

理論第3問 高度による気温の変化, 大気の安定と大気汚染

空気の上昇・下降は、雲の発生、降雨、それに大気汚染物質の拡散などの多くの大気現象にかかわっている。大気が安定ならば、上昇・下降は制限されて、大気汚染物質は拡散希釈するよりも、大気汚染物質を放出する場所の付近に蓄積される傾向がある。これに対して、不安定な大気においては、空気の上昇・下降は大気汚染物質の上下方向の拡散を促進する。したがって、汚染物質の濃度は、汚染物質放出源の放出強度だけではなく、大気の安定性にも依存する。

気象学における空気塊（空気のかたまり）の概念を使っての安定性を決定し、大気中で断熱的に上昇下降する空気塊の温度と、その周囲の空気の温度とを比較する。多くの場合、大気汚染物質を含んでいる空気塊が地上から上昇しても、「混合限界」と呼ばれるある高さのところで止まってしまうのである。混合限界が高ければ、それだけ大気汚染の物質濃度は薄いのである。以下で、ハノイ市内領域の混合限界とオートバイが放つ一酸化炭素の濃度を求める。朝のラッシュアワー時のオートバイの一酸化炭素放出については、上下方向の拡散が温度反転（高度とともに温度が上昇する）によって、高さ 119m に制限されるとする。

ここでは、空気は 2 原子分子理想気体とし、そのモル質量は $\mu = 29 \text{ g/mol}$ であるとする。

気体の定圧モル比熱と定積モル比熱の比を $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ とすると、準静的断熱変化は

$pV^\gamma = \text{const.}$ の式に従う。

必要なら以下のデータも用いてもよい。

気体定数は、 $R = 8.31 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$ である。

地上での大気圧は、 $p_0 = 101.3 \text{ kPa}$ とする。

重力加速度は一定で、 $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ とする。

空気の定圧モル比熱は、 $c_p = \frac{7}{2}R$ とする。

空気の定積モル比熱は、 $c_v = \frac{5}{2}R$ とする。

数式に関するヒント

a.
$$\int \frac{dx}{A+Bx} = \frac{1}{B} \int \frac{d(A+Bx)}{A+Bx} = \frac{1}{B} \ln(A+Bx)$$

b. 微分方程式 $\frac{dx}{dt} + Ax = B$ (ただし A と B は定数) の解は $x(t) = x_1(t) + \frac{B}{A}$ と表される。ただし, $x_1(t)$ は, 微分方程式 $\frac{dx}{dt} + Ax = 0$ の解である。

c.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

1. 高度による圧力変化

1.1. 大気の温度は一定で T_0 に等しいとする。高度 z の関数として大気圧 p を表せ。

1.2. 次に, 大気の温度が, 高度によって,

$$T(z) = T(0) - \Lambda z$$

という形で変化しているとする。ここで, Λ は一定で, 気温の断熱減少率と呼ばれる (気温の高度による勾配が $-\Lambda$ となる)。

1.2.1. 高度 z の関数として大気圧 p を表せ。

1.2.2. 高度が上昇するとともに空気の密度が増加するとき, 自由対流と呼ばれる過程が起こる。 Λ がどのような範囲の値であれば, 自由対流が起こるか。

2. 上下方向に移動する空気塊の温度変化

大気中で上下に移動する空気塊を考えてみよう。空気塊は, 数 m 程度の十分な広がりを持ち, 熱力学が成り立つ独立した物体として取り扱えるが, 一方, 温度はその中で一様とみなせるほど小さいとする。空気塊の上下方向の動きは, 準断熱過程として扱える。つまり, 周りの空気との熱の交換はないとみなせる。大気中でこのような空気塊が上昇すると, 膨張し温度が下がる。逆に下降すると, 周囲の圧力増加により空気の塊が圧縮され, その温度が上昇する。

空気塊の大きさはそれほど大きくないので, 空気塊の境界では大気圧はどこでも同じ値 $p(z)$ であるとみなすことができる。ここで z は空気塊の中心の高度である。空気塊の温度は一様で $T_{\text{parcel}}(z)$ である [parcel は「空気塊」を表す英語] が,

