

物理チャレンジ2008

理論問題

2008年8月4日（月）

理論問題にチャレンジ 8：30～13：30

理論問題にチャレンジする前に下記の＜注意事項＞をよく読んでください。

問題は、大問3題からなります。問題は、一見難問にみえても、よく読むとわかるようになっています。どの問題から取り組んでも結構です。最後まであきらめずにチャレンジしてください。

＜注意事項＞

1. 開始の合図があるまで問題冊子を開けないこと。また解答用紙、計算用紙、および封筒にも手を触れないこと。封筒の表にあるチャレンジ番号と氏名を確認すること。
2. 問題冊子は23ページである。解答冊子は13枚である。
3. すべての解答は、解答用紙に記入すること。解答用紙の各ページに、必ずチャレンジ番号と氏名を記入すること。
4. 解答は、最終的な答のみではなく、解答に至る道筋も詳しく記述すること。
5. 気分が悪くなったときやトイレに行きたくなったとき、または質問がある場合は手をあげて監督者に知らせること。
6. チャレンジ開始後から200分（3時間20分）経過するまでは、原則として、途中退出はできない。200分経過（11:50）後は、退出希望者は手を挙げて監督者に知らせ、すべての解答用紙（無解答の用紙も含む）は、チャレンジ番号・氏名の記入を確認の上、封筒に入れ、机上に置いて退室する。
7. 他の参加者の迷惑にならないように静粛に解答をすすめること。迷惑行為があった場合は退出させる。
8. 終了の合図があったら、ただちにすべての解答用紙（無解答の用紙も含む）は、チャレンジ番号・氏名の記入を確認の上、封筒に入れ、机上に置いて、監督者の指示を待つこと。
9. 問題冊子ならびに計算用紙は、持ち帰ること。

第1問 (100点)

アインシュタインの特殊相対論によると、動いている汽車に乗っている人の時計と線路脇に立っている人の時計のように2つの時計の位置が相対的に変化する場合には、針の進み方が違うという。ここでは、その理論の基本的な関係式を導き、それをカーナビに応用することを考える。以下で地面に対して等速運動する台車の上で音や光を発生させるという実験について考察するが、そのときの時刻や座標は、地面に固定された時計と物差しを使って測ったものであるときは t, x などのように表し、台車の上に固定された時計と物差しで測ったものは、 t', x' のように「'」を付けて区別して表すことにする。

[I]

最初に、空気を媒体として伝わる音波について考える。なお、[I] と [II] においては、光は瞬間的に伝わるものとする。

図1のように、2台の台車が堅くて細い棒で間隔を一定に保ったまま x 軸上を一定の速度 v で右に向かって走っている。2台の台車にはそれぞれスピーカーが取り付けられてあり、その間隔を L とする。左のスピーカーが点 O を通過したとき、そこから音のパルスを発生させ、同時にそれを知らせるために左の電球を瞬間的に光らせる。その時刻を地面に固定された時計の $t = 0$ とする。また、地面に固定された物差しの端は O におきそこを $x = 0$ とする。右の台車上の人はこの音のパルスを聞くと、それを知らせるために右の電球を瞬間的に光らせ、同時に、右のスピーカーから音のパルスを発生させる。左の台車の人、右から来た音を聞いたとき、ふたたび左の電球を瞬間的に光らせる。ただし、台車が走ると周囲の空気が乱されるが、音が伝わる空間の空気の大部分は地面に対して静止しており、そのため、2つのスピーカーの間を音波は地面に対して一定の速さ V で進むものとする。また、[I] と [II] の両方の問題で、 $v < V$ とする。この様子を地上に立っている人が地面に固定された時計と物差しを使って観察し、記録したとする。

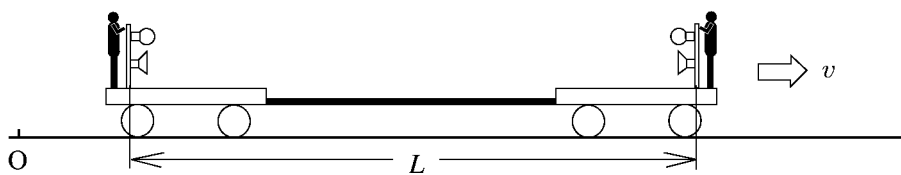


図 1:

問1 地上に立っている人が右の電球が光ったことを観測した時刻を t_1 とすると

$$t_1 = \frac{L}{V - v}$$

となることを証明せよ。

問2 この人が2回目に左の電球が光ったことを観測した時刻 t_2 を L, v, V を使って表せ。

[II]

次に、図2のように、連結された2台の台車の上に密閉した長い箱を乗せて、全体を一定の速さ v で右の方へ動かしながら同様の実験をした。箱に閉じ込めた空気は台車に対して静止しているので、音波は箱の中を台車に対して速さ V で伝わる。この実験の様子を台車の上の人が台車に固定された時計と物差しを使って観察したとする。ただし、左のスピーカーから音のパルスが出たとき台車に固定された時計は $t' = 0$ を指し、台車に固定された物差しの $x' = 0$ の目盛りは左のスピーカーの位置にあったとする。



図 2:

- 問 3 右の電球が光ったとき、台車の上の時計は t_1 を指していたとする。 t_1 を L , V , v のすべてまたはその一部を使って表せ。
- 問 4 2回目に左の電球が光ったとき、台車の上の時計の針は t_2 を指していたとする。 $t_2 - t_1$ を上と同様に表せ。
- 問 5 左のスピーカーから音が出た時刻を地面の上に固定された時計の時刻で $t = 0$ とする。また、このときのスピーカーの位置を地面に固定された物差しで $x = 0$ とする。これらの時計と物差しで測った量を使って右の電球が光った時刻 t_1 を計算し、それが t'_1 に等しいことを導け。

[III]

問 5 の結果は、台車に固定された時計と地面に固定された時計は、いつも同じ時刻を指していたことを意味する。ところが、アインシュタインは、厳密に言うところこれが正しくないということを音波の代わりに光波を使った思考実験によって示した。

次ページ図3のように、真空中を速さ v で右に動く台車の一方の端に電球を置き他方の端に鏡を置く。電球と鏡の間の距離は、地上に置いた物差しで測ったところ L であった。電球を短時間光らせると光のパルスが右に進み、鏡に反射されて左の端に戻ってくる。音の速さ V は静止した媒質に対する速さだから、地面に対する速さと台車に対する速さは異なる。それに対して、アインシュタインは、電球と鏡の間を行き来する光の速さは、地面に固定された時計と物差しを使って測っても台車に固定された時計と物差しを使って測っても、同じでなくてはならないと考えた。この速さを c とする。 c の値は $3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$ である。

以下では、電球が光ったときを $t = t' = 0$ とし、そのときの電球の位置を $x = x' = 0$ とする。



図 3:

