Blue

物理学では，等式の関係式（方程式）があるときには，その両辺は同じ種類の物理量，すなわち，同じ次元をもつ量でなければならない。例えば，方程式の右辺の物理量が長さを表し，左辺の物理量が時間を表すというような状況はあってはならない。この事実を用いると，問題を解析的に解くことをしなくても，物理学の関係式をおおよそ導くことができる。例えば，一定の重力加速度gのもとで高さhのところから物体が落下するのに要する時間を論じるには，量gとhを用いて時間を表す量を組み立てるだけで十分であり，それを満たすのは$T=a(h/g)^{1/2}$以外にないのである。この答に含まれるaは未定の係数である。aは無次元量であってこの方法だけでは決定することはできない。この係数は実数で，$1, 1/2, \sqrt{3}, \pi$, などあらゆる可能性がある。このようにして物理的関係式をもとめる方法は「次元解析」と呼ばれる。次元解析では，無次元の係数は重要ではないので，それを書く必要はない。うまいことに，大部分の物理学の問題では，この係数は1程度の量であるから，それを省略しても，物理量の大きさの程度が変わることはない。したがって，上記の問題に次元解析を適用すると，$T=(h/g)^{1/2}$が得られる。

一般には，物理量の次元は，M（質量），L（長さ），T（時間），K（温度）という四つの基本量の次元によって表される。任意の量xの次元は，$[x]$で表される。例として，速度v，運動エネルギーE_k，熱容量C_Vの次元を表すと，$[v]=LT^{-1}, [E_k]=ML^2T^{-2}, [C_V]=ML^2T^{-2}K^{-1}$となる。

1　基本定数と次元解析

1.1	物理学の基本定数の次元を求めよ。すなわち，プランク定数h，光速c，万有引力定数G，ボルツマン定数k_Bの次元をそれぞれ，長さ，質量，時間，温度の次元で表せ。	0.8

シュテファン=ボルツマンの法則によれば，黒体の表面の単位面積から単位時間に放射されるエネルギーは黒体放射強度と呼ばれ，$\sigma\theta^4$に等しい。ここで，σは「シュテファン=ボルツマン定数」と呼ばれ，θは黒体の絶対温度である。

1.2	シュテファン=ボルツマン定数の次元を，長さ，質量，時間，温度の次元を用いて表せ。	0.5

シュテファン=ボルツマンの定数は基本定数ではなく，基本定数の組合わせによって表すことができる。すなわち，$\sigma=a h^{\alpha}c^{\beta}G^{\gamma}k_B^{\delta}$と書くことができる。この関係式で$a$の値はわれわれの観点からは重要ではないので，1とおくことにしよう。

1.3	次元解析を用いて，$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を求めよ。	1.0

2　ブラックホールの物理

ここでは，次元解析でブラックホールの性質のいくつかを求めてみよう。「無毛仮設」と呼ばれる物理学の定理によると，今考えているブラックホールの特性のいくつかは，ブラックホールの質量だけによって決まる。ブラックホールの特性の一つは，「事象の地平」の面積である。大まかにいうと，事象の地平とはブラックホールの境界のことである。この境界の内側では重力があまりにも強いので，境界の内側から光は出ることができない。

ブラックホールの質量 m と事象の地平の面積 A との関係を求めよう。この事象の地平の面積はブラックホールの質量，光速，万有引力定数に依存する。設問 1.3 のように $A = G^{\alpha} c^{\beta} m^{\gamma}$ と書くことにする。

2.1	次元解析を用いて α, β, γ を求めよ。	0.8

この結果から，ブラックホールの事象の地平の面積はブラックホールの質量の増加とともに増加することが明らかになる。古典的な観点からは，ブラックホールからは何も出て来ないので，すべての物理過程において質量は増加し，事象の地平の面積は増加するだけである。熱力学の第二法則との類推から，ベーケンシュタインは，ブラックホールのエントロピーは，その事象の地平の面積に比例するということを提案した。すなわち，エントロピー S に対して，$S = \eta A$ とした。この推測は，他の議論からももっともらしいと考えられるようになった。

