

物理チャレンジ 2006

理論問題

2006年7月31日(月)

理論問題にチャレンジ 8:30 ~ 13:30

理論問題にチャレンジする前に下記の<注意事項>をよく読んでください。

問題は、大問3題からなります。問題は、一見難問にみえても、よく読むとわかるようになっています。どの問題から取り組んでも結構です。最後まであきらめずにチャレンジしてください。

<注意事項>

1. 開始の合図があるまで、問題冊子を開けないこと。また解答用紙、計算用紙、および封筒にも手を触れないこと。封筒の表にあるチャレンジ番号と氏名を確認すること。
2. 問題冊子は16ページである。解答冊子は10ページである。
3. 解答は、必ず解答用紙に解答すること。すべての解答用紙に、必ずチャレンジ番号と氏名を記入すること。
4. 解答は、最終的な答のみではなく、解答に至る道筋も詳しく記述すること。
5. チャレンジ開始後から200分(3時間20分)経過するまでは、原則として、途中退出はできない。200分経過(11:50)後は、すべての解答用紙(無解答の用紙も含む)は、チャレンジ番号・氏名の記入を確認の上、封筒に入れて机上に置いて退室可能である。
6. 気分が悪くなったときやトイレに行きたくなったとき、または質問がある場合は手をあげて監督者に知らせること。
7. 他の参加者の迷惑にならないように静粛に解答をすすめること。迷惑行為があった場合は退出させる。
8. 終了の合図があったら、ただちにすべての解答用紙(無解答の用紙も含む)は、チャレンジ番号・氏名の記入を確認の上、封筒に入れて机上に置いて退出すること。
9. 問題冊子ならびに計算用紙は、持ち帰ること。

第1問

宇宙の膨張

宇宙の時間発展の議論は、通常、一般相対性理論を用いて行われるが、宇宙項の影響などを除けば、ニュートン力学を用いても類似の結果を得ることができる。ここでは、ニュートンの万有引力の法則を用いて、一般相対性理論を考慮することなく宇宙の時間発展を考えてみよう。

[] 遠くの銀河にある原子が発した光が地球に到達したときに、元々その光を発した原子が発する光の波長（固有の波長）よりも長い波長として観測される。これを**赤方偏移**という。真空中の光速を c とする。

問1 ある原子が観測者から速さ v で遠ざかりながら固有の波長 I_0 の光を発しているとき、観測者が観測する光の波長 I を I_0 、 c および v を用いて表せ。ただし、 v は c に比べて十分小さく ($v \ll c$)、光についても、音と同じドップラー効果の式が成り立つものとする。

1929年、米国の天文学者エドウィン・ハッブル (Edwin Hubble) は、遠方の銀河からくる光の赤方偏移を観測した結果、ほとんどの銀河は地球から遠ざかっており、その後退する速さ v は観測者 (地球) からその銀河までの距離 r にほぼ比例するという関係を見出した。この関係は、

$$v = H_0 r$$

と表され、 H_0 を**ハッブル定数**という。この関係式は、銀河の遠ざかる速さとその銀河までの距離の比が、すべての銀河に対して一定値 H_0 になることを表している。この比例関係が任意の時刻 t においても成り立つとすると、銀河の後退する速さ $v(t)$ と地球からその銀河までの距離 $r(t)$ の関係は、時間の関数 $H(t)$ を用いて、

$$v(t) = H(t)r(t) \quad \dots(1)$$

と表される。ここで、速度は $v(t) = \frac{dr(t)}{dt}$ と表され、 $H(t)$ は**ハッブルパラメータ**と呼ばれる。

このように、過去においても常に宇宙が膨張していたとすると、時間を遡れば、宇宙はある1点から始まったと考えることができる。宇宙は、あるときある1点での大爆発 (**ビッグバン**) で始まり、その後も膨張し続けていると考える宇宙論は、1946年、ジョージ・ガモフ (George Gamov) によって提唱され、**ビッグバン宇宙論**と呼ばれる。ビッグバン宇宙論は、現在、ほとんどの研究者によって正しいと考えられている。そこでここでは、ビッグバン宇宙論にしたがって、宇宙年齢すなわちビッグバンが起こったとき (時刻 $t=0$) から現在までの時間 t_0 を、ニュートン力学により求めてみよう。

[] 宇宙には、どこにも特別な場所はなく (一様) かつ特別な方向もない (等方的)。これを**宇宙原理**という。この宇宙原理にしたがって宇宙の膨張を考えよう。このような

一様で等方的な宇宙の膨張を考えるには、空気を吹き込まれた球形の風船が次第に膨張するようすを思い浮かべればよい。風船表面の任意の2点間の距離は、風船の膨張と共に一様に増加する。これが3次元空間の膨張を2次元空間でイメージしたものである。