問 6 電球から出た光が右の鏡に着いたとき、地面に固定した時計は t_1 を指していた。 t_1 を L, v, c を使って表せ。

問 7 光が鏡で反射されて電球のところに戻って来たとき、地面に固定した時計は t_2 を指していた。 t_2 を L, v, c を使って表せ。

[IV]

電球から出た光は一定の速さ c で台車の上を往復したのだから、 $t' = 0$ に電球から出た光が鏡に到着した時刻 t'_1 と電球のところへ戻ってきたときの時刻 t'_2 の間には、 $t'_2 = 2t'_1$ の関係がなくてはならない。したがって、台車に固定した時計と地面に固定した時計の進み方が等しければ、 $t_2 = 2t_1$ でなくてはならないが、上の計算結果によるとこれは成り立たない。これは、2つの時計の進み方が等しくないことを意味する。そこで、アインシュタインは、

$$t' = at + b(x - vt) \quad (1)$$

という関係があつて、台車上の時計の時刻 t' は、地上の時計の時刻 t とその位置 x に依存すると考えた。さらに、台車上の物差しで測った座標 x' に対しては

$$x' = \alpha t + \beta(x - vt) \quad (2)$$

という関係があるだろうとも考えた。ここに出てきた a, b, α, β をこれから決めることにする。なお、これらの考えを進めると、台車に固定された物差しで測った電球と鏡の間の距離はもはや L ではないので、 $t'_1 = L/c$ とはならないことを注意しておく。

まず、左の電球の位置はいつも $x = vt$ にあり、 t の値によらず $x' = 0$ であることを (2) 式に使うと $\alpha = 0$ が導かれる。

問 8 次に、上と同じように $t = t' = 0$ に電球を瞬間的に光らせる。台車の上で見ると光のパルスは時刻 t' に

$$x' = ct' \quad (3)$$

に到達する。地面の上で見ると光のパルスは時刻 t に

$$x = ct \quad (4)$$

に到達する。この2つの関係式を使って、(2) 式の β を a, b, c, v を使って表す式を導け。

問9 図3の実験で成り立つ $\frac{t'_2}{t'_1} = 2$ と上の(1)式から、 b を a, c, v を使って表す式を導け。

問10 ここで、これまで考えてきた台車から見て速度 $(-v)$ で動く第2の台車を考えよう。それに固定された時計と物差しで測った時刻と座標を、 t'', x'' のように表すことにする。 a と c と v とを使って、 t'' および x'' を t および x' を使って表す関係式を書け。

問11 ところが、第2の台車は地面に対しては動いていないから、実は、 $x = x'', t = t''$ である。このことを使って、 a を c および v のみを使って表せ。また、この結果から

$$t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (5)$$

が成り立つことを示せ。以下では、 v は c に比べて十分小さいとする。

問12 z を1に比べて十分小さな数とすると $(1+z)^p \doteq 1 + pz$ として良いということを使って、(5)式の左の式の右辺を c を含まない項と $(1/c)^2$ に比例する項の和の形の近似式で表せ。

以下では、 $(1/c)^2$ に比例する項を(特殊)相対論的補正と呼ぶ。

[V]

GPS(全地球位置測定システム)は、人工衛星から電波に乗って送られてくる情報を使ってわれわれの位置や時間を教えてくれるシステムのことで、これまでカーナビなどに使われてきた。最近では、ケータイにも端末が搭載され、所持者の位置を知ることができるようになってきた。ここでは、高速で地球の周りを回る人工衛星を使うGPSでは相対論的補正を考慮しなくてはならない1つの例を考えよう。

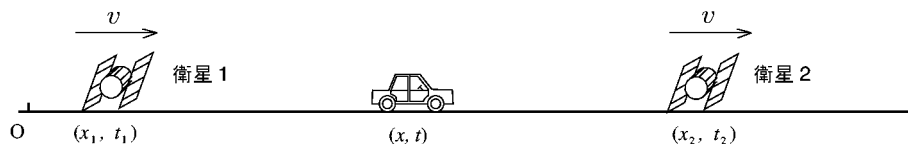


図4:

カーナビでは、3次元空間における位置を知るために、いつも4個の衛星と交信しているが、ここでは、図4のように簡単化されたシステムを考える。2個の人工衛星は自動車と同じ軌道上を共通の速度 v で右向きに飛んでいる。時刻 t_1 に x_1 にあった衛星1からのパルスが自動車のカーナビに届いたとき、同時に、時刻 t_2 に x_2 にあった衛星2からのパルスもカーナビに届いたとする。さらに、 t_1, x_1, t_2, x_2 の正確な値もそれぞれの衛星から知らされたとする。ただし、これらの座標と時刻は地上の物差しと時計で測ったものである。この2つのパルスが届いたのは時刻 t でそのときの自動車の位置を x とすると、

$$|x - x_1| = c(t - t_1), \quad |x - x_2| = c(t - t_2) \quad (6)$$

という関係が成り立つ。この方程式を解くと自動車の位置 x が分かるはずだが、正しい情報を得るには相対論的補正も考慮する必要がある。それを示そう。ただし、以下では、 $x_1 < x < x_2$ という場合に限ってよい。また、数値計算をするとき必要なら $v = 3.8 \times 10^3 \text{m/s}$ とせよ。

問 13 GPS では時計が重要な役を果たす。時計は、衛星にもカーナビにも搭載されている。そこで、(6) 式の 2 つの方程式を解く代わりに、カーナビの時計で測った時刻 t_r を (6) 式の一方の式の t の代わり使い、その式を x について解いても良さそうである。そうやって求められた x の値が 1m 以上の誤差を含まないようにするには、カーナビの時計の誤差を何秒以下にする必要があるか。

問 14 電子時計でも 1ms (ミリ秒) 程度の誤差はあるから、前問のようにカーナビの時計の誤差を小さくすることが大変難しいことが想像できる。それに対して、衛星に積んである原子時計の誤差は 1ns (ナノ秒= 10^{-9} s) 程度である。そこで、(6) 式の 2 つの方程式を解いて、自動車の位置 x を人工衛星からの情報 x_1, x_2, t_1, t_2 および c を使って表す式を求めよ。

問 15 x_1, x_2 および t_1, t_2 は地上の物差しと時計で測った量であるが、これらは、それぞれの衛星からその時計と飛行計画に基づいて送られてくる情報をもとに相対論を使って計算されたものである。いま、図 4 の左と右の衛星がパルスを出した時刻とそのときの位置 (t', x') は、衛星の時計と物差しで測って、それぞれ正確に $(t_1, 0), (t_2, L)$ だったとする。 x を t_1, t_2, L, c, v を使って表せ。なお、相対論的効果は問 12 の近似の形で取り入れよ。

