

応募理論問題

【解答】

第1問

問1 物体 P にはたらく垂直抗力の大きさを  $R$  とすると、最大摩擦力の大きさは  $\mu_0 R$  である。糸  $S_1$  の張力が  $T_1$  のとき、面 AB に平行な方向と垂直な方向の力のつり合いは、

$$T_0 \cos \frac{\pi}{4} = T_1 \cos \frac{\pi}{4} + \mu_0 R$$

$$T_0 \sin \frac{\pi}{4} + T_1 \sin \frac{\pi}{4} = R$$

となる。これらより、 $R$  を消去して、

$$T_1 = \frac{\cos \frac{\pi}{4} - \mu_0 \sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4} + \mu_0 \sin \frac{\pi}{4}} T_0 = \frac{1 - \mu_0}{1 + \mu_0} T_0$$

が得られる。

問2 糸  $S_2$  に吊るすおもりの質量が最小のとき 物体 P、Q に共に最大摩擦力がはたらく。重力加速度の大きさを  $g$  とすると、糸  $S_2$  の張力  $m_2 g$  は、問1と同様に、

$$m_2 g = \frac{\cos \frac{\pi}{4} - \mu_0 \sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4} + \mu_0 \sin \frac{\pi}{4}} T_1$$

となるから、 $T_0 = Mg$  として、

$$m_2 = \left( \frac{\cos \frac{\pi}{4} - \mu_0 \sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4} + \mu_0 \sin \frac{\pi}{4}} \right)^2 M = \frac{(1 - \mu_0)^2}{(1 + \mu_0)^2} M$$

となる。

問3 右端の糸に吊るすおもりの質量が  $m$  のとき、正  $2n$  角形の各面と各物体の間にはすべて最大摩擦力がはたらくから、

$$m = \frac{\left( \cos \frac{\pi}{2n} - \mu_0 \sin \frac{\pi}{2n} \right)^n}{\cos \frac{\pi}{2n} + \mu_0 \sin \frac{\pi}{2n}} M$$

となる。

問4 円柱は正  $2n$  角形で  $n \rightarrow \infty$  としたものと考えられるから、前問3の結果より、 $n \rightarrow \infty$  のとき、

$$M = \left( \frac{\cos \frac{\pi}{2n} + \mu_0 \sin \frac{\pi}{2n}}{\cos \frac{\pi}{2n} - \mu_0 \sin \frac{\pi}{2n}} \right)^n m = \left( \frac{1 + \mu_0 \frac{\pi}{2n}}{1 - \mu_0 \frac{\pi}{2n}} \right)^n m = \left( 1 + \mu_0 \frac{\pi}{n} \right)^n m$$

である。ここで、 $h = \frac{n}{\mu_0 \pi}$  とおくと、 $n = \mu_0 \pi h$  となるから、

$$\left(1 + \mu_0 \frac{\pi}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{h}\right)^{\mu_0 \pi h} \rightarrow e^{\mu_0 \pi}$$

と書ける。

これより、0回巻きで円柱にひもをかけたばかりのとき、質量  $M$  のおもりを支える最小のおもりの質量を  $m$  とすると、

$$M = e^{\mu_0 \pi} m \quad \dots$$

となる。

ひもを円柱に巻き付けたとき、ひもの質量が無視できるから、円柱の下側のひもの張力も上側のひもと同じように扱える。よって、 $N$  回巻きしたとき、質量  $M$  のおもりを支える最小のおもりの質量を  $m_0$  とすると、

$$M = e^{(2N+1)\mu_0 \pi} m_0 \quad N = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu_0 \pi} \ln \frac{M}{m_0} - 1 \right)$$

となる。

ここで、 $\ln$  は底が  $e$  の自然対数を表す。 $\mu_0 = 1.0$ 、 $M = 60 \text{ kg}$ 、 $m_0 = 10 \times 10^{-3} \text{ kg}$  を代入して、

$$N \approx 0.88$$

が得られる。

これより、最低 1 回巻きけばよいことがわかる。

問5 おもり  $W_1$  が最下点から上昇に転ずる条件は、式の導出と同様にして、

$$M_0 > e^{\mu_0 \pi} M_1 \quad \frac{M_0}{M_1} > e^{\mu_0 \pi} = e^{\pi} \quad \underline{23}$$

