理論問題 3

理論問題 3 は，独立した 5 つの小問から成る。各問は、数値の正確な値ではなく，およその大きさだけを問うている。解答は，すべて解答用紙に書きなさい。

デジタルカメラ　デジタルカメラでは、スチールカメラでのフィルムの位置に CCD チップが設置されており，レンズで縮小された像が記録される。一辺の長さ L = 35 mm の正方形をした CCD チップを考える。それは、N_p = 5 Mpix (1 Mpix = 10^6 pixels)のピクセル（画素）を持っている。つまり，$\sqrt{N_p}\times\sqrt{N_p}$ のピクセルを持っている。このカメラのレンズの焦点距離は f = 38 mm である。F 値と呼ばれる絞り値（2, 2.8, 4, 5.6, 8, 11, 16, 22） がレンズには書かれているが、それを $F\#$ と表記し、それは、レンズの焦点距離 f と絞りの直径 D との比 $F\# = f/D$ で定義される。

3.1　絞りを最大にしたレンズで得られる CCD チップ面における最良の空間分解能 $\Delta x_{\min}$ を求めよ。その答えを光の波長 λ と F 値を用いて表せ。また、λ = 500 nm としたとき、その数値を計算せよ。(配点 1.0 点)

3.2　上で求めた最良の分解能に対応する大きさのピクセルを持つときの画素数 N を Mpix 単位で求めよ。(0.5 点)

3.3　写真家は、ときとして最小の直径の絞りでカメラを使って写真をとろうとする。いま、ピクセル数 N_p= 16 Mpix で CCD チップのサイズおよびレンズの焦点距離が上に与えられた値のカメラがある。画像の品質が光学的に制限されないための最小の F 値を求めよ。 (0.5 点)

3.4　人間の眼の角度分解能はおよそ ϕ = 2 arcsec である。また、普通のプリンターは、300 dpi (dots per inch)の細かさでプリントアウトする。このとき、プリントアウトされた画像を眼から距離 z だけ離してみると、画像中のドットが分離して見えなくなる。その最小の距離 z を求めよ。(0.5 点)

<u>データ</u>　1 inch = 25.4 mm
1 arcsec = 2.91×10^{-4} rad

固ゆで卵（Hard-boiled egg）冷蔵庫内の温度$T_0 = 4°\mathrm{C}$の冷蔵庫から1個の卵を取り出し、温度T_1で沸騰しているお湯のなかに入れた。

3.5 この卵が凝固するのに必要なエネルギーUを求めよ。(配点 0.5 点)

3.6 入れた瞬間に卵に流れ込む熱流Jを求めよ。(0.5 点)

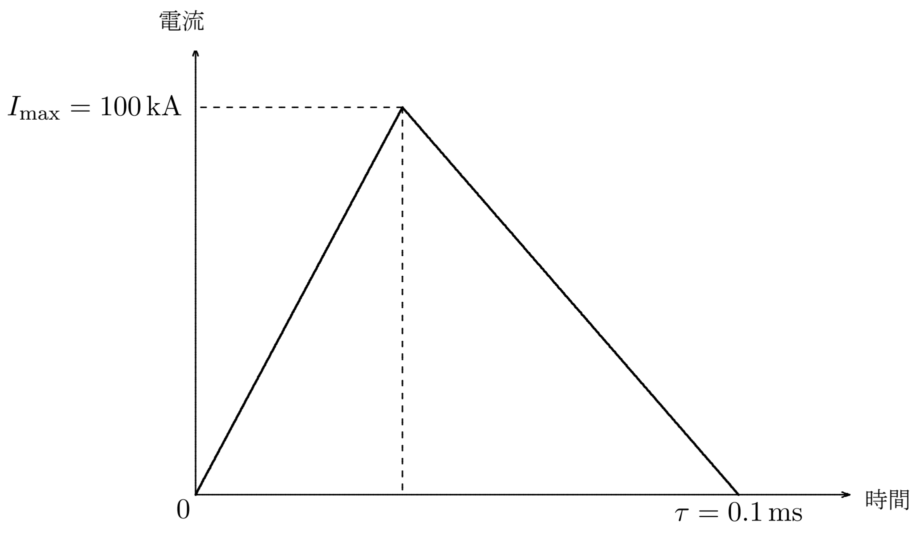
3.7 単位時間あたりに卵へ流れ込む熱エネルギーPを求めよ。(0.5 点)

3.8 固ゆで卵にするには、ゆでききる時間をどのくらいにしなければならないか。(0.5 点)

ヒント　熱流に関する簡単化されたフーリエの法則$J = \kappa \Delta T / \Delta r$を使いなさい。ここで、$\Delta T$は距離$\Delta r$離れたところでの温度差であり、この問題では$\Delta r$は卵の半径である。熱流$J$の単位は$\mathrm{W/m^2}$である。

