

物理チャレンジ

第2チャレンジ 理論問題

過去問題集 解答例付

2016–2020

公益社団法人 物理オリンピック日本委員会

目 次

1	2020 年	1
	第 1 問 気泡の物理	1
	第 2 問 A 誘電体の屈折率	7
	第 2 問 B 大気中の光線軌道	14
	第 3 問 特殊相対論	20
	解答例	26
2	2019 年	44
	第 1 問 テニス壁打ち	44
	第 2 問 流体の流れと砂の流れ	47
	第 3 問 電気回路	53
	第 4 問 電磁波と重力波	59
	解答例	67
3	2018 年	81
	第 1 問 誘導電流の流れる金属棒の運動	81
	第 2 問 スペースデブリ (宇宙ゴミ)	83
	第 3 問 冷房・暖房とエントロピー	89
	第 4 問 潮津波	95
	解答例	100

4	2017 年	114
	第 1 問 A 力学における保存則の効用	114
	第 1 問 B スペースシャトルの大気圏再突入	116
	第 2 問 海流発電	119
	第 3 問 電磁波	125
	第 4 問 宇宙線	132
	解答例	139
5	2016 年	154
	第 1 問 A 雨に濡れる量	154
	第 1 問 B フープの回転と並進	156
	第 2 問 結晶の成長	159
	第 3 問 誘電体とコンデンサー	165
	第 4 問 メスバウアー効果	173
	解答例	178

物理チャレンジ 2020 第 2 チャレンジ理論問題

第 1 問 (90 点)

気泡の物理

発泡性飲料をグラスに注ぐと気泡が立ち上る。プールで泡を立てずに泳ぐのは至難の業だし、熱帯魚水槽のエアーポンプから出る泡など、泡は日常生活の色々な場面で出くわす。近年では、ポンプで水をノズルに通すだけで、 $1\mu\text{m}\sim 100\mu\text{m}$ サイズのウルトラ・ファイン・バブルを 1mL あたり 1500 個以上の濃度で発生できるようになっている。一方で、液体を流すパイプ内や船舶のスクリューの表面では圧力の変化により泡が発生し(キャビテーション)、パイプやスクリューに音や振動の発生のみならず、破壊など深刻なダメージを与えることもある。

深海潜水艇により、南西諸島 伊是名海穴^{いせなかいけ}の海底(水深 $1,333\text{m}$) から泡がブクブクと湧き上がってくる現象が観測されている。深海底で発生した泡が海面に達する過程では、水圧や水温の変化の影響が大きい。

水中を上昇する泡がどのような振る舞いをするのか簡単な物理模型を用いて考察しよう。泡は十分小さく球形と見なせ、泡内部の気体の温度も水温と同じであるとする。気泡の内部には理想気体が包含されているとしよう。気泡内部の気体の圧力は表面張力のために気泡のある位置(水深)の水圧より高く、その差 ΔP は気泡の半径を r とすると

$$\Delta P = \frac{2\gamma}{r}$$

と与えられる。ここで、 γ は水の表面張力(係数)で、一般に温度に依存するが、ここでは温度によらず一定とする。

水面での大気圧を P_a 、水の密度を ρ_w 、気体分子の質量を μ 、重力加速度の大きさを g 、ボルツマン定数を k_B として、以下の設問に答えよ。

- 問 1 絶対温度(以下単に温度) T_0 、水深 d_0 にある、半径 r_0 の気泡の内部の圧力 P_0 および気体の密度 ρ_0 を求めよ。
- 問 2 温度 T_0 の水深 d_0 で半径 r_0 の泡が、温度 T の水深 d に移動して半径が r に変化した。その間、泡中の気体の分子数は一定とする。
- (a) 泡の半径 r_0 と r の関係を表す式を求めよ。
- (b) 表面張力の効果が無視できる場合に、水深 d での泡の半径 r を求めよ。
- 問 3 水深 d_0 において、半径 r_0 の気泡が 2 つ融合して半径 r の 1 つの気泡になったとする。気体の分子数は変化せず、気泡内部の気体の温度は常に T_0 であるとして、 r と r_0 の関係を求めたい。 r, r_0 が満たす関係式を

$$\left(1 + \frac{\beta}{r}\right) r^b = a \left(1 + \frac{\beta}{r_0}\right) r_0^b$$

