

物理オリンピックを目指す 中学生高校生のための数学

大原 仁 著
公益社団法人 物理オリンピック日本委員会 監修

©公益社団法人 物理オリンピック日本委員会

まえがき

国際物理オリンピックの大会は 1967 年から開かれてきましたが、日本チームが参加したのは 2006 年からです。これまでも日本チームは数々の成果を出してきました。代表選手は高校三年生が主ですが、中に中学時代に物理チャレンジに挑戦して、高一または高二で代表になり活躍してきた人たちもいました。

2023 年に国際物理オリンピックの日本大会が東京で開かれます。これを機会に、こうした若いチャレンジャーたちを応援すべく、中学の知識で高校数学を理解できるテキストを作成してみました。

物理学では数学は道具であり、数学的な知識がなければ物理オリンピックの問題を解くことが難しいように思われます。このテキストでは物理オリンピックに必要な数学を学習します。特に微積分については必要と思われる知識が十分につくことを目指しています。もちろん、学力をつけるために、最終的には演習量がものをいうことはいうまでもありません。

また、物理オリンピックの試験では関数電卓を使用します。おりにふれて関数電卓の使用法を説明しています。また、物理オリンピックの試験ではネットに接続することは禁止されていますが日常の学習では便利だと思ひ、自動計算サイトの紹介も行っています。

その他、ベクトルの外積や双曲線関数など物理オリンピックで必要と思われる高校教科書にない分野も取り上げています。

このテキストは数学および物理の受験には役立つだろうとは思いますが、このテキストだけで数学、物理の受験勉強ができるわけではありません。高校数学でも、代数的な内容の因数定理、剰余定理など、整数問題、複素数平面などは、必要最低限しか扱っていません。また、集合、確率統計や初等幾何など物理で当面扱うことのないと思われる分野は扱っていません。また行列・一次変換については物理オリンピックで扱わないので取り上げませんでした。

このテキストは数学を中心に系統立てて解説し、各数学的分野で応用する物理的問題を並べるといふ考え方で物理を扱っています。そのため物理分野は系統だった扱いはしていません。また、したがって、とり上げていない分野が多々あると思ひます。

皆さんの健闘を祈ります。

目次

第 1 章 いろいろな関数	2
1 関数	2
2 比例関係と 1 次関数	2
3 2 次関数	4
4 グラフの移動と関数	6
4.1 平行移動	6
4.2 対称移動	7
4.3 縦, 横に a 倍	8
5 反比例関係と分数関数	8
6 無理関数	13
7 逆関数	14
8 合成関数	15
8.1 逆関数との合成関数	16
8.2 合成関数の結合法則	17
章末問題	17
第 2 章 指数関数・対数関数	19
1 指数関数	19
1.1 指数法則	19
1.2 指数の拡張	19
1.3 指数関数とそのグラフ	25
1.4 指数関数と方程式, 不等式	26
1.5 関数電卓と指数, e という数	27
1.6 問題	27
2 対数関数	30
2.1 対数の定義	30
2.2 対数の性質	31
2.3 底の変換公式	32
2.4 対数関数とそのグラフ	33
2.5 対数関数と方程式, 不等式, 最大, 最小	34
2.6 対数グラフ用紙	38
2.7 計算尺	42
2.8 常用対数と桁, 小数以下	43
2.9 関数電卓, \log と \ln	43
3 星までの距離	47
章末問題	50
第 3 章 三角関数	52
1 三角比	52
1.1 正弦, 余弦, 正接	52

1.2 相互関係.....	54
2 三角関数.....	56
2.1 座標と三角関数, 角の拡張, 一般角.....	56
2.2 弧度法.....	58
2.3 いろいろな角の三角関数.....	59
2.4 三角関数のグラフ.....	61
2.5 いろいろな三角関数のグラフ.....	63
2.6 関数電卓と三角関数.....	65
2.7 逆三角関数.....	65
3 三角形に関する諸定理.....	67
3.0 内角の和の公式.....	67
3.1 正弦定理.....	67
3.2 余弦定理.....	68
3.3 面積公式.....	69
3.4 内接円の半径の公式.....	69
3.5 ヘロンの公式.....	70
4 加法定理.....	71
4.1 加法定理の導出.....	71
4.2 倍角公式, 半角公式, 3倍角の公式.....	73
4.3 和積公式, 積和公式.....	74
4.4 三角関数の合成公式.....	77
5 三角関数と振動, 波.....	78
5.1 三角関数と振動.....	78
5.2 三角関数と波.....	79
6 重ね合わせの原理と正弦波の合成.....	80
7 正弦波の干渉と定常波.....	81
章末問題 1 正弦波による定常波の形成.....	81
8 干渉光と非干渉光.....	84
章末問題 2 2つの光波の干渉による強度.....	84
第 4 章 ベクトル	86
1 ベクトル.....	86
1.1 スカラー量, ベクトル量.....	86
1.2 向きと大きさ.....	86
2 加法, 減法, 実数倍.....	87
2.1 カベクトルとつりあい.....	89
2.2 合力.....	90
2.3 速度ベクトルの加法, 減法, 実数倍.....	91
3 ベクトルの分解.....	92
4 ベクトルの成分.....	94