一般には周囲の気温 $T(z)$ とは異なる。以下の問題 2.1 と 2.2 では、 $T(z)$ の式にどのような仮定もおかない。

2.1. 空気塊の温度 T_{parcel} の高度による温度変化を $\frac{dT_{\text{parcel}}}{dz} = -G$ と定義する。 G を T と T_{parcel} を用いて表せ。

2.2. 高度 z での気温 T がそこでの空気塊の温度 T_{parcel} に等しい、すなわち、

$T(z) = T_{\text{parcel}}(z)$ が成り立つという特殊な大気の状態を考える。 $T = T_{\text{parcel}}$ での

G の値を Γ とする。すなわち、 $\Gamma = -\frac{dT_{\text{parcel}}}{dz}$ ($T = T_{\text{parcel}}$ という条件の下で) と書く。このとき、 Γ を断熱下降係数と呼ぶ。

2.2.1. Γ を式で表せ。

2.2.2. Γ の数値を求めよ。

2.2.3. 気温 $T(z)$ を高度 z の関数として表せ。

2.3. 気温が、 $T(z) = T(0) - Az$ (A は定数) という関係式に従って、高度によって変化すると仮定する。空気塊の温度 $T_{\text{parcel}}(z)$ を、高度 z を用いて表せ。

2.4. $|Az| \ll T(0)$ かつ $T(0) \approx T_{\text{parcel}}(0)$ のとき、 $T_{\text{parcel}}(z)$ の近似式を求めよ。

3. 大気の安定性

この問 3 では、温度 T は高度に比例して変化すると仮定する。

3.1. はじめに、高度 z_0 で周囲の気温と熱平衡状態にある空気塊を考える。つまり、

その空気塊の温度が周囲の気温 $T(z_0)$ に等しいとする。もし、その空気塊が (例えば乱気流によって) 少し上方または下方に動いた場合、次の 3 つの場合のうちのどれかが起こる :

- その空気塊は元の高さ z_0 に戻る。このとき、この空気塊の平衡状態は安定であり、大気は安定しているという。
- その空気塊はそのまま同じ方向に運動を続けて平衡位置から遠ざかる。このとき、この空気塊は不安定であり、大気は不安定であるという。
- その空気塊は動いた位置にそのまま留まる。このとき、空気塊の平衡位置は高さに依らないわけで、これを大気は中立であるという。

大気が安定になる場合、不安定になる場合、そして、中立になる場合の Λ の条件をそれぞれ求めよ。

3.2. 地上において、空気塊の温度 $T_{\text{parcel}}(0)$ が周囲の気温 $T(0)$ より高い場合を考える。

そうすると、浮力がはたらいってその空気塊は上昇する。このとき、大気が安定な場合において、空気塊にはたらく力が釣り合う最高の高度を与える式を Λ と Γ を用いて表せ。

4. 混合限界

4.1. 表 1 は、11 月のある日、午前 7:00 における、電波気象観測気球により記録されたハノイ上空の気温を表す。高度に対する温度の変化は、近似的に $T(z) = T(0) - \Lambda z$ という線形の式で表される。ここで、三つの層、 $0 < z < 96 \text{ m}$, $96 \text{ m} < z < 119 \text{ m}$, $119 \text{ m} < z < 215 \text{ m}$ において、 Λ の値は異なるとする。