データ　卵の密度: $\mu = 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$
卵の比熱: $C = 4.2\ \mathrm{J/g \cdot K}$
卵の半径: $R = 2.5\ \mathrm{cm}$
卵のたんぱく質の凝固温度: $T_c = 65°\mathrm{C}$
熱伝導率: $\kappa = 0.64\ \mathrm{W/m \cdot K}$ (卵のたんぱく質が凝固する前と後で等しいとする)

稲妻　稲妻の非常に簡単化したモデルを考える。稲妻は、雲の中に電荷が蓄積されておこる。雲の下部が正に帯電され、雲の上部が負に帯電される。雲の下の地面は負に帯電する。このときできる電場が空気の限界電場を超えるほどに強くなると、突然、大気中に放電が生じる。これが稲妻である。



稲妻が発生したときに雲と地面の間に発生する電流パルスの時間変化。

上の図に示した電流の時間変化と次の値を用いて下の問いに答えよ。

雲の底と地面との距離： $h = 1$ km
湿った空気中の限界電場： $E_0 = 300$ kV/m
地上で１年間に起こる落雷：32 × 10^6 回
世界の総人口：6.5 × 10^9 人

3.9　１回の稲妻によって放射される全電気量Qを求めよ。 (配点 0.5 点)

3.10　稲妻によって雲の底と地面との間を流れる平均電流Ｉはいくらか。 (0.5 点)

3.11　１年間に発生するすべての雷のエネルギーを集め、これをすべての人に等しく分配したとする。そうすると、あなたに分配されたエネルギーによって、100 W の電球をどのくらい長く点灯できるか。 (1.0 点)

毛細血管　血液を非圧縮性の粘性液体と考える。それを、密度を μ、 粘性係数 $\eta = 4.5$ g/sm の水と類似した液体とみなす。毛細血管を、半径 r 、長さ L をもつ直線円筒状の管としてモデル化する。血液の流れは、ポアズイユの法則により、

$$\Delta p = RD$$

と書け、この流体の流れは電流のオームの法則に似ている。ここで、 Δp は毛細血管の出入り口間の圧力差であり、 $D = S\upsilon$ は、断面積 S の毛細血管を血液が速度υで流れるときの体積流である。流体力学的な抵抗 R は、

$$R = \frac{8\eta L}{\pi r^4}$$

で与えられる。血液循環システム（心臓の左心室から右心房へ流れる血液）に対して、静止している人の血流は $D \approx 100$ cm^{3}s^{-1} である。すべての毛細血管は並列に繋がれているとし、それぞれの毛細血管は半径 $r = 4$ μm、長さ $L = 1$ mm とし、圧力差$\Delta p = 1$ kPa ではたらいていると仮定して次の問いに答えよ。

3.12　人間の体内には、何本の毛細血管があるか。 (配点 1.0 点)

3.13　毛細血管を流れる血流の速度 υ はいくらか。 (0.5 点)

超高層ビル　1000 m の高さの超高層ビルがあり、地上での外気温を T_{bot}= 30°C とする。この問題の目的は、このビルの屋上での外気温 T_{top} を求めることである。空気（比熱比 γ =7/5 をもつ理想気体の窒素）の薄い層を考え、その層がゆっくり上昇して、圧力の低い高度 z まで達すると、その空気の層は断熱的に膨張して、周りの空気の温度まで下がると仮定する。

3.14　温度の相対変化 dT/T と圧力の相対変化 dp/p の間の関係を求めよ。(配点 0.5 点)

3.15　高さの変化 dz を用いて、圧力差 dp を表せ。 (0.5 点)

3.16　以上を用いて、このビルの屋上での外気温を求めよ。 (1.0 点)

<u>データ</u>　ボルツマン定数: $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K
窒素分子 1 個の質量: $m = 4.65 \times 10^{-26}$ kg
重力加速度: $g = 9.80$ m/s^2

国コード	生徒コード	問題番号
		3

解答用紙

デジタルカメラ

For Examiners Use Only

3.1　最良の空間分解能　**0.7**

（文字式：）　$\Delta x_{\min} =$

0.3

λ ＝ 500 nm.のとき、これを数値で表す；
（数値：）　$\Delta x_{\min} =$

3.2　Mpix の数値は、　**0.5**

$N =$

3.3　最小のF値は、　**0.5**

$F\# =$

3.4　最小距離は、　**0.5**

$z =$

国コード	生徒コード	問題番号
		3

かたゆで卵

	For Examiners Use Only
3.5 必要なエネルギーは、 $U =$	**0.5**
3.6 熱流は、 $J =$	**0.5**
3.7 単位時間あたりに卵へ流れ込む熱エネルギーは、 $P =$	**0.5**
3.8 卵をかたゆでにするのに必要な時間は、 $\tau =$	**0.5**