問 16 衛星から、 $t_1 = t_2 = 0$ のときに発射されたパルスが同時にカーナビに到達した。もし相対論的補正がいらなければ、このときのカーナビの位置は $x = \frac{L}{2}$ である。しかし、カーナビの実際の位置はここではない。 $L = 24,000 \text{km}$ のときのカーナビの位置は、相対論的補正のない場合より何 m ずれているか。

問 16 の結果は、もしカーナビに搭載されているソフトウェアを作るときに相対論的補正を考慮しないと実用上の支障となるような誤差が生じることを意味している。さらに、実際の GPS は、人工衛星もカーナビもその間を飛んでいる電波も地球の重力の影響や、地球が回転していることの影響を受けているため、一般相対論的効果も考慮して正しい場所を出力するように設計されている。

(余 白)

第2問

A (50点)

月探査機「かぐや」は、わが国の月探査 SELENE 計画にしたがって、2007年9月14日に打ち上げられた。「かぐや」は地球を焦点とする楕円軌道を2.5周した後、月軌道に向かった。最初の月軌道は月を焦点の1つとする楕円軌道であった。その後、2回にわたって子衛星を放出して、自らの軌道を円軌道に落ち着かせた。2個の子衛星「おきな」と「おうな」はそれぞれ異なる楕円軌道を周回している。

まず、地球を焦点とする楕円軌道を回っている「かぐや」について考える。

ロケットである高度まで打ち上げられた探査機「かぐや」を地球を周回する軌道に載せるため、地球中心と「かぐや」を結ぶ線分（これを動径という）に垂直方向の速度が「かぐや」に与えられた。この速度の大きさによって軌道が決まる。地球の質量を M として、質量 m の「かぐや」との間に働く万有引力の大きさ F は、

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \quad (1)$$

と表される。ここで、 G は万有引力定数、 r は地球中心から「かぐや」までの距離である。この力に対する「かぐや」の位置エネルギー U は、無限遠を基準として、

$$U = -\frac{GMm}{r} \quad (2)$$

で与えられる。

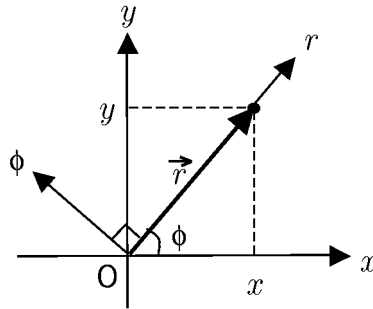


図 1:

円運動や楕円運動の記述には、 $x-y$ 座標（デカルト座標）より極座標を用いて表現する方が便利である。2次元極座標を次のように定義する。図1のように、地球中心を原点 O とし、「かぐや」の楕円軌道の長軸に沿って x 軸をとる。また、「かぐや」の位置を示す位置ベクトルを \vec{r} ($|\vec{r}| = r$) とし、 \vec{r} の x 軸に対する角を ϕ （反時計回りを正とする）とする。

2次元極座標では、座標軸は動径方向を r 座標、これと垂直に ϕ の正の方向を ϕ 座標とする (図1参照)。そして、「かぐや」の位置は (r, ϕ) で表される。図2のように、楕円軌道上を運動する「かぐや」の速度の各座標成分を $\vec{v} = (v_r, v_\phi)$ とすると、

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\phi = r\dot{\phi}$$

となる。ここで、物理量 A の時間微分 $\frac{dA}{dt}$ を \dot{A} と表示した。これより、 $|\vec{v}| = v$ として、

$$v^2 = v_r^2 + v_\phi^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 \quad (3)$$

となる。

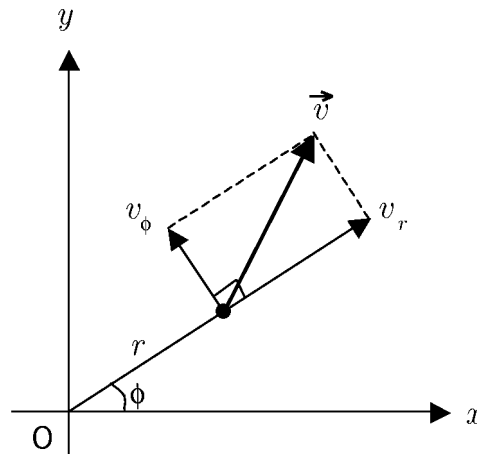


図 2:

したがって、「かぐや」のもつ全力学的エネルギー E を極座標で表すと、

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 - \frac{GMm}{r} \quad (4)$$

となる。

また、万有引力による楕円運動では、ケプラーの惑星運動に関する3法則が成り立つ。ケプラーの第2法則「面積速度一定の法則」より、面積速度を V_s とすると、 $V_s = \text{一定}$ と書ける。この V_s は極座標で表すと

$$V_s = \frac{1}{2}rv_\phi = \frac{1}{2}r^2\dot{\phi} = \text{一定} \quad (5)$$

となる。ここで、 $\dot{\phi}$ は角速度である。(5)式を使って、全エネルギーの式(4)の $\dot{\phi}$ を消去して r と \dot{r} のみを変数にもつ方程式に書き換えると、

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{2mV_s^2}{r^2} - \frac{GMm}{r} \quad (6)$$

となる。こうして、楕円運動する「かぐや」の全力学的エネルギー E が r と \dot{r} だけで表現された。

(6) 式を \dot{r} について解くと,

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{mr^2} (Er^2 + GMmr - 2mV_s^2) \quad (7)$$

となる。次に、デカルト座標 ($x - y$ 座標) で楕円軌道を考察する。

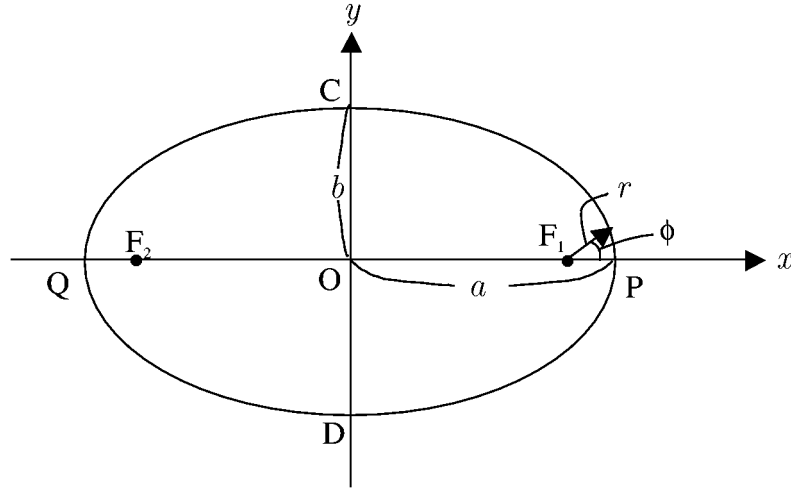


図 3:

楕円の中心を原点とした $x - y$ 座標を用いると、長半径 a 、短半径 b の楕円は、

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (8)$$

で与えられ、 $x - y$ 座標と極座標の図形的関係は図 3 のようになる。

一般に、人工衛星の楕円軌道は、楕円焦点の 1 つ F_1 に地球中心がある。

(7) 式において、 \dot{r}^2 が正の値をとるとき、すなわち、 \dot{r} が実数のとき運動が存在するから、右辺の () 内は正の値になることが要請される。() 内は r の 2 次方程式であるから、() 内が正の値になる r の区間は限られる。

問 1 (7) 式において、右辺の () 内が正の値になる r の区間を $r_1 \leq r \leq r_2$ としたとき、 r_1 、 r_2 は、それぞれ、図 3 のどの点の間の距離か。

問 2 楕円運動する「かぐや」の全力学的エネルギー E を楕円軌道の長半径 a および G 、 M 、 m を用いて表す式を導け。

問 3 近地点 (地球に最も近い点) P を通過するときの「かぐや」の速さ v_1 を与える表式を、 G 、 M 、 r_1 、 a を用いて表せ。

問 4 文末の定数を使って、問 3 で得られた v_1 の数値を求めよ。

次に月を周回する軌道に入った「かぐや」について考察する。以下では月と「かぐや」のみに注目し、他の天体などの影響は無視する。地球周回軌道の近地点より、月周回軌道に向かい月周回楕円軌道に入った「かぐや」は、ある楕円軌道で子衛星の「おきな」を、続く次の楕円軌道で「おうな」を切り離して、それぞれ楕円軌道に乗せた。再度の子衛星放出で「かぐや」自体は減速して月の周りの円軌道に入り、月面観測等の諸測定を開始した。

問5 月の半径を R_m 、月面上の重力加速度を g_m として、月面上 h の高度で円軌道を周回する「かぐや」の速さ v_2 を与える表式を R_m , g_m , h を用いて求めよ。

問6 月面上の重力加速度 g_m の大きさを地球上の重力加速度 g の $1/6$ とする。 $h = 100\text{km}$, $R_m = 1.74 \times 10^3\text{km}$ として問5 で得られた v_2 の数値を求めよ。

物理定数

地上の重力加速度 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$

地球の半径 $R = 6.38 \times 10^3 \text{ km}$

(SELENE 計画表より)

「かぐや」の質量 $m = 3.0 \times 10^3 \text{ kg}$

「かぐや」の地球周回楕円軌道の近地点における地表からの高度 $2.8 \times 10^2 \text{ km}$

「かぐや」の地球周回楕円軌道の遠地点における地表からの高度 $2.4 \times 10^5 \text{ km}$

B (50 点)

1800 年にヴォルタが発明した電池は科学を大きく発展させることになった。科学者たちに「電流」をもたらしたからである。20 年後コペンハーゲン大学のエルステッドは電流が磁針に力を及ぼすことを発見し 1820 年 6 月に短い論文を書いた。これが電気と磁気が統一されていく端緒となった。同年 9 月エルステッドの発見はフランス学士院の例会でアラゴによって報告されたが、その一週間後にはアンペールが 2 つの平行な直線電流の間には同方向ならば引力、逆方向ならば斥力が働くことを発表した。7 週間後の 10 月末にビオとサヴァールは直線電流が磁極に作用する力の法則を明らかにして発表した。

ビオとサヴァールが行った実験の概略を図 1 に示す。非常に長い直線状の導線を強さ I の電流が紙面に垂直に流れている。AB は水平に置かれた磁針を表す。磁針は中央を支点で支えられその回りに回転できるようになっている。磁針全体の質量は m 、長さは $2l$ である。この問題において磁針というときは常に同じ磁針を意味するものとする。この装置の近くに磁石を置いて地磁気の影響を打ち消すようにしてある。彼らは「点 P で磁極に作用する力は導線に垂直で点 P を含む平面内にあり、導線を中心とする円周の接線方向を向く。また力の大きさは電流の強さ I に比例し直線電流と磁極の距離 r に依存する」と推測した。距離 r に依存するということをはっきり示すためにその力の大きさを $F(r)$ と書くことにする。磁針が図 1 のように傾くと磁針の両端と電流の間の距離は $r_A = \sqrt{r^2 + l^2} + 2rl \sin \theta$ 、 $r_B = \sqrt{r^2 + l^2} - 2rl \sin \theta$ となるが l は r に比べて非常に小さいので $r_A = r$ 、 $r_B = r$ と近似してよい。導線を中心とする円周の接線方向に A 点で $F(r)$ 、B 点で $-F(r)$ の力が作用するように極性を考慮して磁針を置く(図 1)。

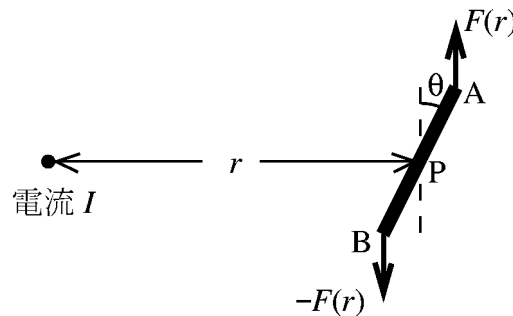


図 1:

電流を流す前に、磁針が導線に垂直な方向に対して小さな角 θ をなすようにして静止させる。そうしておいて電流を流すと、磁針は P 点を中心として振り子のように振動するであろう。その振動の周期 t が m 、 l 、 $F(r)$ にどのように依存するかを見出そう。

問 1 $t = hm^a l^b [F(r)]^c$ において次元の考察から a 、 b 、 c を定め、 t の式を与えよ。ただし h は次元をもたない定数である。

(物理量は、それぞれ質量 $[M]$ 、長さ $[L]$ 、時間 $[T]$ などの基本次元、あるいは速度 $[LT^{-1}]$ 、加速度 $[LT^{-2}]$ などのような組み合わせ次元をもつ。次元の考察から物理量の間どんな関係が成り立つかを知ることができる。たとえば質量 m の小さなおもりが長さ l のひもで吊り下げられた振り子を考えよう。この物理系に関与する物理量は l 、 m および重力加速度 g だけでありこれらの次元は $[L]$ 、 $[M]$ 、 $[LT^{-2}]$ である。周期の次元は $[T]$ であるから周

期は $\sqrt{\frac{l}{g}}$ に比例するに違いない。そこで s を数定数として、周期 $=s\sqrt{\frac{l}{g}}$ が得られる。このような考え方を次元解析という)

問2 電流の強さが $2I$ のときの磁針の振動周期を t_2 、強さ I のときの周期を t_1 とする。 $\frac{t_2}{t_1}$ を求めよ。ただし、電流以外の条件は同じであるとする。