現在(時刻 $t=t_0$)、観測者Oから質点Pまでの距離を r_0 、時刻 t における距離を $r(t)$ とする。ここで、宇宙膨張の目盛りとして**スケール因子**と呼ばれる量

$$a(t) = \frac{r(t)}{r_0} \quad \dots(2)$$

を導入する。ビッグバンが起こったとき(時刻 $t=0$)、質点Pと観測者Oは同じ点にあったと考えられるから $r(0)=0$ 、 $a(0)=0$ である。以後、 $r(t)$ を簡単に r 、 $a(t)$ を a と書く。

問2 ハッブルパラメータ $H(t)$ をスケール因子 a とその時間変化 $\frac{da}{dt}$ を用いて表せ。

[] 時刻 $t=t_0$ において、点Oを中心に半径 r_0 の球内の質量密度(単位体積あたりの質量)を ρ_0 、時刻 t における半径 r の球内の質量密度を ρ とする。いま、膨張によって質量が変化しないとすると、これらの球内の質量は同じである。

質量が一様に分布するとき、任意の点Oにいる観測者からは、質量が点Oを中心に球対称に分布しているように見える。質点Pと点Oの距離を r とすると、点Oを中心に半径 r の球外の質量から質点Pにはたらく万有引力は互いに打ち消し合い、Pに及ぼす合力は0となる。したがって、質点Pにはたらく万有引力は、点Oを中心に半径 r の球内の質量 M が点Oに集中している場合にはたらく力に等しい(図1)。以下、万有引力定数を G とする。

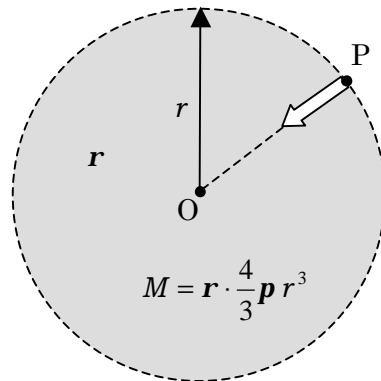


図1

問3 時刻 t における点Oから遠ざかる向きに質点Pの加速度を $\frac{d^2r}{dt^2}$ とすると、
 $\frac{d^2a}{dt^2} = \frac{1}{r_0} \frac{d^2r}{dt^2}$ となる。 $\frac{1}{a} \frac{d^2a}{dt^2}$ を r と G を用いて表せ。

現在の宇宙が膨張しているということは、宇宙はいつまでも膨張し続ける、宇宙はいつかは収縮に転じる、のどちらかであると考えられる。最近の観測結果による

と、 r_0 と r の境界に近いと推測されている。このことをニュートン力学で考えると、全力学的エネルギーが0に近いことを意味する。以下では、力学的エネルギーを0と考えて計算してみよう。

問4 時刻 t において 質点 P の力学的エネルギー保存則を用いて、 $\left(\frac{1}{a} \frac{da}{dt}\right)^2$ を r と G を用いて表せ。ただし、質点 P は点 O から遠ざかる向きにのみ運動をするものとする。

問5 半径 r の球内の質量が保存されることから、 r を r_0 と a を用いて表せ。

問4と問5の結果より、時刻 t でのスケール因子 $a(t)$ は、現在の時刻 t_0 を用いて $a(t_0)=1$ より、

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^n \quad \dots(3)$$

と表されることがわかる。

問6 (3)式における指数 n を求めよ。また、時刻 t_0 を現在の宇宙質量密度 r_0 と万有引力定数 G を用いて表せ。

問7 現在の宇宙年齢 t_0 をハッブル定数 H_0 ($=H(t_0)$) を用いて表し、ハッブル宇宙望遠鏡による値 $H_0 = 72 \text{ km}/(\text{s} \cdot \text{Mpc})$ を用いて、 t_0 を億年の単位で有効数字2桁まで求めよ。また、 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ として、 r_0 を有効数字2桁まで求めよ。ただし、 $1 \text{ Mpc} = 10^6 \text{ pc}$ (Mpc はメガパーセク、 pc はパーセクと読む) であり、 1 pc は地球と太陽の距離を見込む角が1秒となる距離として定義され、 $1 \text{ pc} = 3.09 \times 10^{16} \text{ m}$ である。

第2問

荷電粒子による電磁波の放射

荷電粒子が加速度運動をすると、荷電粒子のつくる電気力線が折れ曲がり、そこに余分の電場のエネルギーが蓄えられ、そのエネルギーが光速で周囲に広がる。これが加速度運動する荷電粒子によって放射される電磁波である。このことを、下記のようなモデルで考察してみよう。