5	内積	97
5.1	内積の定義	97
5.2	内積と成分	97
5.3	内積の計算公式	98
5.4	内積の応用	99
6	ベクトルと平面図形	103
6.1	位置ベクトル	103
6.2	1次結合, ベクトル方程式	105
6.3	2直線の交点と重心	106
6.4	重心の性質	108
6.5	メネラウスの定理, チェバの定理	109
6.6	三角形と点の位置	113
6.7	内積とベクトル方程式	116
6.8	円, 球	118
7	三角形の面積	119
8	空間図形	120
8.1	空間の直線の方程式	120
8.2	空間の1次独立, 1次結合	120
9	外積	121
9.1	面積ベクトル	123
9.2	モーメントなど	125
10	円運動, 単振動, 三角関数の合成	126
10.1	円運動	126
10.2	単振動	128
10.3	三角関数の合成公式のベクトルによる説明	128
	章末問題	129
	第5章 数列と極限	133
1	数列	133
1.1	等差数列	133
1.1.1	等差数列の和の公式	134
1.2	等比数列	136
1.3	いろいろな数列	137
1.4	漸化式	149
1.5	数学的帰納法	154
2	数列の極限	159
2.1	無限数列と極限	159
2.2	無限級数の極限	163
3	関数の極限	165
3.1	連続	166

3.2 分数関数の極限	167
3.3 無理関数の極限	168
3.4 合成関数の極限	169
4 オームの法則と合成抵抗	170
4.1 オームの法則	170
4.2 合成抵抗	170
章末問題	171
第 6 章 有理関数の微分と多項式の積分	174
1 微分法	174
1.1 速度, 加速度	174
1.2 微分係数	175
1.3 導関数	176
1.4 接線, 法線	181
1.5 増減, 極値, 最大最小	182
1.6 方程式・不等式への応用	183
2 積分法と多項式	184
2.1 不定積分	184
2.2 x^n および多項式の不定積分	186
2.3 定積分	187
2.4 面積, 体積	189
3 微分法と積分法の関係	193
4 移動距離, 速度, 加速度, 2 階微分	194
4.1 放物運動	196
章末問題 1	197
章末問題 2	199
第 7 章 いろいろな関数の微分・積分	201
1 三角関数の極限, 微分, 積分	201
1.1 三角関数の極限	201
1.2 三角関数の微分	203
1.3 三角関数の積分	204
2 指数関数, 対数関数の微分, 積分	205
2.1 指数関数, 対数関数の微分と自然対数	205
2.2 指数関数の積分	210
2.3 $x \rightarrow \infty$ のときの e^x , $\log x$ のふるまい	210
2.4 双曲線関数	212
3 屈折の法則	215
章末問題	216
第 8 章 微分法	219
1 合成関数の微分	219

1.1 対数関数の微分と対数微分法	220
1.2 累乗関数の微分	220
2 微分計算の総まとめ	221
3 微分可能, 微分不可能	222
4 高次導関数, グラフの凹凸	224
5 逆関数, 媒介変数, 陰関数の微分	225
5.1 逆関数の微分	225
5.2 媒介変数の微分	226
5.3 陰関数微分	227
6 群速度, 位相速度	227
章末問題 1 うなりと群速度, 位相速度	227
7 物質波	229
章末問題 2 物質波の群速度	230
第 9 章 積分法	232
1 累乗関数の積分	232
2 置換積分	232
2.1 $(9 - 1)'$ の形	233
2.2 $(9 - 1)$ の形	235
2.3 置換積分の定積分	237
3 部分積分	239
3.1 \int 多項式 \times 指数関数 dx の形	240
3.2 \int 多項式 \times 三角関数 dx の形	240
3.3 \int 多項式 \times 対数関数 dx の形	240
3.4 \int 指数関数 \times 三角関数 dx の形	241
3.5 部分積分の定積分	242
4 被積分関数を積分しやすい形に直す	242
4.1 分数関数の積分	243
4.2 三角関数の積分	245
5 自動計算サイト	247
6 区分求積法	248
7 定積分と不等式	251
8 積分法の応用	252
8.1 いろいろな図形の面積	252
8.2 回転体の体積	253
8.3 重心	258