$T_{\text{parcel}}(0) = 22^\circ\text{C}$ で地表から上昇する空気塊を考えよう。

表 1 のデータと上述の線形近似を用いて、96m と 119m の高度における空気塊の温度を計算せよ。

4.2. 空気塊が達することができる最高高度 H と、そのときの空気塊の温度

$T_{\text{parcel}}(H)$ を決定せよ。

H は上昇限界と呼ばれる。地表から放出された大気汚染物質は、(例えば風、乱流および分散により) 大気と混ざり、この高度以内で希釈されうる。

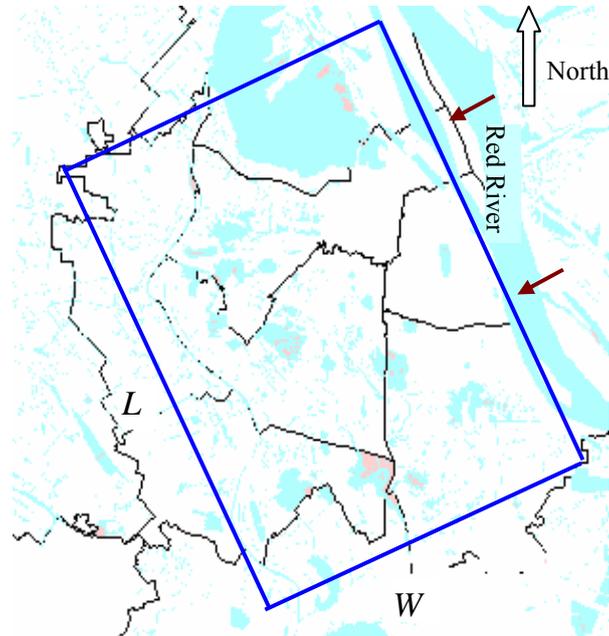
表 1

11月のある日、午前7:00にハノイで電波気象観測用気球によって記録されたデータ。

高度 [m]	温度 [°C]
5	21.5
60	20.6
64	20.5
69	20.5
75	20.4
81	20.3
90	20.2
96	20.1
102	20.1
109	20.1
113	20.1
119	20.1
128	20.2
136	20.3
145	20.4
153	20.5
159	20.6
168	20.8
178	21.0
189	21.5
202	21.8
215	22.0
225	22.1
234	22.2
246	22.3
257	22.3

5. ハノイの朝のオートバイラッシュアワー時の一酸化炭素 (CO) 汚染の評価

ハノイ市街は、レッドリバーの南西岸に沿って一辺をとり、図のような、辺の長さ L と W の長方形のエリアとみなせる。



朝のラッシュアワーの間に (午前 7:00 から 8:00 がそれである), 平均で 5 km 午前 7 時から 8 時迄の朝のラッシュアワーには, 1 km あたり 12 g の CO を放ちながら平均 5km 走行するオートバイが 8×10^5 台, 道路上にあると概算される。CO 汚染物質の量は, ラッシュアワーの間に, 時間あたり一定の割合 M で放射されるとみなせる。同時に, きれいな北東風は, レッドリバーの流れに垂直に (すなわち, 長方形の L の辺に垂直に) 速度 u で吹き, 同じ速度で市街を通過し, 市街の大気から CO で汚染された空気の一部を運び出す。

また, ここでは, 次の近似モデルを使う :

- ハノイ市街の CO は, 混合層の全体積にすばやく広がる。そのため, 時刻 t における CO 濃度 $C(t)$ は, L , W および高さ H の直方体わたって一定とみなせる。
- この直方体に流入する風の上流の空気はきれいで, どのような汚染物質も, 風と平行な側面から失われないと仮定する。
- 午前 7:00 以前の大気中の CO 濃度はごくわずかである。

5.1. 汚染物質である CO の濃度 $C(t)$ の時間依存性を決める微分方程式を求めよ。

5.2. 上式の解 $C(t)$ を求めよ。

5.3. 午前 8 時の濃度 $C(t)$ の数値を求めよ。

ただし, $L = 15$ km, $W = 8$ km, $u = 1$ m/s とする。

解答用紙

1.

1.5 pts

1.1.	もし大気の温度が T_0 であるとすれば, 大気圧は : $p(z) =$	0.5
1.2.	もし大気の温度が $T(z) = T(0) - \Lambda z$ と書けるとすれば, 1.2.1. $p(z) =$ 1.2.2. 次の条件を満たすところで自由対流が起こる : Λ	0.5 0.5

2.

3.25 pts

2.1.	$\frac{dT_{\text{parcel}}}{dz} = -G =$	1.0
2.2.	$T = T_{\text{parcel}}$ 2.2.1. Γ の表式 : $\Gamma =$ 2.2.2. Γ の数値 : $\Gamma =$ 2.2.3. $T(z)$ の表式 : $T(z) =$	0.5 0.25 0.25
2.3.	$T_{\text{parcel}}(z) =$	1.00
2.4.	$T_{\text{parcel}}(z) \approx$	0.25

3.