の形で書くとき、 a, b, β を決定せよ。

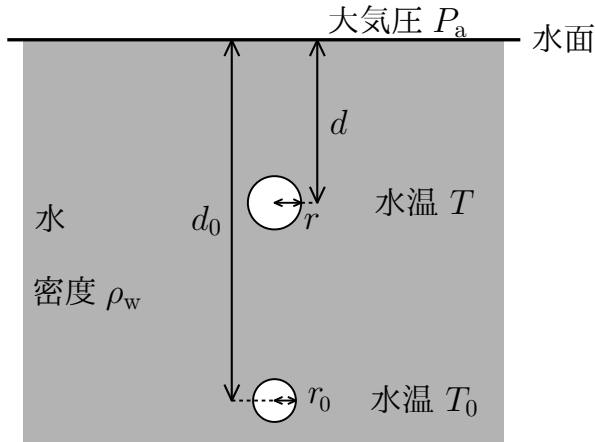


図1 気泡の模式図

問4 β の影響が小さい場合に、前問の関係式を満たす r を近似的に求めたい。

(a) まず、 $\beta = 0$ のときの r を r_1 とする。 r_1 を r_0 , a , b を用いて表せ。

(b) $\beta \neq 0$ のときは、 r は r_1 からずれる。 $\frac{|\beta|}{r_1} \ll 1$ の場合にはずれは小さく、 $\frac{\beta}{r_1}$ の1次までの近似で、 $r \doteq r_1 \left(1 + C \frac{\beta}{r_1}\right)$ と与えられるとしよう。この表式が $\frac{\beta}{r_1}$ の1次の近似で前問の関係式を満たすように、係数 C を a , b を用いて表せ。ただし、 $|x| \ll 1$ のとき、近似式 $(1+x)^q \doteq 1+qx$ を用い、 $\frac{\beta}{r_1}$ の2次以上の微小量は無視せよ。

洋の東西を問わず、泡は人の好奇心をかきたてる。フランスのジェラルド・リジエ・ベレーも大学院生のとき、グラスの中を上る泡を見て、その現象に興味を持ち、その研究がほとんどなされていないことを知って、学位論文のテーマにすることにした。シャンパンを売っているながら泡に関する疑問をそのまま放置しているのは会社としていかなものかと、フランス産の高級シャンパン「モエ・エ・シャンドン」を販売する会社に手紙を書き、提案が認められ会社に採用されてその研究をすることになった。会社近くのランス大学に移り、シャンパンの泡の研究に勤しんだ。彼は、泡の大きさ、上昇速度の測定だけでなく、グラスの中でどのように継続的に泡が発生するか、どのようにはじけるかを解明した。

まず、泡はどのように発生するのだろうか？ 栓をした状態でシャンパンには高压の二酸化炭素 (CO_2) が封入されていて、それに釣り合った濃度の CO_2 が液体のシャンパン中に溶け込んでいる。ところが、栓を抜くと気圧が大気圧まで下がるため、その釣り合いが崩れて液面から CO_2 の気化が可能になる。液体中で直接に気化はできないが、液体の振動や攪乱、容器の内面に傷や汚れがあると、それらをきっかけに気化が起こって微小な泡が生じる。