[] 特殊相対性理論によれば、速さ v で動いている物体の進行方向の長さを測定すると、静止しているときの長さの $\sqrt{1-b^2}$ 倍に縮む。ここで、 $b = \frac{v}{c}$ であり、 c は真空中の光速である。進行方向に垂直な方向の長さは変化しない。

座標系 S に対して速さ v で z 軸方向に等速度運動している座標系を S' とする。 S 系の時刻 $t=0$ において、 S 系と S' 系の原点 O と O' および各座標軸、すなわち、 x 軸と x' 軸、 y 軸と y' 軸、 z 軸と z' 軸はそれぞれ一致し、各座標軸はそれぞれ平行を保ちながら、図1のように運動している。図1では、 y 軸、 y' 軸は紙面に垂直方向である。

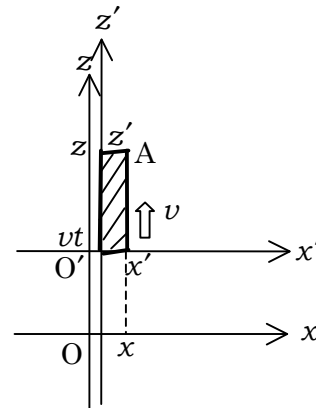


図1

座標系 S' において、長さ z' の棒の一端を原点 O' に、他端 A を点 $(0, 0, z')$ に置き S' 系に固定する。 S 系の時刻 t におけるこの棒の端 A の座標を z とすると、 S 系で見た棒の長さは $z - vt$ である。棒は z 軸方向へ速さ v で動いているから、その棒の z 軸方向の長さは、元

の長さ(S' 系での長さ) z' の $\sqrt{1-b^2}$ 倍

に縮む。したがって、

$$z - vt = z' \sqrt{1-b^2} \quad \dots(1)$$

となる。また、 z 軸に垂直な x 軸方向の長さは変化しないから、

$$x = x' \quad \dots(2)$$

となる。

図2のように、静止した状態で側面が電荷密度(単位面積あたりの電荷) $s_0 (> 0)$ に一樣に帯電した十分大きい導体板が、帯電した表面を z 軸に一致させながら z 軸上を、 S 系に対して一定の速さ v で等速度運動している。一般に、電荷は導体の表面のみに分布し、導体内に電荷は存在せず、導体内に電場も存在しない。また、導体板が運動しても、導体板表面上の全電気量は変化しない。いま、

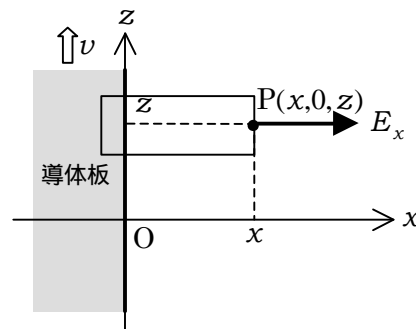


図2

「電場 E に垂直な単位面積を貫く電気力線の数を E 本」

と定義するとき、

「任意の閉曲面から外へ出る電気力線の数 N は、その閉曲面で囲まれた領域中の全電荷を Q とするとき、 ϵ_0 を真空の誘電率として、

$$N = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

と表される。」

これを、**ガウスの法則**という。

次では、以上の考察を用いて、等速度運動している点電荷がどのような電場をつくるか考察しよう。

問1 S系では、導体板の z 軸方向の長さは縮み、その側面積は小さくなっている。図2に示された細い実線で囲まれた領域にガウスの法則を適用することにより、点 $P(x, 0, z)$ ($x > 0$) において、 x 軸正方向を向いている電場 E_x を求めよ。この場合、導体板が y 軸方向、 z 軸方向に十分長ければ、 $x > 0$ の領域では x 軸に平行で一樣な電場ができると考えてよい。また、導体板と共に動いている S' 系では、側面積は元のまま変わらない。上で求めた電場 E_x と、 S' 系で点 $P(x', 0, z')$ にできる電場 E'_x の比 $\frac{E_x}{E'_x}$ を求めよ。

図3のように、静止した状態で電荷密度 $s_0 (> 0)$ に一様に帯電した十分大きい導体板がある。帯電した導体板の表面は z 軸と垂直であり、 x 軸と平行を保ちながら導体板は z 軸正方向へ、 S 系に対して速さ v で運動している。 S 系の時刻 $t = 0$ において帯電した導体板の表面が x 軸を通過したとする。