である。

問6 ひもの質量が無視できるため、ひもが円柱面上を加速度をもって滑っているとき、円柱面上の微小な長さのひもにはたらく力がつり合っている。したがって、おもり  $W_0$  にはたらくひもの張力  $T'_0$  とおもり  $W_1$  にはたらくひもの張力  $T'_1$  の関係は、式の導出と同様に求めることができる。

おもり  $W_1$  が下降しているとき、 $T'_0$  と  $T'_1$  の関係は、 $T'_0 = e^{-\mu \pi} T'_1$ 、 $W_1$  が上昇しているとき、

$T'_0 = e^{\mu \pi} T'_1$  となる。

( )  $W_1$  が下降しているとき(図 a)、おもり  $W_0$  と  $W_1$  の運動方程式は、 $W_1$  の上向きの加速度を  $\alpha_d$  とすると、

$$M_0 \alpha_d = M_0 g - e^{-\mu \pi} T'_1$$

$$M_1 \alpha_d = T'_1 - M_1 g$$

これらより、 $T'_1$  を消去して、

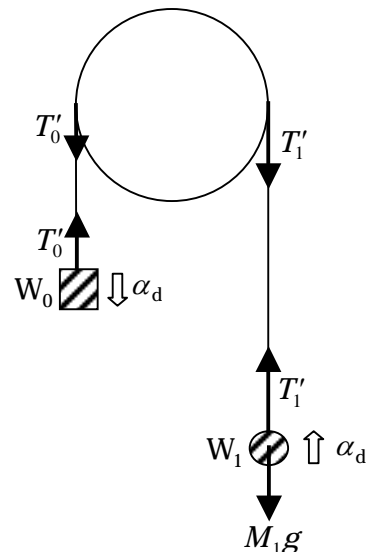


図 a

$$\alpha_d = \frac{M_0 - M_1 e^{-\mu\pi}}{M_0 + M_1 e^{-\mu\pi}} g = \text{一定}$$

となる。

したがって、等加速度運動の式より、点Oからの下降距離Lは、

$$0^2 - v_0^2 = 2(-\alpha_d)L \quad L = \frac{v_0^2}{2\alpha_d} = \frac{1}{2} \left( \frac{M_0 + M_1 e^{-\mu\pi}}{M_0 - M_1 e^{-\mu\pi}} \right) \frac{v_0^2}{g}$$

である。

( )  $W_1$ が上昇しているとき、 $W_1$ の上向きの加速度 $\alpha_u$ は、 $\alpha_d$ で $e^{-\mu\pi}$   $e^{\mu\pi}$ として、

$$\alpha_u = \frac{M_0 - M_1 e^{\mu\pi}}{M_0 + M_1 e^{\mu\pi}} g$$

である。

したがって、点Oを通過するときの $W_1$ の速さ $v_1$ は、

$$v_1^2 - 0^2 = 2\alpha_u L \quad v_1 = \sqrt{2\alpha_u L} = v_0 \sqrt{\frac{(M_0 - M_1 e^{\mu\pi})(M_0 + M_1 e^{-\mu\pi})}{(M_0 + M_1 e^{\mu\pi})(M_0 - M_1 e^{-\mu\pi})}}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \frac{v_0}{v_1} &= \sqrt{\frac{(M_0 + M_1 e^{\mu\pi})(M_0 - M_1 e^{-\mu\pi})}{(M_0 - M_1 e^{\mu\pi})(M_0 + M_1 e^{-\mu\pi})}} \\ &= \sqrt{\frac{\left(\frac{M_0}{M_1} + e^{\mu\pi}\right)\left(\frac{M_0}{M_1} - e^{-\mu\pi}\right)}{\left(\frac{M_0}{M_1} - e^{\mu\pi}\right)\left(\frac{M_0}{M_1} + e^{-\mu\pi}\right)}} \quad \underline{1.3} \end{aligned}$$

である。

### 【参考】 エネルギー保存則

円柱からひもにはたらく動摩擦力の仕事を求め、エネルギー保存則について考えてみよう。

おもりに $W_1$ が下降しているとき、 $W_1$ にはたらくひもの張力の大きさ $T'_1$ は、

$$T'_1 = M_1(\alpha_d + g) = \frac{2M_0}{M_0 + M_1 e^{-\mu\pi}} M_1 g$$

である。ひもに円柱からはたらく動摩擦力の大きさ $F_d$ は、

$$F_d = T'_1 - T'_0 = (1 - e^{-\mu\pi})T'_1 = \frac{2M_0(1 - e^{-\mu\pi})}{M_0 + M_1 e^{-\mu\pi}} M_1 g$$