ビオとサバルは直線電流と磁極の距離 r の値を変えて、それぞれの r の値について振動の10周期分の時間を測定した。表1に彼らが測定したデータを示す。

表1: ビオ・サバルの実験データ

r (mm)	10周期分の時間 観測値 (sec)
15	30.00
20	33.50
40	48.85
50	54.75
60	56.75
120	89.00

問3 $F(r) = ar^n$ と仮定する。 $n = 1, 0, -1, -2$ のうち表1のデータを最も良く再現する n の値はどれか。ただし a は定数である。

この実験によって「直線電流 I が直線から r の距離にある磁針に及ぼす力は r にどのように依存するか」ということと、「力の方向はその直線電流を中心とする円周の接線方向である」ことがわかった。しかしこの実験の精度は十分でない。ビオは微分積分の理論に基づいて「導線は微小な長さの要素から成り、各要素からの磁針への小さな寄与の総和が導線全体からの磁針への作用である」と考えた。微小要素からの寄与について物理的、数学的考察から1つの形を仮定した。

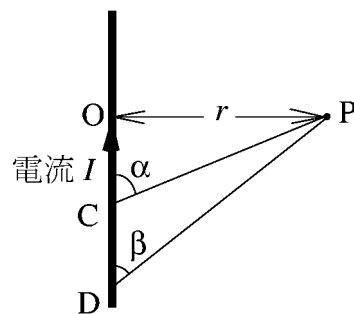


図2:

その結果、図2においてCD部分がP点にある磁極に及ぼす力の大きさを $f(r)$ と記すと、 $f(r)$ としてビオは以下の式を得た (k は定数)。

$$f(r) = k \frac{I}{r} (-\cos \alpha + \cos \beta) \quad (1)$$

問4 図1の磁針に働く力の大きさ $F(r)$ を、(1)式に基づいて k, I, r を用いて表せ。

問5 図3において、点Mより下の半直線部分が点Pにある磁極に及ぼす力を $G(r)$ と記す。(1)式に基づいて $G(r)$ を k, I, r, θ を用いて表せ。

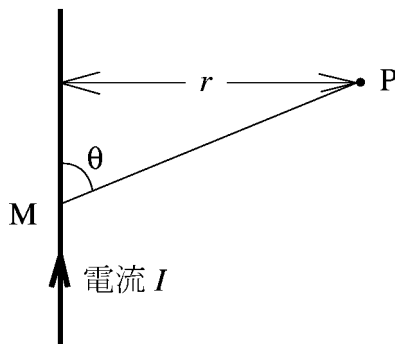


図3:

(1)式が正しいことを確認するためにビオは直線電流の代わりにV字型電流を用いるという巧妙な方法を思いついた。V字型電流が磁極に作用する力は、一部が欠けた直線電流が及ぼす力と等価であることに気がついたのである。一部を切り取られた直線電流などというものは現実には存在しないが、理論的にはそれと等価なものがV字型電流を用いて実現される。

問6 図4のV字型電流がP点にある磁極に及ぼす力を $V(r)$ と記そう。 $V(r)$ を α, i, r および k を用いて表せ。

問7 磁針を図1のP点で振動させたときの周期 t と図4のP点で振動させたときの周期 t' の比 $\frac{t}{t'}$ を α, i, r, I, k のうち必要な文字を用いて表せ。

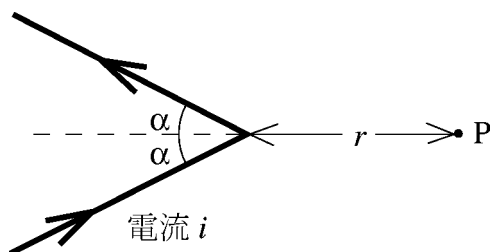


図4:

ビオは電流の強さ、磁針と電流の距離、V字型導線の角度をさまざまに変えて振動周期を測定しその比を理論値と比較することによって理論の正しいことを示した。1820年代にはまだ荷電粒子の存在が知られていなかったし、電流が荷電粒子の流れだということももちろんわかっていなかった。磁場という概念にも到達していなかったから、ビオにとっても当時の他の科学者にとっても、得られた結果は電流が磁極に及ぼす力の法則であって電流が作る磁場の法則ではなかった。19世紀も終わりころになって電流は荷電粒子の流れであり、電流は回りの空間に磁場を作りその磁場が磁極や電流に作用するという近接作用論が確立した。そうしてビオ・サヴァールの法則は実は電流の作る磁場の法則であることが理解されることになった。

第3問 (100点)

(解答するのに必要なら、最後のページの表にある数値を使っても良い)

不思議な星 — はくしよくわいせい白色矮星の発見

コペルニクスによる地動説(1543)は17世紀には科学的に認められていた。しかし、地球が本当に太陽の周りを回っているとすれば、地球は半年の間に位置を大きく変えることになる。そうすると、恒星の見える方向は少し変化するはずで、この現象を視差と呼ぶ。ところが、19世紀になっても恒星の視差は検出できていなかった。ベッセルは、この視差を測定する目的で、太陽系に近い恒星を観測した。具体的には、太陽系に近い恒星は明るく見えるはずなので、多数の明るい恒星の位置を正確に測定し、初めて恒星の視差を検出した。その一環として、シリウス(おおいて座の一番明るい星)の視差も検出している。ところが、シリウスは視差以外にも、星の位置のふらついていることがわかった。ふらつく原因は、近くに見えない星があり、二重星であろうと推定された(1844)。1862年にクラークが最新鋭の屈折望遠鏡でシリウスを観測して、シリウスのすぐそばに暗い星を検出した。この結果、明るい方(シリウスA)と暗い方(シリウスB)は同じような表面温度であるが、明るさが十等級ほども異なることがわかった。同じ表面温度で十等級の明るさの差は星の表面積が 10^4 倍異なっていることに相当する。つまり、星の直径に換算すると100倍違うことになる。一方、AとBとの運動状態から、AとBとは同程度の質量であることもわかった。Aは太陽のような星で、その密度は 1g/cm^3 程度であることから、Bの密度は $1 \times 10^6\text{g/cm}^3$ となり、その頃知られていたどんな物質よりも高密度であることがわかった。のちにシリウスBは白色矮星であることがわかる。ちなみに、純金の密度は 19.32g/cm^3 、我々が手に触れられる中で一番密度の高い物質はオスmiumで、それでも 22.57g/cm^3 にしか過ぎない。英の天文学者エディントンは「シリウスの結果は信じられないという点を除けば、物理的には何の疑問点もない」(1926)と言っている。それでは、この信じられない結果を解明しよう。