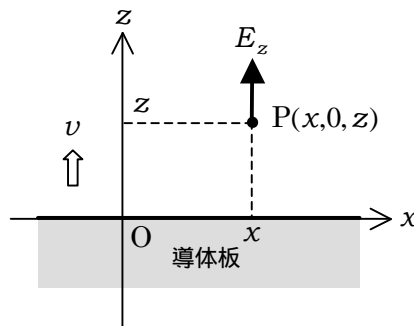


図3

問2 S系の時刻 $t (> 0)$ において、点 $P(x, 0, z)$ ($z > vt$) に z 軸正方向にできる電場 E_z を求めよ。求めた電場 E_z と、同じ時刻 t に導体板と共に動いている S' 系の点 $P(x', 0, z')$ にできる電場 E'_z の比 $\frac{E_z}{E'_z}$ を求めよ。

上で求められた S 系の電場と S' 系の電場の間の関係式は、その電場が導体板に帯電した電荷によってつくられたものであるかどうかによらず、一般的に成立する。

点電荷 $q (> 0)$ をもつ荷電粒子が真空中において、座標系 S の原点 O に静止していたとする。このとき、その周囲には、図4のように、 q から離れる向きに球対称に放射状

の電場ができる。

S系に対し、 z 軸上を正方向へ一定の速さ v で等速度運動をしている S' 系の原点 O' に静止している点電荷 q が、時刻 $t(>0)$ にS系につくる電場の z 成分 E_z と x 成分 E_x の比 $\frac{E_z}{E_x}$ を考えよう。

問3 比 $\frac{E_z}{E_x}$ を(1),(2)式を用いて $z-vt$ と x で表せ。

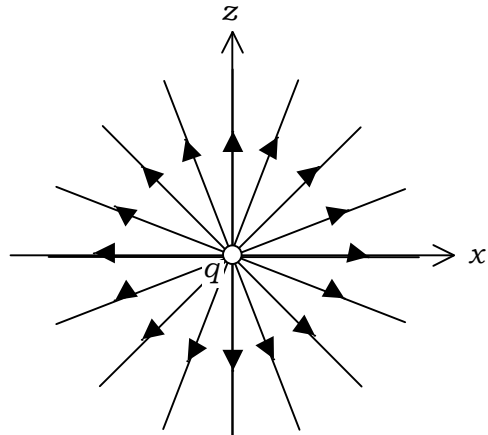


図4

この結果は、点電荷 q の周囲にできる電場は放射状になること、すなわち、電場は q から遠ざかる向きにできることを示している。

このことより、S系に対し z 軸正方向へ速さ v で等速度運動している点電荷 q が時刻 $t(>0)$ (このときの q の位置は点 Q)につくる電場は、図5のようになることがわかる。

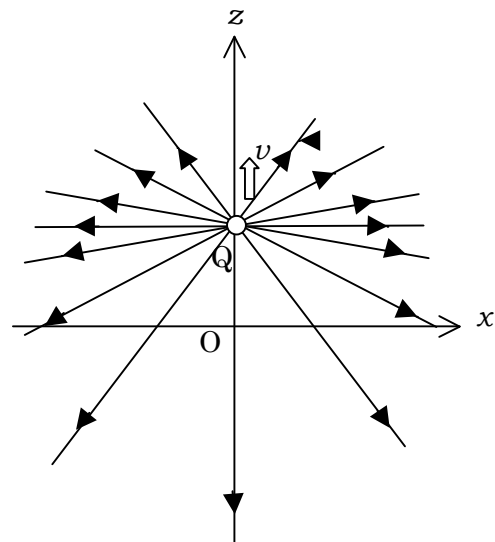


図5

[] 次に、S系の原点 O に静止していた点電荷 q が、時刻 $t=0$ から微小時間 Dt の間 z 軸正方向へ一定の加速度 a で等加速度運動し、速さ $v=aDt$ になり、座標 $z=\frac{1}{2}a(Dt)^2$ の点 O' に達し、その後、その速さ $v=aDt$ で z 軸正方向へ等速度運動したとする。このとき、時刻 $t(>>Dt)$ における電場のようすを考えよう。

時刻 $t(<0)$ において、原点 O に静止している点電荷 $q(>0)$ から距離 r だけ離れた点には、 q から離れる向きに大きさ

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

の電場ができる。

時刻 t における点電荷 q の位置を Q とし、その時刻における電気力線のようすを描いてみよう。点電荷 q がつくる電場は、 q から周囲に光速 c で伝わる。したがって、原点

0 から半径 ct より外側の空間には、時刻 0 まで原点に静止していたときの電荷による電場が、点 O を中心に球対称に放射状にできる。しかし、点 O' を中心に半径 $c(t - Dt)$ の球内には等速度運動している点電荷 q による電場ができる。したがって、その球内の電場は図 5 と同様に、時刻 t における電荷の位置 Q を中心とした放射状の電気力線で表される。