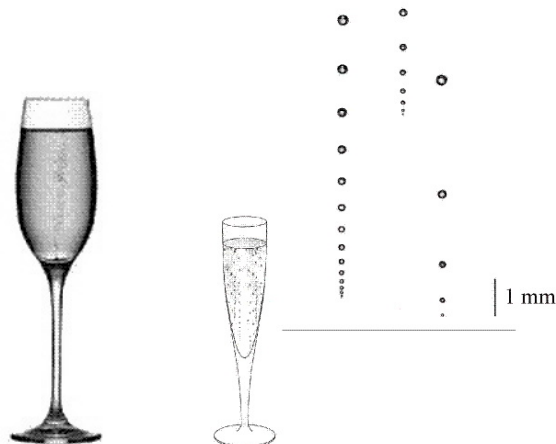


図2 シャンパンの泡

ジェラルド・リジェ・ベレール著，立花峰夫訳
 シャンパン 泡の科学（白水社）p.57 図5 および p.64 図8

これまで，泡中の気体の量は一定としてきたが，シャンパンの場合は泡の内側の液面（内壁）からも CO_2 が気化するので，泡の内部の気体の量は増加する。また，半径 r の球形の泡が粘性係数 η （ギリシャ文字イータ）の液体中を速さ v で運動するとき，大きさ $4\pi\eta r v$ の抵抗力を受ける。

これらの事情を考慮して泡の発生や運動について考えよう。以下では，シャンパンの温度 T はどこでも一定，泡中の気体も同じ温度 T ，また，液体の圧力は深さによらず大気圧に等しく，泡の中の気体は全て CO_2 とする。解答にあたっては，必要に応じて表1の物理量の記号および値を用いよ。

物理量	記号	値
CO_2 のモル質量	M	44.0 g/mol
シャンパンの密度	ρ_L	0.983 g/cm ³
大気圧 = 1 気圧	P_a	1.013×10^5 Pa
重力加速度の大きさ	g	9.80 m/s ²
アボガドロ定数	N_A	6.02×10^{23} /mol
ボルツマン定数	k_B	1.38×10^{-23} J/K

表1. 物理量とその数値

開栓前のボトル内の圧力より泡の内圧が大きいと、泡の内壁から CO_2 が気化できないので、開栓後もそのような泡は発生しない。一方、表面張力の効果により、泡の内圧は小さな泡ほど大きいので、開栓直後に発生する泡の最小半径は、開栓前のボトル内の圧力で決まっている。最小の泡の内圧が開栓前のボトルの圧力に等しいとして、シャンパンの表面張力を見積もってみよう。

- 問 5 栓を抜く前のシャンパンの圧力を 5.0 気圧、開栓直後に発生した最小の泡の半径を $0.30 \mu\text{m}$ として、シャンパンの表面張力 γ を求めよ。また、その泡の中の CO_2 の分子数 N を求めよ。ただしシャンパンの温度は 280 K (7°C) とする。
- 問 6 泡の内壁からの単位時間・単位表面積あたりの CO_2 の発生率を α として、半径 r の泡の中の気体の分子数 N の時間変化 $\frac{dN}{dt}$ を求めよ。
- 問 7 シャンパン中を速度 v で上昇する半径 r の泡に対してはたらく重力、浮力、抵抗力の合力 F を求めよ。ただし、力は上向きを正とする。

以下の問いにおいては指定されない限り F を用いてよい。

- 問 8 泡は内壁から気体を取り込んでいる。時刻 t における泡中の気体の質量を m 、泡の速度を v 、時刻 $t + \Delta t$ における泡中の気体の質量を m' 、泡の速度を v' とする。時間 Δt の間に泡に働いている力 F は一定として、その間の運動量の変化と力と間に成り立つ関係式を書け。ただし、泡に取り込まれる前のシャンパン中の CO_2 気体は静止しているとせよ。
- 問 9 前問で得た関係式に対して、 $\Delta v = v' - v$ および $\Delta m = m' - m$ として、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限を取ることににより、泡の運動方程式を m 、 $\frac{dm}{dt}$ 、 v 、 $\frac{dv}{dt}$ 、 F を用いて表わせ。2 次の微小量 $\Delta m \Delta v$ は無視してよい。