9 曲線長.....	260
10 物理への応用.....	263
11 エネルギー, 運動量保存の法則.....	265
11.1 運動量と力積.....	265
11.2 運動量保存の法則.....	266
11.3 運動エネルギーと仕事.....	266
11.4 位置エネルギーとエネルギー保存の法則.....	267
章末問題 1 重力とバネの位置エネルギー.....	267
章末問題 2 バネでつながれた 2 物体の運動.....	268
第 10 章 微分方程式	272
1 微分方程式.....	272
2 1 階微分方程式と変数分離.....	272
3 1 階線形微分方程式.....	276
4 2 階斉次線形微分方程式.....	277
5 微分方程式と物理学.....	283
6 角運動量の保存の法則.....	287
章末問題 中心力を受けた小球の運動.....	288
第 11 章 誤差, 近似など	291
1 誤差, 有効数字.....	291
1.1 誤差.....	291
1.2 有効数字.....	293
2 方程式の解の近似.....	296
3 級数展開と近似.....	298
3.1 1 次の近似式.....	299
3.2 2 次の近似式.....	299
3.3 n 次の近似式.....	300
3.4 テーラー級数.....	300
3.5 オイラーの公式.....	303
チャレンジ問題	305
問題 1 サイクロイド.....	305
問題 2 光波.....	314
索引.....	322

囲み記事

フックの法則	3
ボイルの法則	9
$y = x + \frac{1}{x}$ のグラフと相加平均・相乗平均の関係	11
有理数, 無理数, 有理関数, 無理関数	14
物体の落下する速さと運動エネルギー	16
鼠算	29
音の大きさとデシベル	44
地震のマグニチュード	45
平均律音階	45
三角測量の発祥	53
正弦, 余弦, 正接の意味	54
まだまだある三角比	55
なぜラジアンか	59
グラジアン	66
加法定理はおぼえるもの?	75
オーボエとクラリネット	83
ベクトルということば	89
ステヴィンの思考実験	93
矢線が先か成分が先か	95
仕事	102
グラフエン	115
結晶面	117
天才少年ガウス君の発見	134
等差数列の和と俵杉算	134
曾呂利新左エ門と秀吉	137
部分分数分解	144
バルマー系列とバルマー	148
フィボナッチの数列	153
フランス・ベーコンと帰納法	158
不定形と極限の大小	162
ニュートンの奇跡の 2 年 1665 年, 1666 年	175
ニュートンとライプニッツ	185
古代最大の数学者, 力学者アルキメデス	190
球と円柱の不思議な関係	192
ネイピアの数	207
感染症の拡大	208
カヴァリエリの原理	251
虚数と複素数	248
マーデルング定数	269

物理オリンピックを目指す中学生高校生のための数学

登場人物

先生： 土^け夔智 光秀先生 (窮理中学物理部顧問)
三好： 三好 正解 (同三年生物理部部长)
又兵衛： 誤答 又兵衛 (同三年生物理部員)
チャチャ： 浅井 チャチャ (同三年生物理部員)



先生



三好



又兵衛



チャチャ

先生 「さあこれから物理オリンピックを目指して数学を勉強しよう。」

第 1 章 いろいろな関数

1 関数

2 つの変数 x, y について, x が定まれば, それによって, y がただ 1 つ定まるとき, y は x の関数であるといえます.

このとき, $y = f(x)$ のようにかくことがあります. f は関数の名前, x に対して y がどのように定まるかを文字で表したものです. 決して $f \times (x)$ ではありません.

$x = a$ のとき $y = f(a)$ と表します.

$y = f(x)$ において変数 x のとりうる値の範囲を定義域, y のとりうる値の範囲を値域といえます.

x, y の値を原点で直交する数直線で表し, それらを座標軸といい, それぞれを x 軸, y 軸といいます. この平面を座標平面といえます. なお x, y 以外の文字で関数を表すこともあります, 例えば t が s の関数である場合には横軸を s 軸, 縦軸を t 軸にとったりします.

