\rho(z)$, 一様な重力は z 軸負方向に作用し, 重力加速度の大きさを g とする。断面積 S で中心軸が z 軸に平行な直円柱をとり, $z - \frac{\Delta z}{2}$ と $z + \frac{\Delta z}{2}$ の間の大気にはたらく力のつり合い(これを静水圧平衡という)を考えた上で, $\Delta z \rightarrow 0$ の極限をとって式

$$\frac{dP(z)}{dz} = -\rho(z)g$$

を導け。地球表面は, その曲率を無視して平面とする。

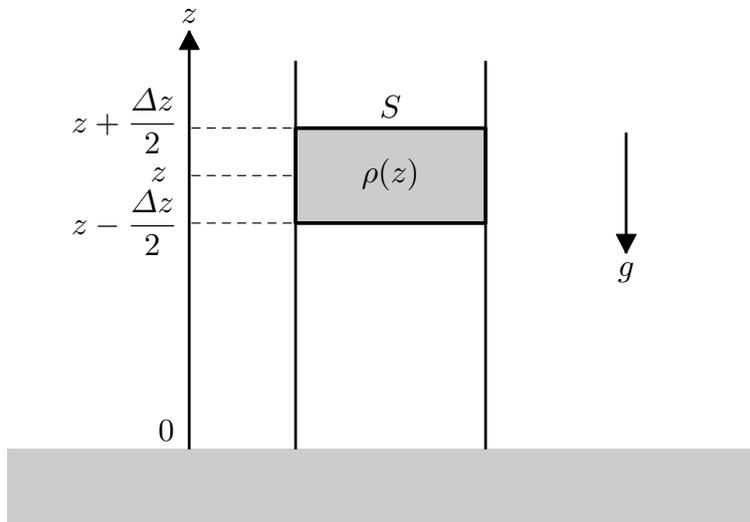


図2.

高度 z の位置の地球大気に, 単位質量あたり z 軸正方向に圧力勾配によって作用する力(これを圧力勾配力という)は,

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dz} \quad (2)$$

と表される。

問1の地球大気の場合と同様に考えて、図3のような原始惑星系円盤の赤道面に垂直な z 方向の気体の静水圧平衡を考える。気体に作用する力は、赤道面 $z=0$ に関して対称である。ここで、円盤を構成している気体は、乱流状態ではなく、円盤の赤道面に平行な面内で円運動しており、円運動している座標系で見ると、気体には赤道面に平行に遠心力が作用する。また、気体には、圧力勾配力の赤道面に平行な成分も作用するが、ここでは無視する(図3)。