微視的世界の粒子の運動 — ハイゼンベルクの不確定性原理

ある時刻における電子など粒子の状態は、その粒子の位置と速度とで表される。物理学では、速度の代わりに運動量を使うことが多い。つまり、ある時刻における粒子の状態は、位置 \vec{r} と運動量 \vec{p} とで表される。ここでは、簡単のために x 軸に沿った1次元の運動に限って考えると、粒子の状態は、位置 x と運動量 p とで表される。微視的世界の電子、陽子、中性子などの粒子の運動を扱う量子力学によれば、ある粒子の位置と運動量とを同時に精度よく決めることができない。例えば、ある粒子の位置や運動量を測定して、位置は x と $x + \delta x$ の間、運動量は p と $p + \delta p$ の間と判った場合、 δx と δp との積はある値より小さくならない。つまり、位置をいつそう精度よく決める(δx を小さくする)と、運動量は精度よく決められない(δp は大きくなる)し、運動量を精度よく決める(δp を小さくする)と、今度は位置を精度よく決められない(δx は大きくなる)ことになる。これはハイゼンベルクの不確定性原理(1927)から導かれる自然の原理であり、測定精度の技術的な問題によるものではない。

位相空間という新しい座標系

粒子の運動状態を表す「位相空間」という概念を考えよう。ここでは1次元の場合を考えているので、横軸に位置 x 、縦軸に運動量 p を表す平面が位相空間である。ある時刻における粒子の位置と運動量が決めれば、その粒子の運動状態は位相空間上の一点で表すことができる。前に述べたハイゼンベルクの不確定性原理を言い換えると、位相空間内で1つの粒子は一点では

なく、ある体積(平面なので面積)を占めることになる。以下では電子、陽子、中性子などフェルミ粒子と呼ばれる粒子に限定する。フェルミ粒子の場合、位置の幅が δx 、運動量の幅が δp であるとする、 h をプランク定数として、その面積 $\delta x \delta p$ は $h/2$ になる。しかも、量子力学の原理によれば、同種類のフェルミ粒子が占める位相空間での領域はたがいに重なることができない。つまり、 N 個の同種粒子があるとき、その位相空間内で占める面積は $N h/2$ である。このように、多数の同種類粒子を考えた場合、位相空間内では広い領域を占める。逆に、位相空間内の $\Delta x \Delta p$ という領域には $\frac{\Delta x \Delta p}{h/2}$ 個までしか同種粒子を詰め込むことができない。

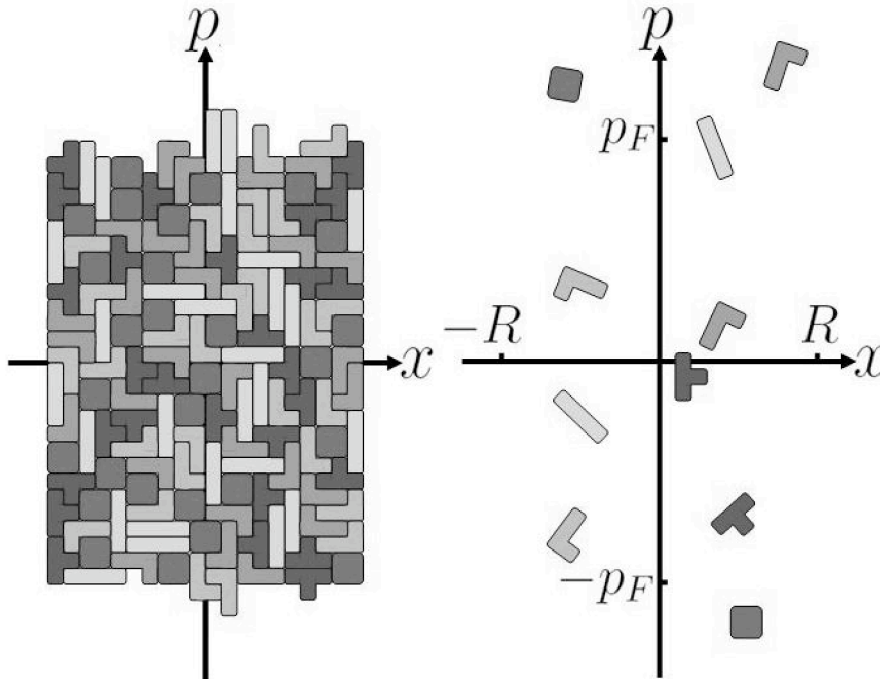


図 1: 1次元運動の場合のある時刻における位相空間の様子。1次元運動の場合、横軸に x 、縦軸に p をとった2次元(平面)の座標系が位相空間となる。位相空間内で一粒子の占める領域の形状は不定である(ここでは簡単のために5種類の図形で示した)が、その体積(ここでは面積)は一定である。左図は温度が低く縮退している状態を示す。右図は温度が高く、縮退していない状態を示す。

[I] 電子の縮退状態

速度の代わりに運動量で考える場合、質量 m の粒子の運動エネルギーは $\frac{p^2}{2m}$ と表されることに注意しよう。いま、1次元で N 個の粒子(ここでは電子とする)が $-R \leq x \leq R$ の範囲に詰め込まれているとする。ここで N はアボガドロ数のように1よりもはるかに大きな数である。温度が高いとき、電子は激しく運動するので、電子の運動量も大きく、図1右に示すように、位相空間内では広範囲に分布する。しかし、温度が下がってくると、電子の運動量も次第に小さくなる。一方、温度がどんなに低くなっても、位相空間内で一個の電子が占める面積は有限で、さらに電子同士は位相空間内では重ならないので、すべての電子の運動量がゼロになることはなく、運動量 p は、 $-p_F$ から p_F までの範囲を埋め尽くす。ここで p_F をフェルミ運動量という。このように、位相空間内で $-p_F \leq p \leq p_F$ の領域を電子が埋めつくしている状態を

「電子が縮退している」と呼ぶ。その様子を示したものが、図1の左である。そこで、 N が与えられたとき、縮退した電子の運動エネルギーの総和 U_d を R と N とで表したい。以下の小問にしたがって解いていこう。

問1 電子の運動量の大きさをできるだけ小さくして、位相空間を N 個の電子で埋めていくと電子は縮退状態になる。この場合、電子は横軸で $-R \leq x \leq R$ 、縦軸で $-p_F \leq p \leq p_F$ の領域を埋め尽くすことになる。このとき、電子の持つ最大の運動量 p_F は、

$$p_F = \frac{hN}{8R} \quad (1)$$

となることを示せ。

問2 運動エネルギーは電子の位置 x にはよらず、電子の運動量 p だけで決まる。そこで、 Δp を十分小さいとみなして、位相空間内で運動量が p と $p+\Delta p$ の間にあり、位置が $-R \leq x \leq R$ の領域に入っている電子について考えてみると、 m_e を電子の質量として、それらは全て同じ運動エネルギー $\frac{p^2}{2m_e}$ を持つとみなせる。この領域に含まれる全電子の持つ運動エネルギーの総和 ΔU_d を求めよ。