となる。

$W_1$ が上昇しているとき， $W_1$ にはたらくひもの張力の大きさ $T_1''$ は，

$$T_1'' = \frac{2M_0}{M_0 + M_1 e^{\mu\pi}} M_1 g$$

となる。ひものに円柱からはたらく動摩擦力の大きさ $F_u$ は， $W_0$ にはたらくひもの張力の大きさを $T_0''$ として，

$$F_u = T_0'' - T_1'' = (e^{\mu\pi} - 1)T_1'' = \frac{2M_0(e^{\mu\pi} - 1)}{M_0 + M_1 e^{\mu\pi}} M_1 g$$

となる。これより，おもりがはじめの位置に戻るまでの動摩擦力の仕事は，

$$W = -(F_d + F_u)L = -\frac{(M_0 + M_1)M_0M_1(e^{\mu\pi} - e^{-\mu\pi})}{(M_0 + M_1 e^{\mu\pi})(M_0 - M_1 e^{-\mu\pi})} v_0^2$$

である。一方，おもりの $W_1$ ， $W_2$ の運動エネルギーの変化は，

$$\begin{aligned} \Delta K &= \frac{1}{2}(M_0 + M_1)(v_1^2 - v_0^2) = \frac{1}{2}(M_0 + M_1) \left\{ \frac{(M_0 - M_1 e^{\mu\pi})(M_0 + M_1 e^{-\mu\pi})}{(M_0 + M_1 e^{\mu\pi})(M_0 - M_1 e^{-\mu\pi})} - 1 \right\} \\ &= -\frac{(M_0 + M_1)M_0M_1(e^{\mu\pi} - e^{-\mu\pi})}{(M_0 + M_1 e^{\mu\pi})(M_0 - M_1 e^{-\mu\pi})} v_0^2 \end{aligned}$$

となる。よって， $\Delta K = W$  となっていることが確かめられる。

## 第2問

問1 題意より，真空中の光速は， $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$  と表される。また，波長  $\lambda$  の光に対するガ

ラスの誘電率を  $\varepsilon$ ，透磁率を  $\mu (= \mu_0)$  とすると，ガラス中の光速は， $c_G = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$  と書け

るから，

$$n_G = \frac{c}{c_G} = \sqrt{\frac{\varepsilon \mu}{\varepsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\varepsilon_r} \quad n_G^2 = \varepsilon_r$$

である。

問2 コンデンサーの容量  $C$  は，コンデンサーにかかる電圧を  $V$ ，蓄えられる電荷を  $Q$  と

するとき， $C = \frac{Q}{V}$  で定義されるから，同じ電荷  $Q$  を蓄えると，極板間の電圧は，容量

に反比例する。極板間隔を  $d$  とすると，極板間の電場の強さは， $E = \frac{V}{d}$  と表されるか

ら，容量  $C_0$  のコンデンサーに電荷  $Q$  を蓄えたときの極板間電圧を  $V_0$  として，

$$\frac{E}{E_0} = \frac{V}{V_0} = \frac{C_0}{C} = \frac{C_0}{\varepsilon_r C_0} \quad E = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

となる。

問3 位置  $x$  での荷電粒子の運動方程式は，

$$m\alpha = -kx \quad \alpha = -\frac{k}{m}x = -\omega_0^2 x$$

より，

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

となる。

問4 振動電場をかけたときの荷電粒子の運動方程式は，

$$\begin{aligned} m\alpha &= -kx + qE(t) \\ &= -m\omega_0^2 x + qE_0 \cos \omega t \end{aligned}$$

と書ける。ここで， $x(t) = A \cos \omega t$  とすると，加速度は  $\alpha = -A\omega^2 \cos \omega t$  であるから，

$$A = \frac{qE_0}{m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

が得られる。

問5 電磁波により，ガラスに角振動数  $\omega$  の外部電場  $E_{\text{ex}}(t)$  がかけられたとき，ガラス板

内の電場  $E(t)$  は，分極電荷による電場  $E_p(t) = bx(t)$  を用いて，

$$E(t) = E_{\text{ex}}(t) - E_p(t)$$

と表されるから，ガラスの比誘電率  $\epsilon_r$  は，

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{E_{\text{ex}}(t)}{E(t)} = 1 + \frac{E_p(t)}{E(t)} = 1 + b \frac{x(t)}{E(t)} \\ &= 1 + b \frac{A}{E_0} = 1 + b \frac{q}{m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