2.2	熱力学ではエントロピー S は，その変化分 dS についての関係式 $dS = dQ/\theta$ によって定義される。ここで，dQ は流入する熱量であり，θ はその系の絶対温度である。この定義を用いて，エントロピーの次元を求めよ。	0.2

2.3	設問 1.3 と同様に，次元をもつ量 η を基本定数 h, c, G, k_B を用いて表せ。	1.1

以下の節では，次元解析を用いないこと。しかし，これまで得られた結果を用いてもよい。

3　ホーキング放射

半量子論的方法によって，ホーキングは，放射が無いとする古典的な観点とは反対に，ブラックホールは，「ホーキング温度」と呼ばれる温度における黒体放射と同じように放射をしていると考えた。これから考えるモデルでは，ブラックホールは外界に対して仕事をしない黒体であると仮定している。

3.1	ブラックホールのエネルギーを質量で与える式$E = mc^2$と熱力学の法則（第一法則とエントロピーと熱との関係）より，ブラックホールのホーキング温度θ_Hを，ブラックホールの質量と基本定数を用いて表せ。ブラックホールは周囲に対して仕事をしないものとする。	0.8

3.2	孤立したブラックホールの質量は，ホーキング放射によって，変化する。シュテファン=ボルツマンの法則を用いて，ブラックホールの単位時間あたりの質量変化がホーキング温度θ_Hにどのように依存するかを求め，それをブラックホールの質量と基本定数によって表せ。	0.7

3.3	質量mの孤立したブラックホールが完全に蒸発するまで，すなわち質量を失うまでにかかる時間t^*を求めよ。	1.1

熱力学の観点から，ブラックホールはある奇妙な挙動を示す。例えば，ブラックホールの熱容量は負となる。

3.4	質量mのブラックホールの熱容量を求めよ。	0.6

4　ブラックホールと宇宙の背景放射

ブラックホールが宇宙の背景放射にさらされているとする。宇宙の背景放射は，温度θ_Bの黒体放射であり，全宇宙に広がっている。面積Aをもつ物体は，単位時間に$\sigma\theta_B^4 \times A$のエネルギーを受け取る。したがって，ブラックホールはホーキング放射によってエネルギーを失うが，宇宙の背景放射からエネルギーを受け取る。

4.1	ブラックホールの単位時間あたりの質量変化（質量の時間微分）を，ブラックホールの質量，宇宙の背景放射の温度，基本定数を用いて表せ。	0.8

4.2	ある質量m^*でこの質量変化はゼロとなり，熱平衡状態が実現する。このときのm^*を求め，θ_Bと基本定数を用いて表せ。	0.4

4.3	設問 4.2 の解をθ_Bについて解き，設問 4.1 の解のθ_Bに代入し，ブラックホールの単位時間あたりの質量変化（質量の時間微分）をm, m^*と基本定数で表せ。	0.2

4.4	宇宙の背景放射と熱平衡にあるブラックホールのホーキング温度を求めよ。	0.4

4.5	この熱平衡状態は安定か不安定か？　その理由は？（その理由を数式を用いて述べよ）	0.6

【解答】

1.1) I) 光子のエネルギーの式より，

$$h\nu = E \quad \Rightarrow \quad [h][\nu] = [E] \quad \Rightarrow \quad [h] = [E][\nu]^{-1} = \underline{ML^2T^{-1}}$$

II) $[c] = \underline{LT^{-1}}$

III) $F = \dfrac{Gmm}{r^2} \ \Rightarrow \ [G] = [F][r^2][m]^{-2} = \underline{M^{-1}L^3T^{-2}}$

IV) $E = k_B\theta \ \Rightarrow \ [k_B] = [\theta]^{-1}[E] = \underline{ML^2T^{-2}K^{-1}}$

1.2) シュテファン＝ボルツマンの法則より，単位面積，単位時間あたりのエネルギー$=\sigma\theta^4$と書けるから，

$$[E]L^{-2}T^{-1} = [\sigma]K^4 \Rightarrow [\sigma] = \underline{MT^{-3}K^{-4}}$$