問3 つぎに、いろいろな運動量 p についての運動エネルギーの総和をとれば、全運動エネルギー U_d が求まる。つまり $U_d = \sum \Delta U_d$ である。ここで、総和を積分に変えると、積分範囲は $-p_F$ から p_F である。以上のことと (1) 式を利用して、 U_d を N と R との関数として求めよ。

[II]

電子の縮退圧

ハイゼンベルクの不確定性原理のために、温度が低下すると電子は縮退するので、いくら温度が低くても全エネルギー U_d がゼロになることはない。このとき、外力により (1次元) 体積を押し縮めると、つまり R を小さくすると、 U_d が増加する。増加分は外力のした仕事だから、圧力

$$P = -\frac{dU_d}{dR} \quad (2)$$

が働いていることになる。この圧力のことを電子の縮退圧と言う。同様に陽子の集団を考えた場合にも、陽子は縮退して、これによる縮退圧が発生する。一方、電子と陽子など異なる粒子の間では位相空間内で占める体積の重なることが可能である。つまり、縮退圧は、同種類の粒子に対してだけ成立する概念であり、粒子の種類毎に別々に求められる。

問4 温度が十分に低く電子と陽子とが共に縮退している場合で、ある体積に電子と陽子とが同じ個数含まれるとき、電子の縮退圧は陽子の縮退圧よりも何倍大きいか？

[III]

相対論的または非相対論的な運動エネルギー

粒子の速度が光速に近づいた場合には「相対論」で考える必要がある。それに対して、粒子の速度が光速に比べて十分に遅い場合は「非相対論的」と呼ぼう。

アインシュタインの相対論によれば、粒子のエネルギー E は、光速 c 、(静止)質量 m と運動量 \vec{p} とを用いて $E = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2}$ と表される。ただし、 $p = |\vec{p}|$ である。このうち、 $\vec{p}=0$ 、つまり静止しているときのエネルギー mc^2 との差を運動エネルギーと呼ぶことにする。数式で記述すると以下のようなになる。

$$\text{運動エネルギー} = E - mc^2 = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2} - mc^2$$

相対論的な場合は $pc \gg mc^2$ 、非相対論的な場合は $pc \ll mc^2$ が成り立つ。また、相対論によれば、粒子の速度は光速を越えることはない。

問5 粒子の運動エネルギーは、非相対論的な場合には $\frac{p^2}{2m}$ 、相対論的な場合には pc 、と近似できることを示せ。必要なら、 $|x| \ll 1$ のとき、 $\sqrt{1+x} \doteq 1 + \frac{1}{2}x$ と近似せよ。

非相対論的な場合には、粒子の速度を v とすると、 $p = mv$ だから、運動エネルギーはよく知られたように $\frac{1}{2}mv^2$ と表される。

[IV]

3次元空間での電子の縮退圧

次に、問1から問3で求めた1次元の例をもとに3次元の場合を考えよう。このときは電子の位置 $\vec{r}=(x, y, z)$ と運動量 $\vec{p}=(p_x, p_y, p_z)$ とで作る6次元空間が位相空間である。この位相空間内に占める電子一個あたりの6次元体積は、位置に関する体積が $\delta x \delta y \delta z$ 、運動量に関する体積が $\delta p_x \delta p_y \delta p_z$ であるので、その積として $\delta x \delta y \delta z \delta p_x \delta p_y \delta p_z$ となり、これは $h^3/2$ である。そこで、 N 個の電子が半径 R の球内に詰め込まれており、それらが縮退しているとき、以下の誘導問題に従って、その球内での電子の全運動エネルギー U_d を N と R とを使って表そう。

計算を簡素化するための係数について

3次元の場合、半径の3乗と体積との間には $\frac{4\pi}{3}$ という係数がつく。そこでこれ以降の計算においては、以下の定数 k を導入する。

$$k^3 \equiv 2 \times \left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 \quad \text{で } k \text{ を定義する}$$
$$k = 3.274 \quad \text{が近似値である}$$

問6 電子の運動量の大きさをできるだけ小さくして、位相空間を N 個の電子で埋めて、縮退状態にしよう。この場合、位置 \vec{r} に関して半径 R の球内 (つまり $r \leq R$)、運動量 \vec{p} に関して半径 p_F の球内 (つまり $p \leq p_F$) の領域を埋め尽くしている。ここで $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 、 $p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$ である。このとき、電子の持つ最大の運動量 p_F を N と R との関数と

して求めよ。

問7 運動エネルギーは電子の位置 \mathbf{r} にはよらず、電子の運動量 \mathbf{p} の大きさ p だけで決まる。そこで、 Δp を十分小さいとみなして、位相空間内で運動量の大きさは p と $p + \Delta p$ 、位置は $r \leq R$ の領域に入っている電子について考えてみると、それらは全て同じ運動エネルギーを持つとみなせる。この領域の位相空間の体積は $\frac{4\pi}{3} R^3 4\pi p^2 \Delta p = \frac{3}{2} k^3 R^3 p^2 \Delta p$ とみなせることに注意しよう。この領域に含まれる全電子の持つ運動エネルギーの総和 ΔU_d を、問5を参照し、非相対論的な場合と相対論的な場合に分けて別々に求めよ。

問8 つぎに、いろいろな運動量の大きさ p について運動エネルギーの総和をとれば、全運動エネルギー U_d が求まる。ここで、総和を積分に変えると、積分範囲は0から p_F である。以上のことと問6, 7の結果とを利用して、 U_d を N と R との関数として求めると次のようになる。それぞれの場合について、 N と R の指数 a, b を求めよ。

非相対論的な場合を仮定して運動エネルギーを計算する場合

$$U_d = \frac{3}{10} \frac{h^2}{k^2 m_e} N^a R^b$$

相対論的な場合を仮定して運動エネルギーを計算する場合

$$U_d = \frac{3}{4k} h c N^a R^b$$

[V]

太陽の未来

太陽は宇宙にある典型的な星で、半径は $7 \times 10^8 \text{m}$ の球で、中心部分は $1.4 \times 10^7 \text{K}$ にもなる高温状態で水素の核融合反応が起こっている。星を押し潰そうとする重力に対して、高温ガスの圧力が十分に高く、圧力と重力とが釣り合っており、誕生後50億年経過した現在も大きさや温度が一定で、安定して輝いている。温度の高い星の中心部分では水素原子核（つまり陽子）が核融合を起こし、ヘリウム原子核に変換している。このとき大量の熱エネルギーを出し、星を高温に保っている。太陽の場合、誕生後100億年ほど経過すると、複雑な経過をたどるものの、中心部分ではヘリウム原子核ばかりになり、核融合は停止し、エネルギー発生が止まり、温度が下がる。その結果、圧力が下がり、重力のために星は収縮していく。それではどこまで収縮するのだろうか？ 限りなく収縮するのだろうか？ 収縮がどこかで止まるとしたら、どういう状態なのだろうか？