座標平面は x 軸, y 軸によって 4 つの部分に分けられます. 4 つの部分を象限しょうげんといえます. それぞれの象限は図 1-1 のように第 1 象限, 第

2 象限, 第 3 象限, 第 4 象限といえます.

第 1 象限 $x > 0, y > 0$ の部分

第 2 象限 $x < 0, y > 0$ の部分

第 3 象限 $x < 0, y < 0$ の部分

第 4 象限 $x > 0, y < 0$ の部分

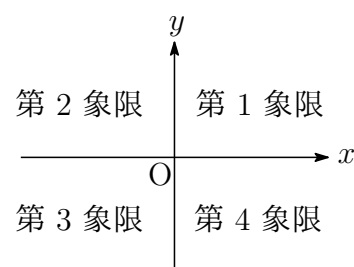


図 1-1

x と y との関係式 $y = f(x)$ が与えられているとき, 座標平面上でこの関係式をみたす点を図示したものを, $y = f(x)$ のグラフといえます.

2 比例関係と 1 次関数

比例関係は知っているでしょう. x と y が比例するとき $y = ax$ のようにかけます. このとき, a を比例定数と呼びます.

例えば, x が時間で, y が移動距離だとします. ある人が毎分 a m の速さで歩いているとき, x 分後には $y = ax$ m だけ移動しているはずですが, このとき, x を 2 倍にすると, y も 2 倍になります. これりますが比例関係ですね. グラフをかくと直線を描きます.

グラフが直線になるのは比例関係にあるときだけではありません. 最初 $x = 0$ のときのスタート地点が, $y = b$ で, 毎分 a m で歩くならば, x 分後に $y = ax + b$ の位置にいることになります.

$y = ax + b$ ($a \neq 0$) のように x に対して y が x の 1 次式で表される関数を x の 1 次関数といえます.

フックの法則

バネの伸びや縮み x は, バネに加えた力 f に比例するという法則です. それを

$$f = kx$$

とかき, 比例係数 k をバネ定数といいます. 比例係数 k がわかっているバネを使えば, 逆にバネの伸び縮みから加えられた力の大きさを知ることができます. それがバネばかりの原理です.

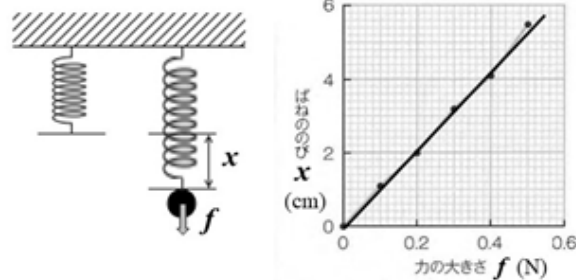


図 1-2



チャチャ「バネの伸びはフックの法則にしたがうと力の大きさに比例するというから, バネの長さは 1 次関数になるのね。」

先生「その通りですね. バネにはたらく力の大きさを f , そのときのバネの伸びを x とすると, $f = kx$ となります. このときの比例係数 k をバネ定数と呼びます。」



又兵衛「バネに 1kg のおもりを付けた場合と, 2kg のおもりを付けた場合ではバネの長さは 2 倍になるのだ。」

先生「おいおい又兵衛, バネの長さが 2 倍になるのではなく, 伸びが 2 倍になるのだよ. バネの長さを l とすると, $l = l_0 + \frac{f}{k}$ のように f の 1 次関数になるのだよ. l_0 はもとの長さだよ」



3 2 次関数

$y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) のように x に対して y が x の 2 次式で表される関数を x の 2 次関数といいます。

まず, $y = ax^2$ ($a \neq 0$) のグラフをかいてみます。

図 1-3 は $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = 3x^2$, $y = -x^2$ のグラフです。