国コード	生徒コード	問題番号
		3

稲妻

For Examiners Use Only

3.9 全電荷は、

$Q =$

0.5

3.10 平均電流は、

$I =$

0.5

3.11 電球の点灯持続時間は、

$t =$

1.0

毛細血管

3.12 人体の中にある毛細血管の数は、

$N =$

1.0

3.13 血流の速度は、

$\upsilon =$

0.5

国コード	生徒コード	問題番号
		3

超高層ビル

3.14　温度の相対的変化は、

$$\frac{dT}{T} =$$

3.15　圧力差は、

$$dp =$$

3.16　頂上の温度は、

$$T_{\mathrm{top}} =$$

For Examiners Use Only

0.5

0.5

1.0

理論問題３：小問集合【解答】
デジタルカメラ

カメラの解像度は２つの因子，すなわち口径による回折とピクセル（画素）数によって決まる。口径による回折光の角度幅（固有角分解能）θ_R は，レンズの上端と下端を通って平行に進む回折角 θ の光の光路差が１波長 λ に等しいという条件で決まる（単スリットによる光の回折による角度幅の条件を思い出そう）。よって，

$$D\sin\theta = \lambda$$

ここで，$|\theta| << 1$ として，$\theta \fallingdotseq \dfrac{\lambda}{D}$ となる。いま，レンズの形状が１辺 D の正方形であれば，$\theta_R = \theta$ となるが，口径が直径 D の円であることから，分母の D はやや小さくなり，

$$\theta_R = 1.22\frac{\lambda}{D}$$

となることが知られている。本問では，係数1.22 は付けなくても正解である。

写真を撮るとき，対象物はカメラのレンズから十分遠く離れ，CCD チップはレンズの焦点面（焦点を通り光軸に垂直な面）に置かれている。

3.1 焦点面に置かれたCCD チップ上での最良の空間分解能は，

$$\Delta x_{\min} = f\tan\theta_R \fallingdotseq f\theta_R = \underline{1.22\lambda F\#} \qquad \cdots①$$

ここで，最良の分解能を得る（空間分解能 $\Delta x_{\min}$ を最小にする）ために，F 値として最小のもの $F\# = 2$ をとり，$\lambda = 500\times10^{-9}$ m を用いて，

$$\Delta x_{\min} = \underline{1.22\times10^{-6}\ \mathrm{m}}$$

3.2 正方形の CCD チップの１辺の方向に，分離可能な点を $\dfrac{L}{\Delta x_{\min}}$ 個だけおくことができるから，最良の分解能に対応するピクセル数（画素数）は，

$$N = \left(\frac{L}{\Delta x_{\min}}\right)^2 \approx \underline{823\ \mathrm{Mpix}}$$

3.3 １辺の長さ $L = 35$ mm の CCD チップを用いた $N_0 = 16$ Mpix のカメラを用いると，１辺の方向の空間分解能（隣り合う２点の中心間の距離）は，$l = \dfrac{L}{\sqrt{N_0}}$ であるから，F 値は，①式より，

$$F_0 = \frac{l}{1.22\lambda} = \frac{L}{1.22\lambda\sqrt{N_0}} = 14.34$$

必要なピクセル数をもつ（$N \geq N_0$）ためには，F 値は $F\# \leq F_0$ でなければならないから，

$$F\# = \underline{11}$$

3.4　300 dpi でプリントアウトされた画像の隣り合う２点間の距離は，$l = \dfrac{2.54\times10^{-2}}{300}$ m であるから，これが分離して見えなくなる限界の距離 z は，角度分解能 $\phi = 2\times2.91\times10^{-4}$ rad を用いて，

$$z = \frac{l}{\phi} = \underline{1.45\times10^{-1}\ \mathrm{m}}$$

固ゆで卵

3.5　卵全体が凝固する温度になる必要があるので，温度上昇は，

$$\Delta T = T_c - T_0 = 65 - 4 = 61\ ℃$$

卵の体積 $\frac{4}{3}\pi R^3$ を用いて，加えるべきエネルギーは，

$$U = \mu\frac{4}{3}\pi R^3 C\Delta T = \underline{1.68\times10^4\ \mathrm{J}}$$

3.6　卵と沸騰しているお湯の温度差は，$\Delta T = 100 - 4 = 96$ ℃，$\Delta r = R$ として，フーリエの法則より，

$$J = \kappa\Delta T / R = \underline{2.46\times10^3\ \mathrm{W/m^2}}$$

3.7　熱湯から流れ込む熱量は，卵の表面の面積全体から一様に流れ込むとして，

$$P = 4\pi R^2 J = \underline{19.3\ \mathrm{W}}$$

3.8　卵がゆで上がるまでの時間は，

$$\tau = \frac{U}{P} = \underline{870\ \mathrm{s}} = \underline{14.5\ \mathrm{min}}$$