星の重力エネルギー

今、微小質量 Δm を集めて一様な密度の星を次第に作っていく場合、星の半径が r のときの星の質量を $m(r)$ とし、 Δm の重力の位置エネルギー（これを重力エネルギーと呼ぶ）を考えよう。 G を万有引力定数として、 Δm が星の中心から距離 x ($x \geq r$) にあるときに、 Δm に働く万有引力の大きさ F は次のようになる。

$$F = \frac{G m(r) \Delta m}{x^2}$$

重力エネルギーの基準を無限遠点 ($x = \infty$) にとると、 Δm を無限遠 ($x = \infty$) から星表面 ($x = r$) まで移動させたとき、重力に対して外力のする仕事量 ΔU_g は F を x で積分して次のように求まる。

$$\Delta U_g = \int_{\infty}^r F dx = -\frac{G m(r) \Delta m}{r}$$

このように、星を作る物質 Δm のもつ重力エネルギーは ΔU_g に等しい。その値は、星の密度が一様な場合は、中心から Δm までの距離を r として、 r よりも内側にある質量 $m(r)$ で決まり、上式のように与えられる。密度が一様な場合、質量 M 、半径 R の星 (つまり $M = m(R)$ である) の重力エネルギーがどのくらいになるか以下の小問に従って求めよう。

問9 Δr を十分小さいとみなして、星内部で半径が r から $r + \Delta r$ の領域に入っている物質の質量を Δm とすれば、その重力エネルギーが上式で与えられることになる。この領域の体積は $4\pi r^2 \Delta r$ とみなせることに注意して、この領域に含まれる質量の持つ重力エネルギー ΔU_g を G 、 M 、 R 、 r 、 Δr を使って求めよ。

問10 つぎに、いろいろな半径についての総和をとれば、全重力エネルギー U_g が求まる。ここで、総和を積分に変えると積分範囲は 0 から R となる。以上のことを利用して、星の全重力エネルギー U_g を G 、 M 、 R を使って求めよ。

[VI]

星の進化

この星 (半径 R 、質量 M) は、密度一様で水素をすべて核融合反応でヘリウムに変換してしまっているとする。ヘリウムは中性子、陽子、電子からなり、個数比では $1 : 1 : 1$ である。中性子と陽子とは同じ質量とみなせるのでまとめて核子と呼ぶ。核子に対して、電子ははるかに軽いので、原子の質量は核子の数だけで決まる。一方、問4でみたように、電子の縮退圧は核子の縮退圧よりもはるかに大きいので、縮退圧は電子の数だけで決まる。ここで、電子数に対する核子数の比を y とおけば、ヘリウムの場合には $y = 2$ である。このとき、星に含まれる電子の総数 N と星の質量 M とには、 m_H を核子質量として、 $M = y m_H N$ の関係がある。この関係を用いると、問8で求めた電子の縮退圧に起因する全運動エネルギー U_d は、 N の代わりに M を使って表すことができる。質量 M の星が重力的に収縮する場合、半径 R は小さくなる。星の全エネルギー U は、問10で求めた負の値である全重力エネルギー U_g と、問8で求めた正の値である電子の縮退圧に起因する全運動エネルギー U_d の和だから、 $U = U_g + U_d$ である。収縮する星は U が最小値になったところで収縮は止まり安定するので、この安定状態を白色矮星と呼ぶ。

問11 白色矮星内部での密度は一様で、電子の振る舞いは非相対論的であると考えて、その半径と密度とを求めよ。特に、太陽が白色矮星になった場合の半径と密度とを数値計算せよ。

問 12 太陽よりも質量の大きな星が収縮して白色矮星になった場合、半径は小さくなり、密度は高くなる。その結果、縮退した電子の運動量は大きくなり、相対論的領域になる。すべての電子が相対論的とみなせる場合の全エネルギーは R^{-1} に比例することを示せ。この場合の星の安定性を調べ、星の質量がある値を超える場合には白色矮星とはならず潰れてしまうことを説明せよ。

問 13 密度が十分に高くなった星の電子の運動エネルギーの表式は相対論的になる。この場合、前問で調べたように、ある質量を越える星は潰れてしまう。そこで星が潰れないための限界質量を、発見者にちなんでチャンドラセカール質量と呼ぶ (1930 年代)。チャンドラセカール質量を求めよ。また、太陽質量 M_{\odot} の何倍になるか？

[VII]

チャンドラセカール質量

実際の白色矮星では、 y は 2 より少し大きいこと、密度が一様でないこと、全ての電子が相対論的ではないことなどにより、チャンドラセカール質量は、ここで計算した値よりも少しだけ小さいということを注意しておこう。チャンドラセカール質量以下の星で、密度が高く電子の運動量表式が相対論的である星は膨張し密度が下がる。密度が下がった結果、電子の運動量表式が非相対論的になり、問 11 で求めたように白色矮星として安定する。これに対して、チャンドラセカール質量以上の星の場合、核融合を停止した星の重力を電子の縮退圧では支えられない。そのために星はさらに収縮し密度が上がる。こうなると、電子は陽子に取り込まれ中性子に変化する。こうして、すべての核子が中性子となった中性子星となる。

問 14 これまでの議論をそのまま応用して、チャンドラセカール質量をわずかに超えた星が中性子星になった場合、縮退した全ての中性子は非相対論的であると考え、中性子星の半径を数値計算せよ。これに対して、チャンドラセカール質量よりわずかに軽い星は白色矮星になる。それでは、この白色矮星の半径は中性子星の半径の何倍くらいになるか？

ブラックホール

こうして、太陽のような星が核融合反応を停止し、発熱しなくなると、重力のために収縮する。星の質量が太陽くらいであれば、電子が縮退してその縮退圧で収縮を止め白色矮星となる。星の質量がチャンドラセカール質量を越えていると電子の縮退圧では重力を支えきれずに、電子は陽子に取り込まれ、中性子となる。こうして、中性子が縮退してその縮退圧で収縮を止め中性子星となる。同様にして、星の質量がさらにある値を越えていると、中性子の縮退圧でも重力を支えきれなくなる。この場合には、さらに潰れてすべてのものを飲み込んでしまうブラックホールとなる。

万有引力定数	$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$
プランク定数	$h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}$
光速度	$c = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$
電子質量	$m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
核子（陽子, 中性子）質量	$m_H = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg} = 1830 m_e$
太陽質量	$M_\odot = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$
太陽半径	$R_\odot = 6.96 \times 10^8 \text{ m}$