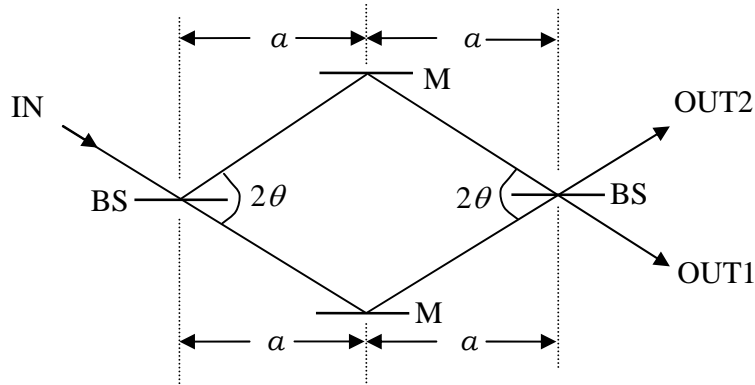


理論問題 1 : 中性子干渉計における重力

答はすべて解答用紙に記入せよ。



BS – ビーム分離器

M – 鏡

図 1a

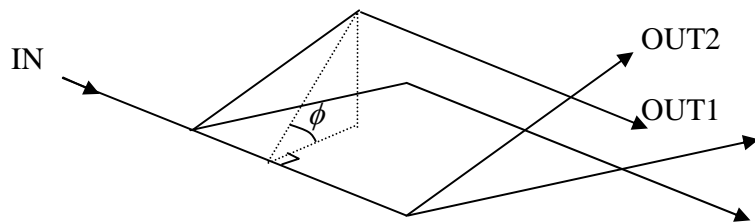


図 1b

コレラ (Collela), オーバーハウザー (Overhauser), ウェーナー (Werner) によって実験された有名な中性子干渉計を考えよう。ここでは、理想的なビーム分離器と鏡をもつ干渉計を用いて中性子のド・ブローイ波に対する重力の影響を調べる。

光学干渉計になぞらえたこの干渉計の概念図を図 1a に示す。中性子は入り口 IN を通って干渉計に入り、示された 2 つの経路を通る。中性子は出口 OUT1 あるいは OUT2 で検出される。2 つの経路はひし形をかたちづくり、ひし形の面積はほぼ数 cm^2 である。干渉計のひし形の経路面が水平であれば、中性子のド・ブローイ波 (波長は 10^{-10} m 程度) は干渉して、すべての中性子が出口 OUT1 から出る。しかし、干渉計が入射中性子線の軸に関して角 ϕ だけ回転すると、2 つの出口 OUT1 と OUT2 から出る中性子の数の分布は ϕ に依存して変化する。

空間的配置 $\phi=0^\circ$ のとき、干渉計のひし形の経路面は水平であり、 $\phi=90^\circ$ のとき、ひし形の経路面は鉛直であり、回転軸上にくる。

1.1	(1.0) 干渉計の2つの経路で囲まれたひし形の面積 A はいくらか。 a 、 θ および ϕ の中で必要なものを用いて表せ。
1.2	(1.0) 回転角が ϕ のとき、回転軸を含む水平面からの出口 OUT 1 の高さ H はいくらか。 a 、 θ および ϕ の中で必要なものを用いて表せ。

波長比 幾何学的な長さ(距離)を波長で割った量を波長比と呼ぶことにし、 N_{opt} と表す。もし、波長 λ が経路によって変わるとき、 N_{opt} は経路に沿った波長の数によって与えられる。

1.3	(3.0) 干渉計が角度 ϕ だけ回転したとき、2つの経路の波長比の差 ΔN_{opt} を求めよ。答は、 a 、 θ 、 ϕ に加え、中性子の質量 M 、入射中性子の波長 λ_0 、重力加速度の大きさ g およびプランク定数 h を用いて表せ。
1.4	(1.0) 体積パラメータ $V = \frac{h^2}{gM^2}$ を導入し、 ΔN_{opt} を A 、 V 、 λ_0 と ϕ だけを用いて表せ。また、 $M = 1.675 \times 10^{-27} \text{ kg}$ 、 $g = 9.800 \text{ m/s}^2$ と $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ Js}$ とするとき、 V の値を求めよ。
1.5	(2.0) 回転角が $\phi = -90^\circ$ から $\phi = 90^\circ$ まで変化するとき、出口 OUT 1 から出る中性子線の強 \rightarrow 弱 \rightarrow 強の変化の回数を求めよ。

実験データ 実際の実験における干渉計では、 $a = 3.600 \text{ cm}$ 、 $\theta = 22.10^\circ$ であり、強弱の回数は19.00回であった。

1.6	(1.0) この実験での λ_0 の大きさはいくらか。
1.7	(1.0) ひし形の経路の面積が異なる同種の干渉計に $\lambda_0 = 0.2000 \text{ nm}$ の中性子線を入射させるとき、強弱の変化の回数が30.00回であったという。このときのひし形の面積 A の値を求めよ。