点 O' を中心とする半径 $c(t - Dt)$ の球内において、点 Q を中心とした中心角 q の扇形を、 z 軸のまわりに回転した円錐の底面を貫いて円錐の外へ出る電気力線の数を考える。さらに、点 O を中心とする半径 ct の球の外側で、点 O を中心とした中心角 f の扇形を z 軸のまわりに回転した円錐の底面を貫く電気力線の数を考える。

これらの電気力線の数が等しくなるように角 q と f をとる。電場をつないだ曲線である電気力線は、真空中で生成・消滅などせず連続的につながっている。このとき、点 Q を中心にした半径 $c(t - Dt)$ の球内で z 軸から角 q の方向へ向かう電気力線は、点 O を中心にした半径 ct の球の外側で z 軸と角 f の方向へ向かう電気力線とつながるはずである。こうして、時刻 t における電気力線のようすは図 6 のようになる。

点 O' を中心にした半径 $c(t - Dt)$ の球面と点 O を中心にした半径 ct の球面にはさまれた領域には磁場も生じ、電場と磁場が光速 c で周囲に広がっていく。これが加速度運動する電荷から放射された電磁波である。

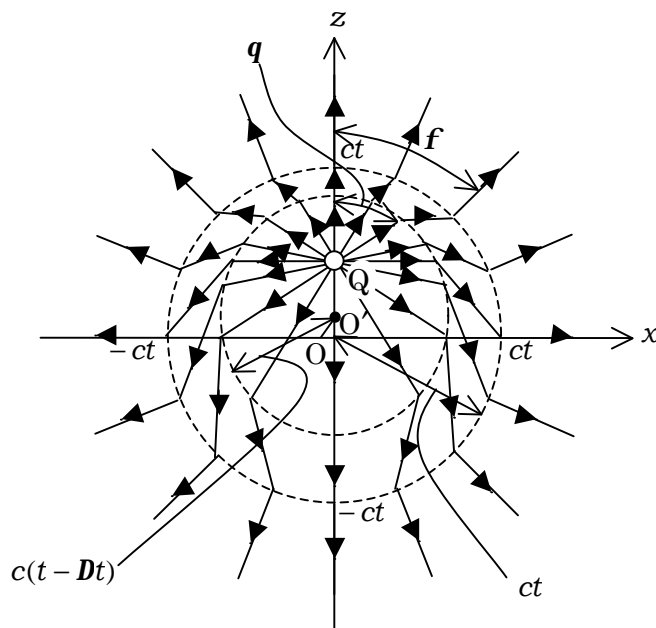


図 6

さて、時間 t は時間 Dt に比べて十分大きく ($t \gg Dt$)、時刻 t における点電荷 q の速さ $v = aDt$ が、光速 c に比べて十分小さい ($v \ll c$) 場合を考えよう。このとき、時刻 t において q の周囲の電場は、 q を中心に放射状に、ほぼ球対称に広がるので、 $q = f$ とみなすことができ、 $\overline{OO'} \ll \overline{OQ}$ であるから点 O と点 O' はほぼ一致する。

点電荷 q から z 軸と角 q の方向へ出る電気力線を考える。この場合、点電荷 q から z 軸と角 q の方向へ出て点 O' を中心に半径 $c(t - Dt)$ の球内にできる電気力線と、点 O を中心に半径 ct の球外に z 軸と角 q の向きにできる電気力線がつながる。

図7のように時刻 $t=0$ に点 O で等加速度運動を始めた瞬間に発せられた電場が、時刻 t に点 O から距離 ct だけ離れた点 P を通り、時刻 $t = Dt$ に点 O' で等速度運動に移った瞬間に発せられた電場が、時刻 t に点 O' から距離 $c(t - Dt)$ だけ離れた点 P' を通過するとする。ここで、点 O' は点 O に一致させて描いている。時刻 t での荷電粒子の位置を点 Q とすると、 $t \gg Dt$ より、 $\frac{1}{2}a(Dt)^2 \ll vt$ 、 $vDt \ll vt$ であるから、

$$\overline{OQ} = \frac{1}{2}a(Dt)^2 + v(t - Dt) \approx vt = atDt$$

であり、また、線分 OQ の $O - P$ に平行な向きの長さは $atDt \cos q$ 、垂直方向の長さは $atDt \sin q$ である。 $\overline{OP} = r = ct \gg \overline{OQ}$ であるから、 $c(t - Dt) = \overline{O'P'} \approx \overline{OH}$ であり、電気力線 $P'P$ の $O - P$ 方向の長さは $\overline{HP} = Dr = cDt$ とみなすことができる。このとき、 $\overline{OH} = r - Dr$ となる。