水深が 10 cm 程度以下、泡の半径が $100 \mu\text{m}$ 程度以上の場合には、今考えている精度では、泡中の気体の圧力に対する水圧および表面張力の効果は大気圧に比べて無視できる。以下では泡中の気圧は大気圧に等しいとして、泡の運動を考える。

- 問 10 泡の内圧が一定の場合には、泡の内壁からの CO_2 の発生率 α は一定になる。問 6 における α を定数として、 $t = 0$ のときに半径 r_0 の泡の半径 r の時間変化を経過時間 t の関数として求めよ。
- 問 11 泡中の気体の質量は泡が排除した液体の質量に比べて小さいので、泡が上昇するとき、近似的に浮力と抵抗力が釣合っていると見なせる。この条件から、泡の上昇速度 v を、 r を含む式で表せ。

非常に清潔なグラスにシャンパンを注ぐとほとんど発泡することはない。特定の場所からの連続的な泡は、多くの場合、紙や布から剥がれ落ちグラス内部に付着した筒状のセルロース繊維の内腔から発生しており、その場合、初期の泡の直径は繊維の内径に一致している。泡は時計のように正確に定期的に発生し、発生個所ごとに泡の発生頻度は一定である。

問 12 図 3 は 70 ms 毎に連続的に発生している泡のある瞬間の画像である。シャンパンの温度を 280 K とするとき、図の上から 2 つ目の泡に注目し、上から 3 つの泡を用いて、シャンパンの粘性係数 η 、および泡の中の CO_2 分子数の単位時間・単位表面積あたりの発生率 α を概算せよ。ただし、泡は球形として扱い、泡の位置は球の中心で評価せよ。数値の計算だけでなく、計算過程の考え方も示すこと。

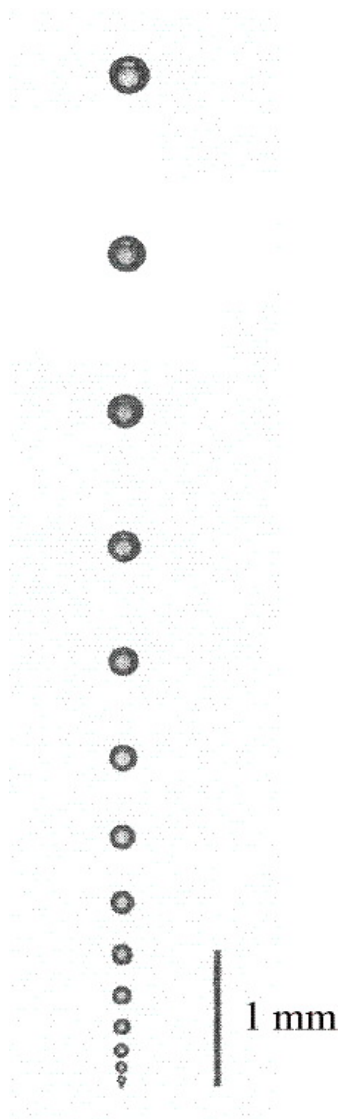


図3 定時的に発生するシャンパンの泡
ジェラルール・リジェ・ベレール著，立花峰夫訳
シャンパン 泡の科学（白水社）p.64 図8 改変

物理チャレンジ 2020 第 2 チャレンジ理論問題解答例

第 1 問解答例

問 1 水深 d_0 の水圧、すなわち泡の外部の圧力は

$$P_{\text{out}} = P_a + \rho_w g d_0$$

であるから、泡内部の圧力は

$$P_0 = P_{\text{out}} + \frac{2\gamma}{r_0} = P_a + \rho_w g d_0 + \frac{2\gamma}{r_0}$$

気体の状態方程式は

$$P_0 V = N k_B T_0$$

であるから、密度は

$$\rho_0 = \frac{\mu N}{V} = \frac{\mu P_0}{k_B T_0} = \frac{\mu}{k_B T_0} \left(P_a + \rho_w g d_0 + \frac{2\gamma}{r_0} \right)$$

$$P_0 = \boxed{P_a + \rho_w g d_0 + \frac{2\gamma}{r_0}}$$

$$\rho_0 = \boxed{\frac{\mu}{k_B T_0} \left(P_a + \rho_w g d_0 + \frac{2\gamma}{r_0} \right)}$$