$y = ax^2$ のグラフは

$a > 0$ のときは上に開いている (下に凸といいます)。

$a < 0$ のときは下に開いている (上に凸といいます)。

$a > 0$ のとき, a が大きくなると細くとなってきます。

$y = ax^2$ ($a \neq 0$) のグラフの形は皆相似で, その形を放物線といいます。

ものを空中に投げたとき, その放り出した物体が描く軌道 (線) という意味です。

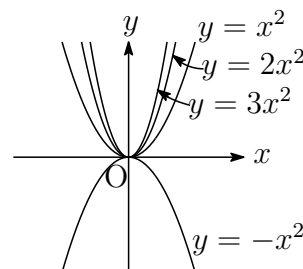


図 1-3



三好「バッターが打ったホームランボールの軌道は放物線ですね。」
又兵衛「キャッチャーフライだって放物線だろ。」



次に, $y = ax^2 + q$ のグラフをかいてみます。

図 1-4 は $y = 2x^2$ のグラフと $y = 2x^2 + 2$ のグラフです。

各 x に対して 2 が加われば 2 だけ上に移動するわけですから, グラフ全体も 2 だけ上に移動します。

$y = ax^2 + q$ のグラフは, $y = ax^2$ のグラフを, y 軸方向に q だけ平行移動したものです。

次に, $y = a(x - p)^2$ のグラフをかいてみます。

図 1-5 は $y = 2x^2$ のグラフと $y = 2(x - 2)^2$ のグラフです。

$y = 2x^2$ は $x = 0$ のときに $y = 0$ になり, $y = 2(x - 2)^2$ は $x = 2$ のときに $y = 0$ になります。 $y = 2x^2$ の x の値に, 2 を加えた値を $y = 2(x - 2)^2$ に代入すると y が同じ値になります。

$y = a(x - p)^2$ のグラフは, $y = ax^2$ のグラフを, x 軸方向に p だけ平行移動したものです。

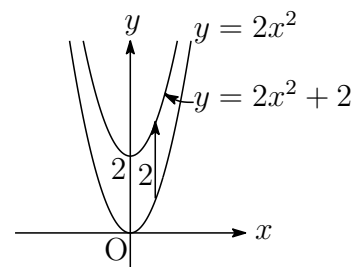


図 1-4

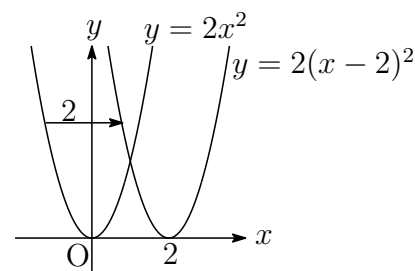


図 1-5



又兵衛「 $x - 2$ としたのに, 2 だけ進むのは変な感じがするなあ。」
三好「とりあえずこうおぼえておこうよ。」



次に、 $y = a(x - p)^2 + q$ のグラフをかいてみます。

これまで見てきたものを組み合わせればよいわけです。

$y = a(x - p)^2 + q$ のグラフは、 $y = ax^2$ のグラフを、 x 軸方向に p だけ平行移動したのちに、 y 軸方向に q だけ平行移動すればよいです。

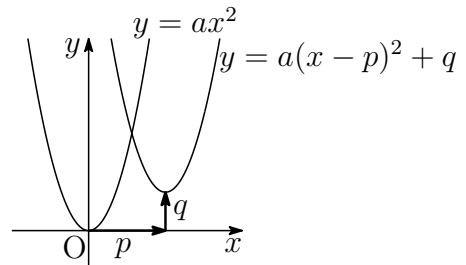


図 1-6

それでは $y = ax^2 + bx + c$ のグラフはどのように描いたらよいのでしょうか。

具体的な例で考えてみましょう。

$y = 2x^2 - 4x + 7$ を考えます。

$$y = 2x^2 - 4x + 7 = 2(x^2 - 2x) + 7 = 2(x - 1)^2 - 2 + 7 = 2(x - 1)^2 + 5.$$

のように変形します。

最初 $ax^2 + bx$ の部分を $a(x^2 - \square x)$ のように変形します。次に $(x - p)^2 = x^2 - 2px + p^2$ となるので、 \square を $2p$ とみて $(x - p)^2$ を作ります。上の式では $x^2 - 2x$ を $(x - 1)^2 - 1$ とみています。余った部分ともとからある定数を加えれば $y = a(x - p)^2 + q$ の形になります。

一般には

$$\begin{aligned} y = ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= a \left\{ x - \left(-\frac{b}{2a} \right) \right\}^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned} \quad (1-1)$$



三好「つまり、 $p = -\frac{b}{2a}$ で $q = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ というわけですか。」