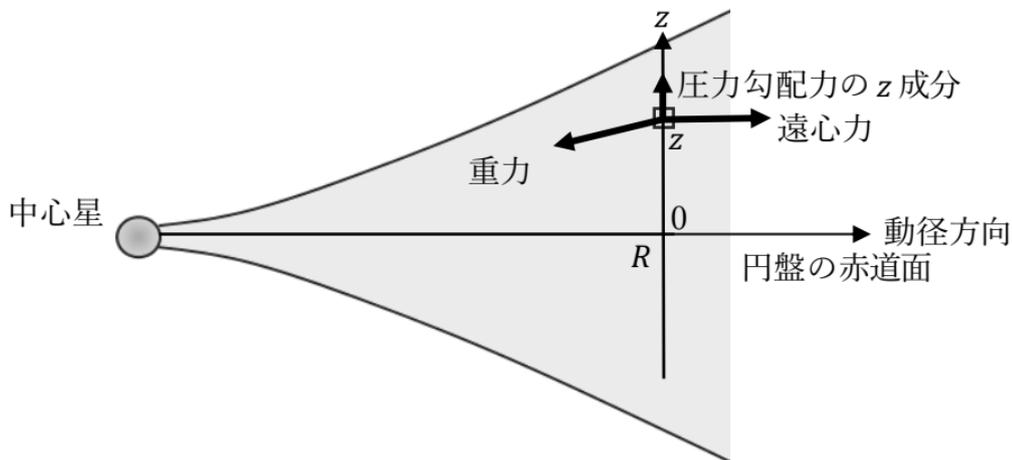


図3. 原始惑星系円盤の気体の静水圧平衡

以下の問2、問3では、ダストを無視し、(理想)気体について考える。

偏微分について

2つの独立変数 x と y の関数 $f(x,y)$ を考える。変数 y を一定にした x に関する微分を、

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$$

変数 x を一定にした y に関する微分を、

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$$

と書き、それぞれ関数 $f(x,y)$ の変数 x および y による偏微分という。ここで、微分記号は、通常(常)微分 $\frac{d}{dx}$ の代わりに $\frac{\partial}{\partial x}$ と書き、 ∂ をラウンドディーと読む。偏微分を含む方程式を、偏微分方程式という。

問2 図3のように、円盤の赤道面に垂直方向(z 方向)では、圧力勾配力の z 成分と中心星からの重力の z 成分がつり合う。中心星を原点に円盤に沿った動径方向の距離 R 、円盤に垂直方向の座標 z の点での静水圧平衡を表す式、すなわち、気体の圧力 $P(R,z)$ の、 z についての偏微分を含む方程式を、その点での気体密度 $\rho(R,z)$ 、中心星の質量 M_c 、 R および万有引力定数 G を用いて書き下せ。ただし、 $R \gg z$ として z の1次の項までに近似した方程式を求めよ。

以下の問では、気体の圧力を P 、(絶対) 温度を T 、質量密度を ρ とすると、音速 c_s は、気体の比熱比を γ 、気体の分子の質量を m 、ボルツマン定数を k_B として、

$$c_s = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{k_B T}{m}} \quad (3)$$

と書けることを用いてよい。

問 3 静止したまま動かない質量 M_c の中心星のまわりを、中心星による重力だけを受けて円盤の赤道面内で半径 R の円運動をする物体の角速度（これをケプラー角速度という）を $\omega_K(R)$ とし、円盤内の気体の温度 $T(R)$ は、 z 座標に依存しないとする。

(a) ケプラー角速度 $\omega_K(R)$ を G, M_c, R で表せ。

(b) 問 2 で求めた気体の圧力 $P(R, z)$ の z に関する偏微分方程式から、気体の密度 $\rho(R, z)$ の偏微分方程式

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} = -az \quad (4)$$

を導くことができる。 z によらない係数 a を c_s, γ, ω_K を用いて表せ。

スケールハイトと呼ばれる量 $h(R)$ を、

$$h(R) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{c_s}{\omega_K(R)} \quad (5)$$

で、円盤の質量面密度 $\Sigma(R)$ を、

$$\Sigma(R) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(R, z) dz$$

で定義すると、式 (4) の両辺を z に関して積分することにより、気体の密度 $\rho(R, z)$ を、

$$\rho(R, z) = \rho(R, 0) \exp \left[-\frac{z^2}{2h(R)^2} \right] \quad (6)$$

と求めることができる。ここで、指数関数 e^x を $\exp(x)$ と書き表した。

(c) 横軸に無次元化した座標 $\hat{z} = \frac{z}{h(R)}$ 、縦軸に無次元化した気体密度 $\hat{\rho}(\hat{z}) = \frac{\rho(R, \hat{z})}{\rho(R, 0)}$ をとって式 (6) のグラフの概形を描き、スケールハイト $h(R)$ の意味を簡単に述べよ。

ダストの温度

中心星の周囲にダストが 1 個だけ存在している場合を考える。ダストに単位時間に加えられる熱量を Γ 、ダストが単位時間に放出する熱量を Λ とすると、ダストが温度一定の熱平衡状態にあるとき、

$$\Gamma = \Lambda \quad (7)$$

が成り立つ。

ダストは、中心星からの電磁波の放射エネルギーだけをすべての波長にわたって吸収して加熱される黒体であるとする。温度 T の黒体から単位面積あたり、単位時間あたりに放射される電磁波のエネルギー I は、

$$I = \sigma_{\text{SB}} T^4 \quad (8)$$

と表される。ここで、 σ_{SB} はシュテファン-ボルツマン定数であり、

$$\sigma_{\text{SB}} \doteq 5.67 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$$