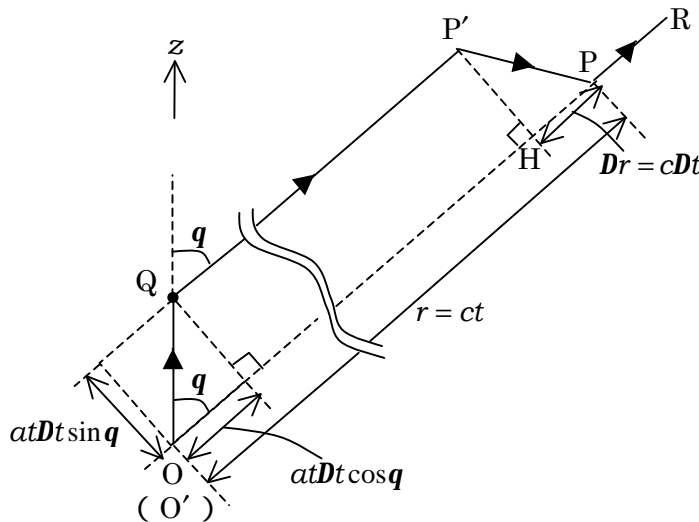


図7

図8に示された側面 S_1 、 S_2 で挟まれた十分細い帯状領域 V_1 にガウスの法則を適用する。領域 V_1 は十分細いので、 V_1 を通過する電気力線は、すべて側面 S_2 から入り、側面 S_1 から出ると考えられる。また、側面 S_1 と S_2 を十分小さくすれば、それぞれの面での電場は一樣であるとみなされる。

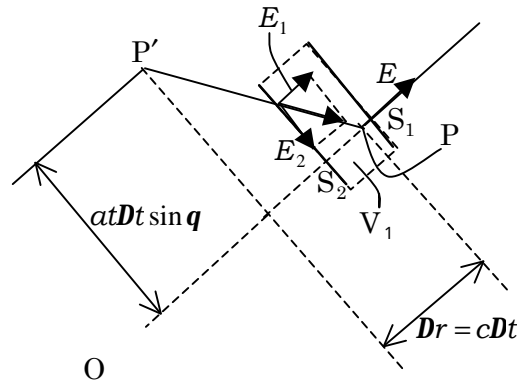


図8

問4 点 P' から P に向かう電場の $O \rightarrow P$ 方向の成分 E_1 を ϵ_0, q, r で表せ。ただし,
 $Dr = cDt \ll r$ であり, $P'P$ 上の電場は一定とみなすことができる。

問5 $P' \rightarrow P$ の向きの電場の $O \rightarrow P$ に垂直な成分 E_2 を求め, $\epsilon_0, q, a, c, q, r$ で表せ。

上で見たように、電荷が加速度運動を始める瞬間に電気力線は折れ曲がり、それが光速 c で周囲に伝わる。また、加速度運動しているときに発する電場（ $P'P$ 上の電場）には、静止および等速度運動をしているときに発する電場（ PR および QP' 上の電場）に比べて、余分のエネルギーが蓄えられる。また、それと同量のエネルギーが磁場として余分に蓄えられ、これら電場と磁場による余分のエネルギーの和が、光速 c で周囲に電磁波のエネルギーとして放射される。そこで次に、この放射エネルギーを求めてみよう。

図9のように、真空中に置かれた面積 S 、極板間隔 d の平行板コンデンサーに、ある電荷を蓄えたら、極板間に大きさ E の
 一様な電場ができた。

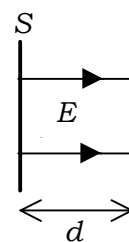


図9

問6 このコンデンサーに蓄えられた静電エネルギー U を求め、 ϵ_0, d, E, S を用いて
 表せ。また、このエネルギーはすべて極板間にできた電場に蓄えられたとすると、
 極板間の単位体積あたりに蓄えられているエネルギー（エネルギー密度） u を、
 電場の大きさ E と ϵ_0 を用いて表せ。

一般に、電場が生じている空間には、単位体積あたり問6で求めたエネルギーが溜ま
 っていると考えられる。

問7 点 O を中心に、半径 $r - Dr$ と r の球面で囲まれた球殻の領域に、電気力線が折れ曲がることにより余分に電場のエネルギーが蓄えられる。この余分のエネルギーは、問5で求めた電場 E_2 による。余分に蓄えられたエネルギー DE を求め、 ϵ_0, Dt, a, c, q を用いて表せ。その際、半径 $r - Dr$ と r の球面で囲まれた球殻の体積は $4\pi r^2 Dr$ で与えられることを用いよ。ただし、 $r - Dr$ から r の間の電場の大きさの変化は無視し、 $\sin^2 \theta$ の球面上での平均値は、 $\overline{\sin^2 \theta} = \frac{2}{3}$ となることを利用してよい。