2.25 pts

3.1.	<p>以下のそれぞれの場合に下降係数 Λ が満たすべき条件を書け：</p> <p style="text-align: center;">安定な場合 :</p> <p style="text-align: center;">不安定な場合 :</p> <p style="text-align: center;">中立な場合 :</p>	<p style="text-align: right;">0.5</p> <p style="text-align: right;">0.5</p> <p style="text-align: right;">0.25</p>
3.2.	最高高度は $h =$	1

4.

1.75 pts

4.1	<p>高度 96 m と 119 m における空気塊の温度を求めよ：</p> <p style="text-align: center;">$T_{\text{parcel}}(96\text{m}) =$</p> <p style="text-align: center;">$T_{\text{parcel}}(119\text{m}) =$</p>	<p style="text-align: right;">0.25</p> <p style="text-align: right;">0.5</p>
4.2	<p>最高高度（上昇限界）H は、</p> <p style="text-align: center;">$H =$</p> <p>その高さでの空気塊の温度は、</p> <p style="text-align: center;">$T(H) =$</p>	<p style="text-align: right;">0.75</p> <p style="text-align: right;">0.25</p>

5.

1.25 pts

5.1.	$C(t)$ の満たすべき微分方程式 :	0.5
5.2.	5.1 の解 $C(t)$ の表式 : $C(t) =$	0.5
5.3.	午前 8 時での濃度 $C(t)$ の数値 : $C(t) =$	0.25

理論第3問

【解答】

1. 高度差 dz の圧力差を dp とすると、この間の空気にはたらく力のつり合いより、

$$dp = -\rho g dz \quad (1)$$

となる。ここで、 g は重力加速度の大きさ、 ρ は空気の密度である。空気の密度は理想気体の状態方程式

$$pV = \frac{m}{\mu} RT$$

を用いると、

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\mu p}{RT} \quad (1-1)$$

となる。これより、(1)式の微分方程式

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} dz$$

を得る。

1.1. 空気の温度は一定で T_0 に等しいとすると、

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT_0} dz$$

となるから、初期条件「 $z=0$ のとき、 $p=p_0$ 」を用いて積分し、

$$p(z) = \underline{p_0 e^{-\frac{\mu g}{RT_0} z}} \quad (2)$$

を得る。

1.2. もし、

$$T(z) = T(0) - \Lambda z \quad (3)$$

であれば、

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{R[T(0) - \Lambda z]} dz \quad (4)$$

となる。

1.2.1. 初期条件「 $z=0$ で、 $p=p_0$ 」を用いて、(4)式の両辺を積分すると、

$$\begin{aligned} \ln \frac{p(z)}{p_0} &= \frac{\mu g}{\Lambda R} \ln \frac{T(0) - \Lambda z}{T(0)} \\ \therefore p(z) &= \underline{p_0 \left(1 - \frac{\Lambda z}{T(0)}\right)^{\frac{\mu g}{\Lambda R}}} \quad (5) \end{aligned}$$

となる。

1.2.2. もし,

$$\frac{\rho(z)}{\rho(0)} > 1$$

ならば, 自由対流が生じる。(1-1)式より, 空気の密度は,

$$\frac{\rho(z)}{\rho(0)} = \frac{p(z) T(0)}{p(0) T(z)} = \left(1 - \frac{\Lambda z}{T(0)}\right)^{\frac{\mu g}{\Lambda R} - 1}$$

となる。これより, 指数が負のとき, 上式の最右辺は1より大きくなり, 自由対流が起こる。

$$\frac{\mu g}{\Lambda R} - 1 < 0$$

こうして,

$$\Lambda > \frac{\mu g}{R} = \frac{29 \times 10^{-3} \times 9.81}{8.31} = \underline{\underline{3.4 \times 10^{-2} \text{ K/m}}}$$

を得る。

2. 空気塊は断熱変化をし, その温度 T_{parcel} と圧力 p の間にはポアソンの関係式が

成り立つため, T_{parcel} は p に依存して決まる。また, 上下方向へ動く空気塊の圧

力 p は, つねに周囲の大気圧に等しく, 大気圧は高度 z に依存する。

2.1. 上に述べたことより, 次式が成り立つ。

$$\frac{dT_{\text{parcel}}}{dz} = \frac{dT_{\text{parcel}}}{dp} \frac{dp}{dz}$$

$\frac{dT_{\text{parcel}}}{dp}$ の表式:

ポアソンの関係式 $pV^\gamma = \text{const.}$ に空気塊の状態方程式 $pV = nRT_{\text{parcel}}$ (n : モル数) を用いて V を消去すると,

$$T_{\text{parcel}} p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{const.} \quad (6)$$

(6)式の両辺を p で微分して,

$$\frac{dT_{\text{parcel}}}{dp} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{T_{\text{parcel}}}{p} \quad (7)$$

$\frac{dp}{dz}$ の表式 :

(1)式より,

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{\mu g p}{RT}$$

となる。ここで、 T は外気の温度である。

こうして,

$$\frac{dT_{\text{parcel}}}{dz} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu g}{R} \frac{T_{\text{parcel}}}{T} \quad \therefore \quad G = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu g}{R} \frac{T_{\text{parcel}}}{T} \quad (8)$$

一般に、 G は一定ではない。

2.2.

2.2.1. $T = T_{\text{parcel}}$ のとき、(8)式より,

$$\Gamma = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu g}{R} = \frac{\mu g}{c_p} = \text{const.} \quad (9)$$

2.2.2. $\Gamma = \frac{0.029 \times 9.81}{\frac{7}{2} \times 8.31} = \underline{9.78 \times 10^{-3} \text{ K/m}}$

2.2.3. $\frac{dT_{\text{parcel}}}{dz} = -\Gamma = \text{const.}$ より、地表 $z=0$ での温度 $T(0)$ を用いて,

$$T(z) = T_{\text{parcel}}(z) = \underline{T(0) - \Gamma z} = T(0) - 9.78 \times 10^{-3} z \quad (10)$$

2.3. (8)式に(9)式を代入すると,

$$\frac{dT_{\text{parcel}}}{T_{\text{parcel}}} = -\Gamma \frac{dz}{T(0) - \Lambda z}$$

となるから、初期条件「 $z=0$ のとき、 $T_{\text{parcel}} = T_{\text{parcel}}(0)$ 」を用いて積分して,

$$\ln \frac{T_{\text{parcel}}(z)}{T_{\text{parcel}}(0)} = \frac{\Gamma}{\Lambda} \ln \frac{T(0) - \Lambda z}{T(0)}$$

となる。これより,

$$\underline{T_{\text{parcel}}(z) = T_{\text{parcel}}(0) \left(\frac{T(0) - \Lambda z}{T(0)} \right)^{\Gamma/\Lambda}} \quad (11)$$

を得る。

2.4. (11)式より,

$$\begin{aligned}
 T_{\text{parcel}}(z) &= T_{\text{parcel}}(0) \left(1 - \frac{\Lambda z}{T(0)} \right)^{\Gamma/\Lambda} \\
 &\approx T_{\text{parcel}}(0) \left(1 - \frac{\Gamma z}{T(0)} \right) \approx \underline{T_{\text{parcel}}(0) - \Gamma z} \quad (12)
 \end{aligned}$$

3. 大気の安定性

3.1. 空気塊と大気の圧力はつねに等しい。高度 z_0 では $T_{\text{parcel}}(z_0) = T(z_0)$ であるから,

空気塊の密度 ρ_{parcel} と大気の密度 ρ は等しく, 空気塊はつり合いの状態にある。空気塊の位置が z_0 から微小な変位を考えるかぎり, $G = \Gamma$ とみなすことができる。また, 微小変位であるから $T_{\text{parcel}}(z)$ に対しては, (12)式を用いることができる。よって, 空気塊の位置が $z = z_0 + d$ となったとき,

$$\begin{aligned}
 T_{\text{parcel}}(z_0 + d) &= T_{\text{parcel}}(z_0) - \Gamma d \\
 T(z_0 + d) &= T(z_0) - \Lambda d
 \end{aligned}$$

となる。

$d > 0$ のとき,

$$\Lambda > \Gamma \Rightarrow T_{\text{parcel}}(z_0 + d) > T(z_0 + d) \Rightarrow \rho_{\text{parcel}} < \rho$$