問 2 (a) 泡の中の気体の分子数が一定なので、 $N k_B = \frac{PV}{T}$ が一定。

$$\frac{1}{T_0} \left(P_a + \rho_w g d_0 + \frac{2\gamma}{r_0} \right) \frac{4\pi}{3} r_0^3 = \frac{1}{T} \left(P_a + \rho_w g d + \frac{2\gamma}{r} \right) \frac{4\pi}{3} r^3$$

$$\text{関係式} \quad \boxed{\frac{1}{T_0} \left(P_a + \rho_w g d_0 + \frac{2\gamma}{r_0} \right) \frac{4\pi}{3} r_0^3 = \frac{1}{T} \left(P_a + \rho_w g d + \frac{2\gamma}{r} \right) \frac{4\pi}{3} r^3}$$

(b) 上で求めた式で $\gamma = 0$ とおいて、

$$\frac{1}{T_0} (P_a + \rho_w g d_0) \frac{4\pi}{3} r_0^3 = \frac{1}{T} (P_a + \rho_w g d) \frac{4\pi}{3} r^3$$

したがって

$$r = \left(\frac{T}{T_0} \frac{P_a + \rho_w g d_0}{P_a + \rho_w g d} \right)^{1/3} r_0$$

$$r = \boxed{\left(\frac{T}{T_0} \frac{P_a + \rho_w g d_0}{P_a + \rho_w g d} \right)^{1/3} r_0}$$

問3 水深は d_0 で変わらないから、温度も T_0 、泡の合体前後で気体分子の総数に温度を掛けたものは不変であるから

$$\begin{aligned} Nk_B T_0 &= 2PV_0 = 2 \left(P_a + \rho_w g d_0 + \frac{2\gamma}{r_0} \right) \frac{4}{3} \pi r_0^3 \\ &= \left(P_a + \rho_w g d_0 + \frac{2\gamma}{r} \right) \frac{4}{3} \pi r^3 \end{aligned}$$

したがって、

$$\left(1 + \frac{2\gamma}{P_a + \rho_w g d_0} \frac{1}{r} \right) r^3 = 2 \left(1 + \frac{2\gamma}{P_a + \rho_w g d_0} \frac{1}{r_0} \right) r_0^3$$

となり、 $a = 2$ 、 $b = 3$ 、 $\beta = \frac{2\gamma}{P_a + \rho_w g d_0}$ となる。

$$a = \boxed{2}, \quad b = \boxed{3}, \quad \beta = \boxed{\frac{2\gamma}{P_a + \rho_w g d_0}}$$

問4 (a) $\beta = 0$ の場合、解くべき式は

$$r^b = a r_0^b \quad \text{なので} \quad r = a^{1/b} r_0 \quad \therefore r_1 = a^{1/b} r_0$$

$$r_1 = \boxed{a^{1/b} r_0}$$

(b) 近似式

$$\begin{aligned} r^b &= r_1^b \left(1 + C \frac{\beta}{r_1} \right)^b \cong r_1^b \left(1 + bC \frac{\beta}{r_1} \right) \\ \frac{\beta}{r} &= \frac{\beta}{r_1} \left(1 + C \frac{\beta}{r_1} \right)^{-1} \cong \frac{\beta}{r_1} \left(1 - C \frac{\beta}{r_1} \right) \end{aligned}$$

をもちいると、前問の関係式の左辺は

$$\left(1 + \frac{\beta}{r} \right) r^b \cong \left(1 + \frac{\beta}{r_1} \left(1 - C \frac{\beta}{r_1} \right) \right) r_1^b \left(1 + bC \frac{\beta}{r_1} \right) \cong \left(1 + \frac{\beta}{r_1} (1 + bC) \right) r_1^b$$