で与えられる。

中心星の光度（単位時間あたりに放出される光の全エネルギー）を L ，中心星からダストまでの距離を R ，ダストを半径 r ($\ll R$) の球とする。中心星から放射された全エネルギーは半径 R の球面を通して球の外側の空間に拡散する。ダストはその大円の面積 πr^2 を通過するエネルギーを吸収する。

問 4 熱平衡状態にあるダストの温度 T は、太陽と地球の平均距離を 1 au，太陽の光度（単位時間あたりの放射エネルギー）を L_{\odot} とすると、 T_0 を定数として、

$$T = T_0 \left(\frac{R}{1 \text{ au}} \right)^{\alpha} \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right)^{\beta} \quad (9)$$

と表されることを導き、指数 α と β を簡単な分数で求めよ。

$L_{\odot} = 3.84 \times 10^{26} \text{ W}$ ， $1 \text{ au} = 1.50 \times 10^{11} \text{ m}$ であり、これらの数値を用いると、 $T_0 \doteq 2.8 \times 10^2 \text{ K}$ となることがわかる。この温度 T_0 は、太陽系における地球近傍でのダストの温度を与える。

原始惑星系円盤の厚み

問 5 円盤を構成している気体（理想気体とみなされる）の温度は、熱平衡状態でダストの温度に等しくなると考えられる。

(a) 光度 L の中心星から距離 R の位置での音速は、 c_0 を定数として、

$$c_s = c_0 \left(\frac{R}{1 \text{ au}} \right)^b \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right)^c$$

と表されることを導き、指数 b, c をそれぞれ簡単な分数で求めよ。

(b) 中心星から距離 R の位置での円盤のスケールハイトを $h(R)$ とすると、無次元量 $\frac{h(R)}{R}$ は、 K を定数として、

$$\frac{h(R)}{R} = K \left(\frac{R}{1 \text{ au}} \right)^d \left(\frac{M_c}{M_{\odot}} \right)^e \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right)^f \quad (10)$$

と表されることを導き，指数 d, e, f をそれぞれ簡単な分数で求めよ。ただし $M_{\odot} = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$ は太陽の質量である。

気体を中性水素分子気体とし，問 4 およびここで与えた数値を用いると，中心星を太陽 ($M_c = M_{\odot}, L = L_{\odot}$) とすると，地球の位置 ($R = 1 \text{ au}$) では，

$$\frac{h}{R} \doteq 3.6 \times 10^{-2}$$

となる。これより，この気体円盤は薄いことがわかる。

§ 2 気体とダストの運動

§ 1 では考えてこなかった赤道面に平行な方向の気体とダストの力学的平衡を考える。

原始惑星系円盤を構成している気体とダストは中心星から重力を受けて，中心星のまわりに円運動をしている。そのとき，一般にダストの方が気体より回転角速度は大きく，ダストは気体から抵抗力を受けて次第にその角速度（角運動量）を減少させ，中心星に向けて落下するようになる。ここでは，ダストと気体との抵抗力が無視できるとすると，それらの角速度の間にどの程度の差が生じるかを考える。

問 6 円盤の赤道面上で，中心星のまわりを半径 R ，角速度 ω で円運動している気体を考える。円運動している座標系で見ると，ダストには中心星からの重力と遠心力だけが作用するが，気体には中心星からの重力と遠心力に加えて，赤道面に平行な方向（動径方向）の圧力勾配による力が作用する。