ヒント：上の設問において、 $|ax| \ll 1$ のとき、 $(1+x)^a \approx 1+ax$ となることを用いよ。

国コード	学生コード	問題番号
		1

解答用紙

空間的配置

1.1 求める面積は,

$$A =$$

1.2 求める高さは,

$$H =$$

For
Examiners
Use
Only

1.0

1.0

国コード	学生コード	問題番号
		1

波長比

<p>1.3 $\alpha, \theta, \phi, M, \lambda_0, g, h$ を用いて表すと,</p> $\Delta N_{\text{opt}} =$	<p>For Examiners Use Only</p> <p>3.0</p>
<p>1.4 A, V, λ_0, ϕ を用いて表すと,</p> $\Delta N_{\text{opt}} =$ <p>V の数値は,</p> $V =$	<p>0.8</p> <p>0.2</p>
<p>1.5 -90° から 90° までの変化の回数は,</p> <p>変化の回数 =</p>	<p>2.0</p>

国コード	学生コード	問題番号
		1

実験データ

1.6 ド・ブロイ波長は,

$$\lambda_0 =$$

1.7 求める面積は,

$$A =$$

For
Examiners
Use
Only

1.0

1.0

理論問題 1 : 中性子干渉計における重力 【解答】

空間的配置 : ひし形の各辺の長さは $L = \frac{a}{\cos \theta}$ であり, 相対する平行な辺の間の距離

は, $D = \frac{a}{\cos \theta} \sin 2\theta = 2a \sin \theta$ である。

1.1 ひし形の面積は, $A = LD = \underline{2a^2 \tan \theta}$

1.2 角 ϕ だけ傾けたとき, 入り口 IN からの出口 OUT1 の高さ H は,

$$H = D \sin \phi = \underline{2a \sin \theta \sin \phi}$$

波長比

1.3 IN と OUT につながった長さ L の 2 辺のみが重要である。IN への入射中性子のド・ブローイ波長を λ_0 , OUT1 からの出射中性子のド・ブローイ波長を λ_1 とすると, 波長比の差は,

$$\Delta N_{\text{opt}} = \frac{L}{\lambda_0} - \frac{L}{\lambda_1} = \frac{a}{\lambda_0 \cos \theta} \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right)$$

入射中性子と出射中性子の運動量は, それぞれ $\frac{h}{\lambda_0}$, $\frac{h}{\lambda_1}$ であるから, 力学的エネルギー保存則より,

$$\frac{1}{2M} \left(\frac{h}{\lambda_0} \right)^2 = \frac{1}{2M} \left(\frac{h}{\lambda_1} \right)^2 + MgH$$

$$\therefore \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \sqrt{1 - 2 \frac{gM^2}{h^2} \lambda_0^2 H}$$

ここで, 波長の変化は十分小さいと考えられる。よって, $\frac{gM^2}{h^2} \lambda_0^2 H \ll 1$ より,

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = 1 - \frac{gM^2}{h^2} \lambda_0^2 H$$

となり, 波長比の差は,

$$\Delta N_{\text{opt}} = \frac{a}{\lambda_0 \cos \theta} \frac{gM^2}{h^2} \lambda_0^2 H = \underline{2 \frac{gM^2}{h^2} a^2 \lambda_0 \tan \theta \sin \phi}$$

1.4 ΔN_{opt} を $V = \frac{h^2}{gM^2}$ と $A = 2a^2 \tan \theta$ を用いて表すと,

$$\Delta N_{\text{opt}} = \underline{\frac{\lambda_0 A}{V} \sin \phi}$$

となり, V を数値で表すと,

$$V = 1.597 \times 10^{-14} \text{ m}^3$$

- 1.5 2つの経路の波長比の差が整数 ($\Delta N_{\text{opt}} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) のとき, 干渉により OUT 1 における強度は極大になり, 波長比の差が半整数 ($\Delta N_{\text{opt}} = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}, \dots$) のとき, OUT 1 における強度は極小になる。 ϕ が $\phi = -90^\circ$ から $\phi = 90^\circ$ までかわると, 波長比の差は, $\Delta N_{\text{opt}} \Big|_{\phi=-90^\circ}^{\phi=90^\circ} = \frac{2\lambda_0 A}{V}$ となるから, 求める強 \rightarrow 弱 \rightarrow 強の回数は,

$$\Delta N = \frac{2\lambda_0 A}{V}$$

- 1.6 実験データより, $A = 10.53 \text{ cm}^2$ となることを用いて,

$$\lambda_0 = \frac{V}{2A} \Delta N = \underline{1.441 \times 10^{-10} \text{ m}}$$

- 1.7 $A = \frac{V}{2\lambda_0} \Delta N = \underline{11.98 \times 10^{-4} \text{ m}^2}$