となる。ただし、最後の近似式では $\frac{\beta}{r_1}$ の2次の微小量を無視した。

一方、前問の関係式の右辺は、 $r_1^b = a r_0^b$ を用いると

$$a \left(1 + \frac{\beta}{r_0} \right) r_0^b = \left(1 + a^{1/b} \frac{\beta}{r_1} \right) r_1^b$$

となる。これらの結果から、前問の関係式は、両辺を r_1^b で割って、

$$1 + \frac{\beta}{r_1} (1 + bC) \cong 1 + a^{1/b} \frac{\beta}{r_1}$$

となる。この関係式が $\frac{\beta}{r_1}$ の1次までで成り立つことから、次の結果を得る。

$$(1 + bC) = a^{1/b} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{b} (a^{1/b} - 1)$$

$$C = \boxed{\frac{1}{b} (a^{1/b} - 1)}$$

問5 表面張力は, $P = P_a + \frac{2\gamma}{r}$ より

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{r}{2} (P - P_a) \\ &= \frac{0.30 \times 10^{-6} \text{ m}}{2} ((5 - 1) \times 1.01 \times 10^5) \text{ N/m}^2 \\ &= 6.06 \times 10^{-2} \text{ N/m}\end{aligned}$$

泡の中の分子数は状態方程式 $PV = Nk_B T$ より

$$\begin{aligned}N &= \frac{PV}{k_B T} = \frac{(5 \times 1.01 \times 10^5 \text{ N/m}^2) \times \frac{4}{3} \pi \times (0.30 \times 10^{-6} \text{ m})^3}{(1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}) \times (273 + 7) \text{ K}} \\ &\doteq 1.48 \times 10^7\end{aligned}$$

$$\gamma = \boxed{6.1 \times 10^{-2} \text{ N/m}}, \quad N = \boxed{1.5 \times 10^7}$$

問6 半径 r の泡の内壁の面積は $4\pi r^2$ であるから

$$\frac{dN}{dt} = 4\pi r^2 \alpha$$

$$\frac{dN}{dt} = \boxed{4\pi r^2 \alpha}$$

問7 液面から泡の中心までの距離を d とすると泡の中の気体の密度は, CO_2 のモル質量 M を使って

$$\rho_G = \frac{M}{N_A k_B T} \left(\rho_L g d + P_a + \frac{2\gamma}{r} \right) \doteq \frac{M}{RT} \left(P_a + \frac{2\gamma}{r} \right)$$

であるから

$$\begin{aligned}F &= (\rho_L - \rho_G) g V - 4\pi \eta v r \\ &= \left\{ \rho_L - \frac{M}{N_A k_B T} \left(\rho_L g d + P_a + \frac{2\gamma}{r} \right) \right\} g \frac{4}{3} \pi r^3 - 4\pi \eta v r \\ &\doteq \left\{ \rho_L - \frac{M}{N_A k_B T} \left(P_a + \frac{2\gamma}{r} \right) \right\} g \frac{4}{3} \pi r^3 - 4\pi \eta v r\end{aligned}$$

CO_2 分子 1 個の質量 $\mu = \frac{M}{N_A}$ を使ってもよい。なお気体定数を R とすると $R = N_A k_B$ である。

$$F = \boxed{\left\{ \rho_L - \frac{M}{N_A k_B T} \left(P_a + \frac{2\gamma}{r} \right) \right\} g \frac{4}{3} \pi r^3 - 4\pi \eta v r}$$