となり, 空気塊は上昇し, 不安定になる。

以上より, 答は,

$$\text{不安定: } \underline{\Lambda > \Gamma}, \quad \text{安定: } \underline{\Lambda < \Gamma}, \quad \text{中立: } \underline{\Lambda = \Gamma}$$

3.2. 地上 $z = 0$ では, つり合いの高度 $z = h$ からの変位は大きい。よって, $T_{\text{parcel}}(z)$

に対して(11)を用いる。

$T_{\text{parcel}}(h) = T(h)$ より,

$$T_{\text{parcel}}(0) \left(\frac{T(0) - \Lambda h}{T(0)} \right)^{\Gamma/\Lambda} = T(0) - \Lambda h$$

を得る。ここで,

$$T_{\text{parcel}}(0) \left(\frac{T(0) - \Lambda h}{T(0)} \right)^{\Gamma/\Lambda} = T_{\text{parcel}}(0) \left(1 - \frac{\Lambda h}{T(0)} \right)^{\Gamma/\Lambda}$$

$$T(0) - \Lambda h = T(0) \left(1 - \frac{\Lambda h}{T(0)} \right)$$

となるから,

$$1 - \frac{\Lambda h}{T(0)} = \left(\frac{T(0)}{T_{\text{parcel}}(0)} \right)^{\frac{\Lambda}{\Gamma - \Lambda}}$$

となり,

$$h = \frac{1}{\Lambda} \left[T(0) - \left(\frac{T(0)^\Gamma}{(T_{\text{parcel}}(0))^\Lambda} \right)^{\frac{1}{\Gamma - \Lambda}} \right] \quad (13)$$

を得る。

4.

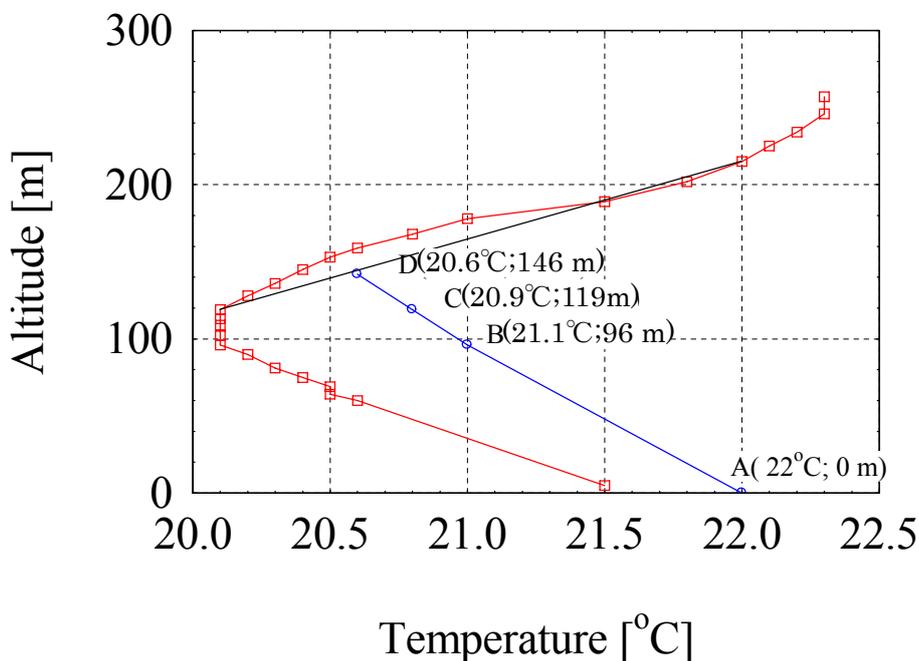


図 1

4.1. 3つの層に対する Λ の値は, 次のように求められる。

$$(1) \quad 0 < z < 96 \text{ m}, \quad \Lambda = \frac{21.5 - 20.1}{96 - 5} = 15.4 \times 10^{-3} \text{ K/m}$$

(2) $96 \text{ m} < z < 119 \text{ m}$, $A = 0$, 等温層

(3) $119 \text{ m} < z < 215 \text{ m}$, $A = -\frac{22.0 - 20.1}{215 - 119} = -19.8 \times 10^{-3} \text{ K/m}$