稲妻

3.9　放電される全電気量は，図の三角形の面積より，

$$Q = \frac{1}{2} I_{\max}\tau = \underline{5\ \mathrm{C}}$$

3.10　平均電流は，

$$I = \frac{Q}{\tau} = \underline{50\ \mathrm{kA}}$$

3.11　雷が発生する直前に蓄えている静電エネルギーは $\frac{1}{2}QE_0h = 7.5\times10^8$ J であり，このエネルギーが１回の雷で放電されると考えられる。したがって，１年間に発生する雷の全エネルギーを全人口でわり，100 W の電球を点灯する時間に換算すると，

$$t=7.5\times10^{8}\times\frac{32\times10^{6}}{6.5\times10^{9}}\times\frac{1}{100}=\underline{3.69\times10^{4}\ \mathrm{s}}=\underline{10.3\ \mathrm{h}}$$

毛細血管

長さ$L=1\times10^{-3}$ m，半径$r=4\times10^{-6}$ m の毛細血管を流れる血流の抵抗Rは，

$$R=\frac{8\eta L}{\pi r^{4}}=4.48\times10^{16}\ \mathrm{kg/m^{4}\cdot s}$$

3.12　ポアズイユの法則より，全抵抗は，

$$R_{\mathrm{all}}=\frac{\Delta p}{D}=10^{7}\ \mathrm{Pa\cdot s/m^{3}}$$

同じN本の抵抗が並列に接続されると，合成抵抗は$\dfrac{1}{N}$倍になるから，

$$R_{\mathrm{all}}=\frac{R}{N}\quad\therefore\quad N=\frac{R}{R_{\mathrm{all}}}=\underline{4.48\times10^{9}}\ \text{本}$$

3.13　人の血流$D=100\ \mathrm{cm^{3}/s}=10^{-4}\ \mathrm{m^{3}/s}$は，並列に繋がれた$N$本の毛細血管の血流の和であるから，１本の毛細血管の断面積$\pi r^{2}=5.03\times10^{-11}\ \mathrm{m^{2}}$を用いて，

$$\upsilon=\frac{D}{N\cdot\pi r^{2}}=\underline{4.44\times10^{-4}\ \mathrm{m/s}}=\underline{0.444\ \mathrm{mm/s}}$$

超高層ビル

3.14　体積Vのnモルの理想気体の状態方程式より，

$$pV=nRT,\quad (p+dp)(V+dV)=nR(T+dT)$$

$$\therefore\quad \frac{dp}{p}+\frac{dV}{V}=\frac{dT}{T}\qquad\cdots①$$

断熱変化する理想気体の熱力学第１法則より，定積モル比熱をC_vとして，

$$0=nC_v dT+pdV\qquad\cdots②$$

①，②式よりdVを消去し，定圧モル比熱をC_pとして，

$$C_p-C_v=R,\quad \gamma=\frac{C_p}{C_v}$$

を用いると，

$$\underline{\frac{dT}{T}=\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{dp}{p}}$$

（別解）

ポアソンの関係式「$pV^{\gamma}=$一定」と状態方程式よりVを消去して，

$$\frac{T^{\gamma}}{p^{\gamma-1}}=\text{一定},\quad\therefore\quad T^{\gamma}\propto p^{\gamma-1}\qquad\cdots③$$

③式の両辺をTで微分すると，

$$\gamma T^{\gamma-1}\propto(\gamma-1)p^{\gamma-2}\frac{dp}{dT}\qquad\cdots④$$

③÷④より，

$$\frac{1}{\gamma}T=\frac{1}{\gamma-1}p\frac{dT}{dp} \quad \therefore \quad \underline{\frac{dT}{T}=\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{dp}{p}} \qquad \cdots ⑤$$

3.15 単位断面積で高度差 dz の円柱中の窒素分子数を N_n とすると，円柱中の窒素ガスにはたらく力のつり合いは，

$$p(z)=p(z+dz)+N_n mg$$

よって， $dp=p(z+dz)-p(z)$ とおいて，

$$dp=-N_n mg \qquad \cdots ⑥$$

この窒素ガスの状態方程式は，アボガドロ数を N_A として，

$$p\cdot dz=\frac{N_n}{N_\mathrm{A}}RT=N_n kT \qquad \cdots ⑦$$

⑥÷⑦式より，

$$\underline{dp=-\frac{mg}{k}\frac{p}{T}dz} \qquad \cdots ⑧$$

3.16 ⑤，⑧式より， $\dfrac{dp}{p}$ を消去して，

$$dT=-\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{mg}{k}dz$$

よって，高度差 $H=1000\ \mathrm{m}$ を用いて，

$$T_\mathrm{top}=T_\mathrm{bot}-\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{mg}{k}H$$

$$=\underline{20.6\ ℃}$$