また、電場と磁場による余分のエネルギーの和を求め、大きさ a の加速度で運動する電荷 q をもつ荷電粒子から単位時間あたりに放射される電磁波のエネルギー P が、

$$P = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \quad \dots(3)$$

と表されることを示せ。

前問7で示された(3)式は、荷電粒子の電荷の正負、加速度の正負およびその向きによらず成り立つ。

[] 水素原子の構造を、電子(電荷 $-e$ 、質量 m_e)が原子核(電荷 e)を中心に半径 r の円軌道を描いている(原子核は動かない)とする。この電子の運動に、上で考えた古典的な電磁気学がそのまま適用できるものとする。そうすると、原子核からクーロン力を受けて円運動をする電子は加速度をもつので、電磁波を放射してエネルギーを失う。そのため電子の軌道半径は次第に減少し、原子は潰れてしまう。このとき電子から放射される電磁波のエネルギーも問7で求めた(3)式を用いて計算することができる。

ただし、数値計算では、次の物理定数を用いよ。

- ・ 真空中の光速： $c = 3.00 \times 10^8$ m/s
- ・ 真空の誘電率： $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m
- ・ 電気素量： $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C
- ・ 電子の質量： $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ kg

問8 静止している原子核のまわりを、クーロン力のみを受けて半径 r の円運動をしている電子の力学的エネルギー(運動エネルギー + 位置エネルギー) E を ϵ_0, e, r を用いて表せ。

問 9 放射する電磁波のエネルギーの分だけ電子の力学的エネルギーが減少するとして、電子の軌道半径 r の減少する割合 $\frac{dr}{dt}$ を、物理定数 ϵ_0, c, e, m_e を用いて r の関数として表せ。ただし、電子が 1 周する時間の間の軌道半径の減少する割合は極めて小さいので、各瞬間、電子は円運動しているとみなしてよいものとする。

問 10 電子の軌道半径 $r_B = 5.29 \times 10^{-11} \text{ m}$ (ボーア半径) の水素原子において、電子の軌道半径が 0 になり原子が潰れるまでの時間 T を、有効数字 2 桁で求めよ。ただし、必要なら、次の積分公式を用いてよい。

$$\int r^n \frac{dr}{dt} dt = \int r^n dr = \frac{r^{n+1}}{n+1} + C \quad (n=1, 2, 3, \dots, C \text{ は積分定数})$$

このように、古典論では、電子が常に電磁波を放射することになって、原子は潰れてしまう。この困難を救うために、ニールス・ボーア (Niels Bohr) は量子仮説を導入し、電子が特定の軌道を運動しているときは電磁波を放射しないと仮定した。はじめ、この仮定の根拠は曖昧なものであったが、このボーアの理論はいろいろな実験結果をうまく説明することができ、後に発展する量子力学へとつながっていった。現在では、原子構造を説明するには量子力学が必要不可欠であると考えられている。

[] 空は青く見える。それは、太陽光がその波長より十分小さな空気分子で散乱されるとき、波長の短い青い光の方が波長の長い赤い光より散乱されやすいためであろうという。

問 11 空気分子に角振動数 ω の可視光 (波長が $3.8 \times 10^{-7} \sim 7.7 \times 10^{-7} \text{ m}$ 程度の電磁波) があたると、分子内の電子が、電磁波の振動電場と原子核から力を受けるため、時刻 t と共に電子の位置 $x(t)$ は、

$$x(t) = x_0 \sin \omega t \quad (x_0 \text{ は } t \text{ および } \omega \text{ によらない定数})$$

のように振動する。このことから、空が青く見える理由を(3)式を用いて説明せよ。

第3問

以下の設問 A, B, C に答えよ。

A 次元解析とスケール変換

[] 物理量の単位は、長さや時間などの基準となる**基本単位**を定めると、それらの組み合わせで表される。このように、物理量の単位が基本単位のどのような組み合わせになっているかを示すものを**次元**あるいは**ディメンション**という。物理量の関係を数式で表すと、両辺の次元は等しくならなければならない。このことを用いると、ある物理量が他の物理量とどのような関係にあるのかを調べることができる。このような方法を**次元解析**という。