地上 $z = 0$ での気温は、図 1 を外挿して $T(0) = 21.6 \text{ }^\circ\text{C} = 294.6 \text{ K}$ となるから、(1)層に対する A の値を(11)式へ用いて、

$$T_{\text{parcel}}(96\text{m}) = 295 \times \left(\frac{294.6 - 15.4 \times 10^{-3} \times 96}{294.6} \right)^{\frac{9.78 \times 10^{-3}}{15.4 \times 10^{-3}}}$$

$$= 294.06 \text{ K} \approx \underline{\underline{294.1 \text{ K}}} = \underline{\underline{21.1 \text{ }^\circ\text{C}}}$$

(2)層は等温層であるから、 $T(z) = 293.1 \text{ K} = 20.1 \text{ }^\circ\text{C}$, $T_{\text{parcel}}(96\text{m}) = 294.1 \text{ K}$ を用いて、(8)式より、

$$\frac{dT_{\text{parcel}}}{T_{\text{parcel}}} = -\frac{\Gamma}{T(z)} dz$$

となるから、この式を積分して、 $z = 96 + h_1[\text{m}]$ での空気塊の温度は、

$$T_{\text{parcel}}(z) = T_{\text{parcel}}(96\text{m}) \exp\left[-\frac{\Gamma}{T(z)} h_1\right]$$

と表される。これより、 $h_1 = 119 - 96 = 23 \text{ m}$ として、

$$T_{\text{parcel}}(119\text{m}) = 293.87 \approx \underline{\underline{293.9 \text{ K}}} = \underline{\underline{20.9 \text{ }^\circ\text{C}}}$$

4.2. (3)層では、119 m からスタートして(13)式を用いる。

$$h_2 = \frac{1}{-19.8 \times 10^{-3}} \left[293.1 - \left(\frac{293.1^{9.78 \times 10^{-3}}}{293.9^{-19.8 \times 10^{-3}}} \right)^{\frac{1}{9.78 \times 10^{-3} + 19.8 \times 10^{-3}}} \right] = 27.0 \text{ m}$$

よって、最高の高度は、

$$H = 119 + 27.0 = \underline{\underline{146 \text{ m}}}$$

このときの温度は、

$$T_{\text{parcel}}(H) = T(H) = T(119\text{m}) - Ah_2$$

$$= 293.1 + 19.8 \times 10^{-3} \times 27.0 = \underline{\underline{293.6 \text{ K}}} = \underline{\underline{20.6 \text{ }^\circ\text{C}}}$$

5. 単位時間あたりに排出される CO の質量は、

$$M = 12 \times 10^{-3} \times 5 \times 8 \times 10^5 / 3600 = 13.3 \text{ kg/s}$$

である。

5.1. 時間 dt あたりの CO 濃度の変化を dC とすると、この間、ハノイ市街にオートバイから排出される CO の量は Mdt 、風で運び出される CO の量は $LHC(t)udt$ 、ハノイ市街の CO の増加量は $LHWdC$ と書けるから、

$$Mdt - LHC(t)udt = LHWdC$$

が成り立つ。これより、求める微分方程式は、

$$\frac{dC}{dt} + \frac{u}{W}C(t) = \frac{M}{LHW} \quad (14)$$

となる。

5.2. (14)式は、

$$\frac{dC}{dt} + \frac{u}{W} \left(C(t) - \frac{M}{LHu} \right) = 0$$

と書けるから、任意定数を K として微分方程式(14)の一般解は、

$$C(t) = K \exp\left(-\frac{u}{W}t\right) + \frac{M}{LHu} \quad (15)$$

となる。ここで、初期条件： $C(0) = 0$ を用いて、

$$C(t) = \frac{M}{LHu} \left[1 - \exp\left(-\frac{u}{W}t\right) \right] \quad (16)$$

を得る。

5.3. (16)式より、午前8時を $t = 3600$ s として、

$$\begin{aligned} C(3600\text{s}) &= \frac{13.3}{15 \times 10^3 \times 146 \times 1} \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{8 \times 10^3} \times 3600\right) \right] \\ &= \underline{\underline{2.2 \times 10^{-6} \text{ kg/m}^3}} = \underline{\underline{2.2 \text{ mg/m}^3}} \end{aligned}$$