- (a) 中心星から距離 R の点での気体の圧力を $P(R)$ ，質量密度を $\rho(R)$ とするとき，その点で角速度 ω の円運動をしている単位質量あたりの気体の動径方向の運動方程式（回転座標系での遠心力，重力，圧力勾配力の力のつり合いの式）を， $R, \omega, \rho(R)$ ，ケプラー角速度 ω_K ，および動径方向の圧力勾配 $\frac{dP}{dR}$ を用いて書き下せ。
- (b) 正の無次元微小量 η を用いると，中心星から距離 R の位置での気体の角速度 ω を，

$$\omega \doteq \omega_K (1 - \eta) \quad (11)$$

と書くことができる。 η を c_s, v_K, P, R ，圧力勾配 $\frac{dP}{dR}$ および比熱比 γ を用いて表せ。ここで， c_s, v_K, P はそれぞれ中心星から距離 R の位置での音速，ケプラー速度（ケプラー角速度で中心星のまわりを回転している物体の速さ），気体の圧力であり，近似公式 (1) ($\alpha = \frac{1}{2}$) を用いよ。

圧力勾配を $\frac{dP}{dR} = -\frac{P}{R}$ と仮定し， $M_c = M_{\odot}, L = L_{\odot}$ とすると， $R = 1 \text{ au}$ における η の値は，問 6 (b) の結果より， 1×10^{-3} ($\ll 1$) 程度となることがわかる。

§ 3 原始惑星系円盤内での微惑星の形成

太陽系などの惑星系では、地球、火星、金星、水星という岩石惑星、木星や土星といった巨大ガス惑星、さらに天王星、海王星という氷惑星が存在する。しかし、原始惑星系円盤において、このような大きな惑星が微小なダストからどのようにして形成されるのか、現在までのところ十分に理解されていない。

円盤内で中心星のまわりを周回運動しているダストは、ダストサイズが非常に小さい間は気体からの（単位質量あたりの）抵抗力が非常に大きく、気体とほぼ同じ速さで中心星のまわりを周回している。衝突合体してダストがセンチメートルサイズまで大きくなると、気体からはたらく（単位質量あたりの）抵抗力は小さくなり、気体とは独立に運動するようになる。そうすると、中心星からの重力の z 成分により、ダストは次第に円盤の赤道面上に沈殿していく。その結果として赤道面上でダストの密度が増加する（図 4a）。ダストの密度が増加すると、ダストどうしの衝突が頻繁に起こり合体してさらに成長し、ダストはメートルサイズまで大きくなる。メートルサイズのダストの周回角速度は ω_K より小さいため、中心星から作用する重力は遠心力より大きく、ダストは中心星に向けて落下する。そのため、ダストはキロメートル・サイズの微惑星に成長することができないと考えられてきた。