となる。これより，

$$n_G = \sqrt{\epsilon_r} = \sqrt{1 + b \frac{q}{m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}} \quad \dots$$

を得る。

ガラスの可視光に対する屈折率  $n$  は 1 より大きいことから，ガラス分子の固有角振動数  $\omega_0$  は可視光の角振動数  $\omega$  より大きいことがわかる。可視光の中で波長の長い赤色の光では，その角振動数  $\omega$  が固有角振動数  $\omega_0$  から大きく離れるため屈折率は小さくなり，その結果，プリズムによる屈折角も小さくなる。波長が短い紫色の光では，その角振動数  $\omega$  が固有角振動数  $\omega_0$  に近いいため屈折率は大きくなり，その結果，プリズムによる屈折角も大きくなる。

問6 式より，

$$n_G^2 = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \dots$$

となる。ここで， $\omega_p^2 = b \frac{q}{m}$  であり，角振動数  $\omega$  は波長  $\lambda$  を用いて  $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$  ( $c$  : 真空中の光速) と表される。

波長  $\lambda_1$  ,  $\lambda_2$  に対する角振動数をそれぞれ  $\omega_1$  ,  $\omega_2$  , 対応するガラスの屈折率を  $n_1$  ,  $n_2$  とすると，式より，

$$\begin{aligned} \omega_p^2 &= (n_1^2 - 1)(\omega_0^2 - \omega_1^2) \\ &= (n_2^2 - 1)(\omega_0^2 - \omega_2^2) \end{aligned}$$

となる。これより，

$$\omega_0^2 = \frac{(n_2^2 - 1)\omega_2^2 - (n_1^2 - 1)\omega_1^2}{n_2^2 - n_1^2} \quad \dots$$

を得る。また，角振動数が  $\omega_0$  に等しい電磁波の波長  $\lambda_0$  は，

$$\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0} \quad \dots$$

である。式へ  $\lambda_1 = 7.682 \times 10^{-7} \text{ m}$  ,  $n_1 = 1.466$  , および  $\lambda_2 = 5.876 \times 10^{-7} \text{ m}$  ,  $n_2 = 1.471$  を代入し，式を用いると，

$$\omega_{01} = \underline{1.86 \times 10^{16}} \text{ rad/s} , \lambda_{01} = \underline{1.01 \times 10^{-7}} \text{ m}$$

となる。

同様に ,  $\lambda_1 = 5.876 \times 10^{-7} \text{ m}$  ,  $n_1 = 1.471$  ,  $\lambda_2 = 4.047 \times 10^{-7} \text{ m}$  ,  $n_2 = 1.482$  とすると ,

$$\omega_{02} = \underline{2.07 \times 10^{16}} \text{ rad/s} , \lambda_{02} = \underline{0.91 \times 10^{-7}} \text{ m}$$

となる。  $\lambda_1 = 7.682 \times 10^{-7} \text{ m}$  ,  $n_1 = 1.466$  ,  $\lambda_2 = 4.047 \times 10^{-7} \text{ m}$  ,  $n_2 = 1.4823$  とすると ,

$$\omega_{03} = \underline{2.01 \times 10^{16}} \text{ rad/s} , \lambda_{03} = \underline{0.94 \times 10^{-7}} \text{ m}$$

となる。

いま , 波長が  $\lambda (> \lambda_0)$  の光に対しては , 上のような簡単なモデルでプリズムによる光の分散をほぼ説明することができる。

## 【応募理論問題・講評】

今回の応募理論問題は、昨年のものに比べてやや難しかったためか、応募者数に対する答案提出者数の割合が低くなったこと、また、提出された答案の中にも、白紙答案が多く含まれていた。問題が難しかったと言っても、問題文の誘導にしたがって行けば、それほど難問ではなく、順番に解答を得ることができるようになっていたのではないかと思います。実際、優れた答案を書いている応募者も少なからずおり、応募者間の点数差が大きくなりました。最後の電卓を用いた数値計算は、かなり手間がかかったかも知れません。

### 第1問

摩擦のあるアトウッドの装置に関して、細かく誘導を付けて考察させる問題でした。誘導にしたがえば、それほど難問ではないと思ったのですが、はじめから諦めている応募者が多々見られました。

[ ]  $P, Q$  が静止できる条件は、 $P, Q$  にはたらく静止摩擦力が共に最大摩擦以下になればよいわけです。糸  $S_2$  の端に吊るすおもりの質量が最小のとき、 $P, Q$  にはたらく静止摩擦力は共に、最大摩擦になります。ここまでで力尽きている答案が一定程度見られましたが、もう少し先まで考察してもらえればよかったと思います。