1.3) シュテファン＝ボルツマン定数は，数値的な定数を除いて$\sigma = h^\alpha c^\beta G^\gamma {k_B}^\delta$と表すことができる。そこで，$\alpha,\beta,\gamma,\delta$を次元解析で決めよう。

$[\sigma] = [h]^\alpha [c]^\beta [G]^\gamma [k_B]^\delta$であり，$[\sigma] = MT^{-3}K^{-4}$であるから，

$$MT^{-3}K^{-4} = \left(ML^2T^{-1}\right)^\alpha \left(LT^{-1}\right)^\beta \left(M^{-1}L^3T^{-2}\right)^\gamma \left(ML^2T^{-2}K^{-1}\right)^\delta = M^{\alpha-\gamma+\delta}L^{2\alpha+\beta+3\gamma+2\delta}T^{-\alpha-\beta-2\gamma-2\delta}K^{-\delta}$$

これより，

$$\begin{cases} \alpha-\gamma+\delta=1 \\ 2\alpha+\beta+3\gamma+2\delta=0 \\ -\alpha-\beta-2\gamma-2\delta=-3 \\ -\delta=-4 \end{cases} \Rightarrow \underline{\begin{cases} \alpha=-3 \\ \beta=-2 \\ \gamma=0 \\ \delta=4 \end{cases}} \Rightarrow \quad \sigma = \frac{{k_B}^4}{c^2h^3}$$

2.1) 事象の地平の面積Aは，古典的な相対論的重力理論（一般相対論）から，ブラックホールの質量mを用いて計算される。一般相対論では，特殊相対論の特徴的な定数である光速cと，重力の特徴的な定数である万有引力定数Gが組み合わされる。ただし，量子論の特徴的な 定数であるプランク定数hにはよらない。そこで，

$$A = G^\alpha c^\beta m^\gamma$$

と書くことができる。

次元解析を実行すると，

$$[A] = [G]^\alpha [c]^\beta [m]^\gamma \quad \Rightarrow \quad L^2 = \left(M^{-1}L^3T^{-2}\right)^\alpha \left(LT^{-1}\right)^\beta M^\gamma = M^{-\alpha+\gamma}L^{3\alpha+\beta}T^{-2\alpha-\beta}$$

となる。これより，

$$\begin{cases} -\alpha+\gamma=0 \\ 3\alpha+\beta=2 \\ -2\alpha-\beta=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{\begin{cases} \alpha=2 \\ \beta=-4 \\ \gamma=2 \end{cases}} \quad \therefore \quad A=\frac{m^2G^2}{c^4}$$

2.2) エントロピーの定義 $dS=\dfrac{dQ}{\theta}$ より， $[S]=[E][\theta]^{-1}=\underline{ML^2T^{-2}K^{-1}}$

2.3) $\eta=S/A$ であることから，

$$\begin{cases} [\eta]=[S][A]^{-1}=MT^{-2}K^{-1} \\ [\eta]=[G]^{\alpha}[h]^{\beta}[c]^{\gamma}[k_B]^{\delta}=M^{-\alpha+\beta+\delta}L^{3\alpha+2\beta+\gamma+2\delta}T^{-2\alpha-\beta-\gamma-2\delta}K^{-\delta} \end{cases}$$

となる。これより，

$$\begin{cases} -\alpha+\beta+\delta=1 \\ 3\alpha+2\beta+\gamma+2\delta=0 \\ -2\alpha-\beta-\gamma-2\delta=-2 \\ \delta=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=-1 \\ \beta=-1 \\ \gamma=3 \\ \delta=1 \end{cases} \quad \therefore \quad \eta=\underline{\frac{c^3k_B}{Gh}}$$