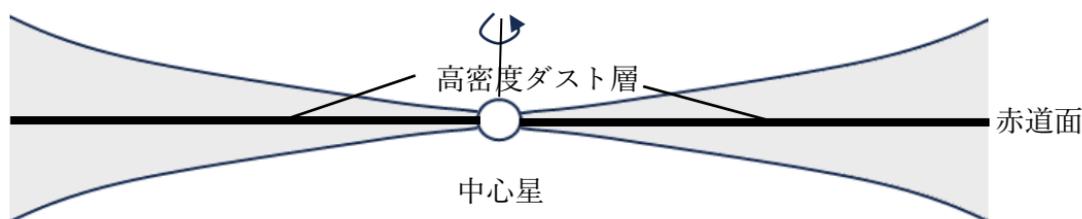


図 4a. 原始惑星系円盤赤道面上に形成された高密度のダスト層

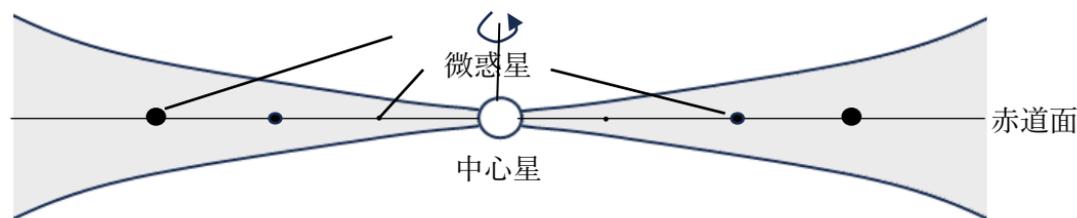


図 4b. 原始惑星系円盤赤道面上に形成された微惑星

そのような中で、赤道面上に沈殿したセンチメートルサイズのダストには、自己重力（ダスト自身の重力）による不安定性のために凝縮が起こり、メートルサイズの危険な領域を一気に飛び越えてキロメートル・サイズの微惑星に成長することができるであろうという考えが提出された*¹。ひとたびキロメートル・サイズの微惑星が形成されれば（図 4b）、気体からの（単位質量あたりの）抵抗力は非常に小さくなり、このサイズの微惑星はほぼケプラー角速度 ω_K

*¹ ただし、実際にキロメートルサイズの微惑星が形成できるかどうかについてはいろいろな議論があり未解決である

で中心星のまわりを周回する。その結果、微惑星は気体を吸収したり、微惑星どうしの衝突などで、さらに大きな月レベルの大きさの原始惑星を形成し、現存する太陽系のいろいろな惑星も形成可能であろうと考えられている。

以下で、ダストが自己重力により収縮して微惑星を生成する可能性を考える。

問 7 図5のように、質量 m 、半径 r の球状の微惑星が、質量 M_c の球状の中心星の中心 C から距離 R の円軌道上を周回している。ここで、 $m \ll M_c$ とし、中心星は動かないとする。微惑星の自転は公転と同期しており、自転周期と公転周期は等しいとする。このとき、ある瞬間に、微惑星の中で点 C から最も離れた点 A は、その後もつねに点 C から最も遠く離れていることになる。中心星と微惑星の変形は無視できるとする。中心星および微惑星の質量は、どちらもそれぞれの星の中心のまわりに球対称に分布しており、中心星と微惑星がそれらの表面および外部の物体に及ぼす万有引力と、外部の物体が中心星と微惑星に及ぼす万有引力は、中心星と微惑星の質量が、それらの中心の1点に集中しているとして求めることができる。

以下の問 (a), (b) では、中心星の中心 C のまわりを、微惑星上の点 A と共に角速度 ω_K で回転する座標系で考える。

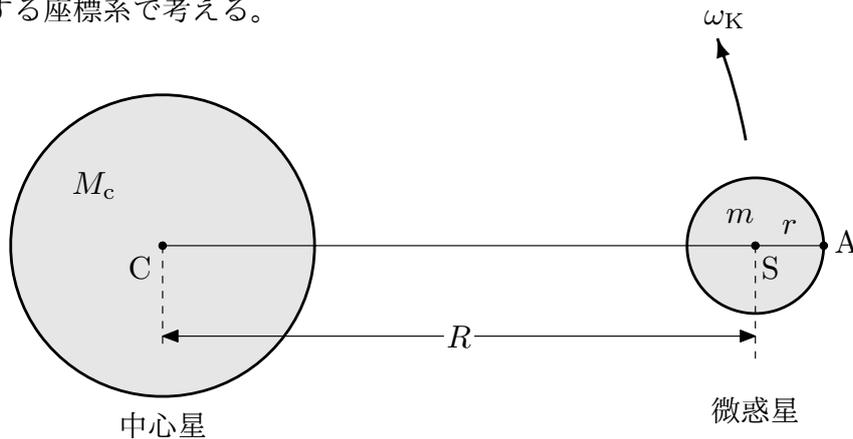


図5. 中心星と微惑星

- (a) 点 C から最も離れた微惑星上の点 A で、中心星から単位質量あたりにはたらく万有引力と遠心力の、微惑星の中心 S から離れる向きの合力 F を、 $\frac{r}{R} \ll 1$ として r の1次の項までの近似で求めよ。
- (b) 前問 (a) で求めた単位質量あたりの合力の大きさ F が、微惑星 S から作用する万有引力の大きさを超えない限り、 S は破壊されない。破壊されないための微惑星 S の平均密度 ρ の下限値 ρ_R (これをロッシュ密度という) を、 R と M_c を用いて求めよ。