問 8 時刻 t における気体の運動量は mv 、時刻 $t + \Delta t$ における気体の運動量は $m'v'$ で、その間に泡に働く力積は $F\Delta t$ 。運動量の変化は力積に等しいので、

$$m'v' - mv = F\Delta t$$

関係式	$m'v' - mv = F\Delta t$
-----	-------------------------

問 9 前問の式において $m' = m + \Delta m$ 、 $v' = v + \Delta v$ を代入すると

$$(m + \Delta m)(v + \Delta v) - mv = F\Delta t$$

2 次の微小量 $\Delta m\Delta v$ を省略して $\Delta m v + m\Delta v = F\Delta t$ 、

両辺を Δt で割って $m \frac{\Delta v}{\Delta t} + \frac{\Delta m}{\Delta t} v = F$ 、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限を取ると $m \frac{dv}{dt} + \frac{dm}{dt} v = F$

[別解]

前問の関係式の両辺を Δt で割った式 $\frac{m'v' - mv}{\Delta t} = F$ において、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとって、

$\frac{d}{dt}(mv) = F$ を得る。

運動方程式	$m \frac{dv}{dt} + \frac{dm}{dt} v = F$
-------	---

問 10 状態方程式 $PV = Nk_B T$ において、泡中の気圧は大気圧 $P = P_a$ 、泡の体積は $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ であるので

$$P_a \frac{4}{3}\pi r^3 = Nk_B T$$

両辺を時間微分して、問 6 の結果を代入すると次の式を得る。

$$P_a 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} = \frac{dN}{dt} k_B T = 4\pi r^2 \alpha k_B T$$

$$\therefore \frac{dr}{dt} = \frac{\alpha k_B T}{P_a}$$

$t = 0$ のとき、泡の半径は r_0 であるから次の結果を得る。

$$r(t) = r_0 + \frac{\alpha k_B T}{P_a} t$$

$r(t) =$	$r_0 + \frac{\alpha k_B T}{P_a} t$
----------	------------------------------------

問 11 浮力 $\rho_L g \frac{4}{3}\pi r^3$ と抵抗力 $4\pi\eta vr$ を等しいとにおいて

$$\rho_L g \frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi\eta vr$$

泡の速度 v は

$$v = \frac{r^2}{3\eta} \rho_L g$$

$v =$	$\frac{r^2}{3\eta} \rho_L g$
-------	------------------------------

問 12 上から 2 つ目の泡に注目する。泡の位置は泡の中心で評価するものとする。

図 3 より、上から 2 つ目の泡の半径は $r = 1.4 \times 10^{-4} \text{ m}$ である。

上から 3 番目の泡から 1 番上の泡の位置まで移動する平均速度で、上から 2 つ目の泡の位置での速度を評価すると $v = 1.8 \times 10^{-2} \text{ m/s}$ を得る。

上から 3 つ目の泡から 1 番上の泡までの半径の変化率から、上から 2 つ目の泡の位置での半径の時間変化率を求めると $\frac{dr}{dt} = 1.2 \times 10^{-4} \text{ m/s}$ を得る。

粘性係数は問 11 の結果から

$$\eta = \frac{r^2}{3v} \rho_L g$$

数値を代入して次の結果を得る。

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{r^2}{3v} \rho_L g = \frac{(1.4 \times 10^{-4} \text{ m})^2}{3 \times 1.8 \times 10^{-2} \text{ m/s}} \times 0.983 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \times 9.8 \text{ m/s}^2 \\ &\cong 3.5 \times 10^{-3} \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s}) \end{aligned}$$

発生率 α は、問 10 の結果を時間微分して、得られている数値を代入する。

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{P_a}{k_B T} \frac{dr}{dt} = \frac{1.013 \times 10^5 \text{ Pa}}{1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K} \times 280 \text{ K}} \times 1.2 \times 10^{-4} \text{ m/s} \\ &\cong 3.1 \times 10^{21} \text{ 個}/(\text{s} \cdot \text{m}^2) \\ &\cong 5.2 \times 10^{-3} \text{ mol}/(\text{s} \cdot \text{m}^2) \end{aligned}$$

と計算できる。

$$\eta = \boxed{3.5 \times 10^{-3} \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s})}, \quad \alpha = \boxed{3.1 \times 10^{21} \text{ 個}/(\text{s} \cdot \text{m}^2)}$$