3.1) 熱力学第 1 法則は $dE=dQ+dW$ と書ける。題意より， $dW=0$ であり，エントロピーの定義式 $dS=\dfrac{dQ}{\theta}$ より，

$$dE=\theta_H dS+0$$

$\begin{cases} S=\dfrac{Gk_B}{ch}m^2 \\ E=mc^2 \end{cases}$ を用いて， $\theta_H=\dfrac{dE}{dS}=\left(\dfrac{dS}{dE}\right)^{-1}=c^2\left(\dfrac{dS}{dm}\right)^{-1}$ となるから，

$$\theta_H=\underline{\left(\frac{1}{2}\right)\frac{c^3h}{Gk_B}\frac{1}{m}}$$

3.2) シュテファン＝ボルツマンの法則は，単位時間に単位面積から放射されるエネルギーを与える。 $E=mc^2$ および，問 1.3)，2.1)，3.1)の結果より，

$$\begin{cases} dE/dt=-\sigma\theta_H{}^4A \\ \sigma=\dfrac{k_B{}^4}{c^2h^3} \\ A=\dfrac{m^2G^2}{c^4} \\ E=mc^2 \end{cases} \quad \therefore \quad c^2\frac{dm}{dt}=-\frac{k_B{}^4}{c^2h^3}\left(\frac{1}{2}\frac{c^3h}{Gk_B}\frac{1}{m}\right)^4\frac{m^2G^2}{c^4}$$

これより，
$$\underline{\frac{dm}{dt}=-\frac{1}{16}\frac{c^4h}{G^2}\frac{1}{m^2}}$$

3.3) 積分して，

$$\frac{dm}{dt}=-\frac{1}{16}\frac{c^4h}{G^2}\frac{1}{m^2} \quad \Rightarrow \int m^2 dm=-\int\frac{c^4h}{16G^2}dt \quad \Rightarrow m^3(t)-m^3(0)=-\frac{3c^4h}{16G^2}t$$

$t=t^*$ でブラックホールが完全に消滅するとして，

$$m(t^*)=0 \qquad \therefore \quad t^*=\underline{\frac{16G^2}{3c^4h}m^3}$$

3.4) 熱容量 C_V は，温度（＝ホーキング温度）θ（＝θ_H）が変化するときのエネルギー E の変化で与えられる。

$$\begin{cases} C_V=\dfrac{dE}{d\theta} \\ E=mc^2 \\ \theta=\theta_H=\dfrac{c^3h}{2Gk_B}\dfrac{1}{m} \end{cases}$$

よって，
$$\underline{C_V=-\frac{2Gk_B}{ch}m^2}$$

4.1) シュテファン＝ボルツマンの法則より，ブラックホールが単位表面積あたり単位時間に失うエネルギーと，背景放射から単位表面積あたり単位時間に得るエネルギーが与えられる。よって，

$$\begin{cases} \dfrac{dE}{dt}=-\sigma\theta^4A+\sigma{\theta_B}^4A \\ E=mc^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{dm}{dt}=-\frac{hc^4}{16G^2}\frac{1}{m^2}+\frac{G^2}{c^8h^3}(k_B\theta_B)^4m^2$$

4.2) $\dfrac{dm}{dt}=0$ より，
$$-\frac{hc^4}{16G^2}\frac{1}{m^{*2}}+\frac{G^2}{c^8h^3}(k_B\theta_B)^4m^{*2}=0$$

よって，
$$m^*=\underline{\frac{c^3h}{2Gk_B}\frac{1}{\theta_B}}$$

4.3) $\theta_B=\dfrac{c^3h}{2Gk_B}\dfrac{1}{m^*}$ を設問 4.1)の結果に代入して，

$$\frac{dm}{dt}=\underline{-\frac{hc^4}{16G^2}\frac{1}{m^2}\left(1-\frac{m^4}{m^{*4}}\right)}$$

4.4) 背景放射と熱平衡にあるときの温度（ホーキング温度）をθ^*とすると，

$$\frac{dE}{dt} = -\sigma\left(\theta^{*4} - \theta_B{}^4\right)A = 0 \quad \therefore \quad \theta^* = \underline{\theta_B}$$

4.5) 設問 4.3)の結果より，

$$m > m^* \ \Rightarrow \ \frac{dm}{dt} > 0 \quad \text{また，} \quad m < m^* \ \Rightarrow \ \frac{dm}{dt} < 0$$

これより，質量mがm^*から少しでも外れると，つねにm^*から離れる方向へ変化するから，$m = m^*$の熱平衡の状態は<u>不安定</u>であることがわかる。