凝縮して微惑星が形成される条件は、一般的な考察により、

$$Q = \frac{c_s \omega_K}{\pi G \Sigma} < 1$$

と書けることが知られており、 Q はトゥーモレ (Toomre) の Q 値と呼ばれている。 Σ は円

盤の質量面密度である。ここで、数係数 $\sqrt{\gamma}$ を無視するとその条件は、

$$Q = \frac{\omega_K^2 h}{\pi G \Sigma} < 1 \quad (12)$$

と表される*2。

先に、問5で求めた気体円盤の厚みは「薄い」と述べたが、条件(12)を満たす円盤の厚みは非常に薄く、気体円盤の厚みは条件(12)を満たさない*3。一方、円盤内のダストのサイズがセンチメートル程度に成長すると、中心星から受ける重力の z 成分によって円盤の赤道面 ($z = 0$) に静かに沈殿し、ダストが円盤状に分布する。円盤状に分布したダストからなる円盤(ダスト円盤)は非常に薄くなり、条件(12)を満たす。

気体円盤あるいはダスト円盤の質量面密度 Σ を推定するために、太陽系の惑星の質量を塗りつぶして円盤を作成したと考えてみよう。このようなモデルは太陽系復元モデルと言われる。このモデルにしたがって、中心星から距離 $R = 1 \text{ au}$ での円盤の質量面密度 Σ を、地球の質量 $M_{\oplus} \doteq 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$ を用いて簡単に、

$$\Sigma = \frac{M_{\oplus}}{\pi R^2} \quad (13)$$

とみなす。

問8 本問8では、円盤の質量面密度を与える式(13)を用いよ。また必要に応じて、 $M_{\odot} = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$ 、 $M_{\oplus} = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$ を用いよ。

- (a) 微惑星形成条件(12)を満たす円盤の値 $\frac{h}{R}$ の $R = 1 \text{ au}$ での上限値を、地球質量 M_{\oplus} と中心星の質量(太陽質量に等しいとする) M_{\odot} を用いて表せ。これより、気体円盤の厚み $\frac{h}{R} \doteq 0.036$ は、条件(12)を満たさないことがわかる。
- (b) ダスト円盤のスケールハイト h が条件(12)を満たすと凝縮が起こる。そのとき、円盤面の面積 $(2\pi h)^2$ 内の質量 $m = \Sigma(2\pi h)^2$ が凝集して微惑星を形成することが知られている。ダスト円盤の値 $\frac{h}{R}$ が上限値で凝縮を起こすとき、形成される微惑星の質量 m_c は地球質量 M_{\oplus} の何倍になるか。有効数字1桁の数値で求めよ。

問8(b)の結果から、形成される質量 m_c の微惑星の半径がキロメートル・サイズになることがわかる。先に述べたように、キロメートル・サイズの微惑星が形成されれば、さらに大きな月レベルの大きさの原始惑星を形成し、現存する太陽系のいろいろな惑星も形成可能であろうと考えられている。

*2 円盤の密度 ρ が、近似的に、

$$\rho = \frac{\Sigma}{h} = \frac{\Sigma}{c_s} \omega_K$$

と書けることを用いると、問7で求められるロッシュ密度の表式から、一般的に求められる微惑星形成条件(12)と無次元の数係数がわずかに異なるだけの結果を得ることができる。

*3 中心星を太陽としたとき、中心星から 1 au の距離でのロッシュ密度を求めると、 $\rho_R \doteq 4 \times 10^{-4} \text{ kg m}^{-3}$ 、さらに太陽系復元モデルを用いて気体円盤の赤道面上での密度を求めると、 $\rho_a \doteq 2 \times 10^{-8} \text{ kg m}^{-3}$ となる。因みに、1気圧、常温での空気密度は $\rho_E \doteq 1 \text{ kg m}^{-3}$ である。