質量の次元を $[M]$ 、長さの次元を $[L]$ 、それに時間の次元を $[T]$ で表し、次元解析の手法を用いて物理現象を考察してみよう。

例 音速 v_s が気圧 p と空気の密度 r で決まると考えて、

$$v_s = k p^a r^b \quad (k \text{ は次元のない定数}) \quad \dots(1)$$

と仮定すると、 v_s, p, r の次元は、それぞれ $[v_s] = [LT^{-1}]$ 、 $[p] = [(MLT^{-2})/L^2] = [ML^{-1}T^{-2}]$ 、 $[r] = [M/L^3] = [ML^{-3}]$ と表すことができる。そこで、(1)式の両辺の次元は、

$$[LT^{-1}] = [ML^{-1}T^{-2}]^a [ML^{-3}]^b = [M^{a+b} L^{-a-3b} T^{-2a}]$$

である。これより、

$$0 = a + b, \quad 1 = -a - 3b, \quad -1 = -2a$$

となり、 $a = \frac{1}{2}$ 、 $b = -\frac{1}{2}$ と求まる。

問1 飛行機の揚力を考える。飛行機の翼を長さ W 、奥行き L の長方形であると仮定する。この飛行機が密度 r の大気中を、大気に対する相対速度 v で飛んでいる。飛行機の揚力 F は翼の長さに比例すると考えられるので、

$$\frac{F}{W} = k r^a v^b L^c \quad (k \text{ は次元のない定数})$$

とおくと、 a, b, c はどのように定まるか。 a, b, c の各数値を求めよ。

問2 この飛行機は、地上では 時速 250 km で離陸し、上空 10,000 m では 時速 900 km で飛んでいる。上空 10,000 m でこの飛行機にはたらく揚力と地上で離陸するときこの飛行機にはたらく揚力が等しいとすると、上空 10,000 m の空気の密度 r_1 と地上の空気の密度 r_0 の比 $\frac{r_1}{r_0}$ はいくらか。

[] ある物理量が他の物理量のべき乗で表されている場合、**スケール変換**という手法で物理法則を考察することができる。いま、長さのスケールを $r \rightarrow r_1 = a r$ 、時間のスケールを $t \rightarrow t_1 = b t$ と変換する場合を考える。

問3 速度 V と加速度 A は、

$$V \rightarrow V_1 = a^i b^j V, \quad A \rightarrow A_1 = a^k b^l A$$

と変換される。上記の i, j, k, l の値を求めよ。

問4 長さが 100 分の 1 のミニチュアの物体を作って落下させ、そのようすをビデオに撮影した。これを本物らしく見せるには、長さと時間に関するスケール変換に対して加速度が不変であればよい。このことより、ビデオの再生速度をもとの何倍にすればよいか求めよ。

B 手回し発電機と豆電球

12 V 1.5 W 用の豆電球(12 V の電圧をかけたときの消費電力が1.5 W である豆電球), モーターと同じ構造で最大で8 V の起電力を発生させることができる手回し発電機, それと起電力9 V の直流電源がある。これらを直列につないだところ, 手回し発電機のハンドルが回転をはじめて豆電球が点灯した。

十分に時間が経つとハンドルの単位時間あたりの回転数が一定になり豆電球の明るさも一定になった。この状態を「はじめの状態」という。ただし, 発電機のハンドルが回転すると, 回転を止める向きに抵抗力がはたらく。次の問いに答えよ。

問1 「はじめの状態」で手回し発電機のハンドルに対して, 次の1)~3)に示す操作を行った。この操作によって, 豆電球の明るさはどうなるか。また, その理由を述べよ。

- 1) 手回し発電機の回転しているハンドルを手で押さえて回転を止めた。
- 2) 手回し発電機のハンドルに手で力を加えて, 「はじめの状態」と同じ向きの回転数を一定の大きさだけ増加させた。
- 3) 手回し発電機のハンドルに力を加えて, 最初に回転している向きと逆向きに一定の回転数で回転させた。

問2 12 V 1.5 W 用の豆電球から12 V - 5 W 用の豆電球に取り替えて, 豆電球と手回し発電機および起電力9 V の直流電源を直列につないだ。豆電球の明るさと手回し発電機のハンドルの単位時間あたりの回転数は, 「はじめの状態」と比べてどのように変化するか答えよ。また, その理由を簡潔に述べよ。

C 炭酸飲料の泡

サイダーなどの炭酸飲料の栓を抜くと、泡が容器の壁付近で発生し、上昇して行くのを見ることができる。それをよく観察すると、泡は上昇するにしたいがい、速さを増していくことがわかる。これに対して、空気の泡を水に入れるとほぼ一定の速度で上昇する。なぜ、このような違いが起こるのか、簡潔に説明せよ。