[ ], [ ] 正四角柱を正  $n$  角柱に拡張し、与えられている  $e$  の定義式を用いて  $n \rightarrow \infty$  の極限を考える問題です。わずか1回巻いただけで60 kgの人を10 gのおもりで支えることができるという問4の結果には、驚きを感じた人も多かったのではないのでしょうか。ここでは、ひもと円柱面の間の静止摩擦係数を、きれいな数になるように  $\mu_0 = 1.0$  としましたが、実際にはもう少し小さいかもしれません。しかし  $\mu_0 = 0.5$  としても、ひもを巻く回数が2倍程度増えるだけです。西部劇などで、馬の手綱を棒に2~3回巻いただけで繋いでおくシーンを見たことがあるかもしれません。この問題の結果を考えれば、そのようなシーンも納得がいくでしょう。

[ ] ひもの質量が無視できる場合、ひもと円柱面の間の静止摩擦力を考えた上の考察は、ひもが動摩擦を受けながら加速度をもって円柱面上を滑っている場合にも、静止摩擦係数  $\mu_0$  を動摩擦係数  $\mu$  に置き換えるだけでそのまま適用することができます。このことに気付き、最後の問6まで完璧な答案を提出した応募者が一定程度見られたことに勇気付けられました。

この問題は、オイラー(Leonhard Euler, 1707-1783)によって考えられた「ベルトの理論」に基づいています。ベルトの理論は普通、円柱のまま扱い、積分して結果を得るのですが、ここでは、円柱を正  $n$  角柱の  $n \rightarrow \infty$  の極限と考えて、誘導を付けて解いてもらいました。オイラーのベルトの理論を紹介しているインターネットのホームページの URL を記入している答案もありました。

### 第2問

三角プリズムに白色光をあてたときに見られる光の分散を、光が電磁波であることを考慮して説明させる問題です。光をガラスに照射すると、ガラス分子内の電子が振動電場により振動し、その振動数によって誘電率が決まり屈折率が定まる。こうしてガラスの屈折率と照射する光の角振動数との関係を求めます。詳しい誘導が付けられているので、問1



～問4は、比較的よく出来ていました。

**問5** 誘電体内の振動する荷電粒子(電子)は、誘電体内に生じる振動電場  $E(t) = E_0 \cos \omega t$  から力を受けるのであり、誘電体にかけた外部の振動電場  $E_{ex}(t)$  から直接力を受けるわけではありません。しかし、荷電粒子が  $E_{ex}(t) = E_0 \cos \omega t$  から力を受けると考えて解答した答案が多く見受けられました。ただし、第0近似として、荷電粒子は外部電場から力を受けると考えても、それほど不適切とは言えません。そこで、そのような答案に対してもある程度の点数を与えることにしました。

この場合、【解答】は次のようになります。

$$\varepsilon_r = \frac{E_{ex}(t)}{E(t)} = \frac{E_{ex}(t)}{E_{ex}(t) - E_p(t)} = \frac{1}{1 - \frac{E_p(t)}{E_{ex}(t)}} = \frac{1}{1 - b \frac{x(t)}{E_{ex}(t)}}$$

ここで、荷電粒子が外部振動電場  $E_{ex}(t) = E_0 \cos \omega t$  から力を受けるとすると、問4より、

$$A = \frac{qE_0}{m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

となることを用いて、

$$\varepsilon_r = \frac{1}{1 - b \frac{A}{E_0}} = \frac{1}{1 - b \frac{q}{m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

と書けます。これより、ガラスの屈折率  $n_G$  は、【解答】の式の代わりに、

$$n_G = \frac{1}{\sqrt{1 - b \frac{q}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}}}$$

で与えられます。

**問6** 光学ガラス FK1 の波長と屈折率のデータを3つ与えましたが、ガラスの固有振動数  $\omega_0$  と対応する波長  $\lambda_0$  は、どの2つのデータを用いても構いません。どの2つのデータを用いるかによって3種類の  $\omega_0$  と  $\lambda_0$  の値を求めることができるので、これら3種類の値の平均値を求めている優れた答案も多々見られました。

また、式を用いた答案は、その後の計算が正しい限り正解としての点数を与えました。

この問題を通して、屈折率の波長依存性がどのようにして決められるのか、その本質的部分を理解してもらえれば有難いと思います。