先生「そうだけど、こんな複雑な形をおぼえるより、上でやった計算の手続きをおぼえておけばよいのだよ。」



チャチャ「結局、 $y = ax^2 + bx + c$ の形の式はすべて $y = a(x - p)^2 + q$ の形に変形できるのね。」



先生「その通り。平行移動するけど、みんな放物線の形なんだ。」

4 グラフの移動と関数

2 次関数のグラフの移動を学習したので、一般の関数のグラフの移動について考えてみましょう。
もとになる関数を

$$y = f(x) \quad (1-2)$$

とします。

4.1 平行移動

y 軸方向, x 軸方向への平行移動は 2 次関数と同様に考えればよいでしょう。

$y = f(x)$ のグラフを y 軸方向に q だけ平行移動するには

$$y = f(x) + q \quad (1-3)$$

とすればよいです。

$y = f(x)$ のグラフを x 軸方向に p だけ平行移動するには

$$y = f(x - p) \quad (1-4)$$

とすればよいです。

一見するとこの 2 つの変形は異なるように思えますが, y 軸方向の移動は (1-3) を

$$y - q = f(x) \quad (1-5)$$

とかき直したものです。 y 軸方向の移動は y を $y - q$ でおきかえればよく, x 軸方向の移動は x を $x - p$ でおきかえればよいことがわかります。

x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動するには (x, y) に $(x - p, y - q)$ を代入すればよいわけですね。

(x, y) という点を (p, q) だけ平行移動した点は $(x + p, y + q)$ ですね。この点を (x', y') とすると, $x' = x + p$, $y' = y + q$ です。元の関数は $y = f(x)$ です。この関係を維持しながら, x' と y' の関係を出そうとすると, $x = x' - p$, $y = y' - q$ を代入することになるから $y' - q = f(x' - p)$ となるわけですね。通常は ' をつけずに表すから

$$y - q = f(x - p) \quad (1-6)$$

となるわけですね。

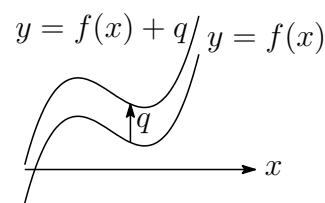


図 1-7

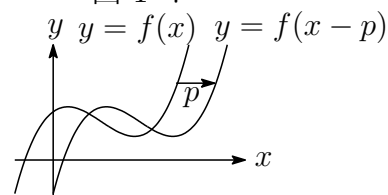


図 1-8

4.2 対称移動

x 軸, y 軸, 原点についての対称移動を考えます.

点 (x, y) を x 軸について線対称移動すると, x 座標はそのまま, y 座標の符号は反対になります. $y = f(x)$ のグラフを x 軸について線対称移動すると, $-y = f(x)$ つまり, $y = -f(x)$ のグラフになります.

点 (x, y) を y 軸について線対称移動すると, y 座標はそのまま, x 座標の符号は反対になります. $y = f(x)$ のグラフを y 軸について線対称移動すると, $y = f(-x)$ のグラフになります.

点 (x, y) を原点について点対称移動すると, x 座標, y 座標の符号はともに反対になります. $y = f(x)$ のグラフを原点について点対称移動すると, $y = -f(-x)$ のグラフになります.

x 軸に平行な直線 $y = q$ についての線対称移動は $y - q$ を $q - y$ でおきかえると考えればよいから結局 y を $2q - y$ でおきかえればよいです.

直線 $x = p$, 点 (p, q) についての対称移動も同様に考えられます.

直線 $y = x$ についての線対称移動も重要です. これは x 軸と y 軸をとりかえることになるので, x と y をとりかえればよいです. つまり, $y = f(x)$ のグラフは直線 $y = x$ についての線対称移動で $x = f(y)$ のグラフになります.

ただ, $x = f(y)$ は x が y の関数であることを示しますが, y が x の関数であること. つまり, 1 つの x に対して 1 つの y が定まることは保証されません.

物理の言葉でいえば, x 軸や y 軸についての対称移動は「鏡面对称」操作と呼び, 原点について点対称移動は, 「空間反転対称」操作といいます.

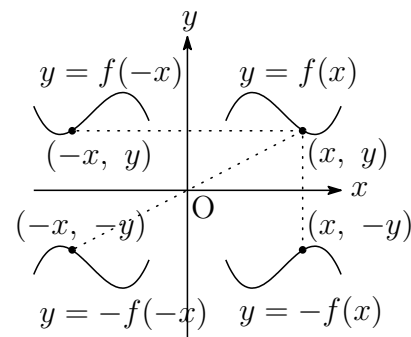


図 1-9

4.3 縦, 横に a 倍

y を $\frac{y}{a}$ でおきかえると y 軸方向に a 倍になります.

例えば $y = x^2$ のグラフと $\frac{y}{2} = x^2$ つまり $y = 2x^2$ のグラフを比べると, $y = 2x^2$ のグラフは $y = x^2$ のグラフを y 軸方向に 2 倍伸びています. (x 軸方向はそのまま)

x を $\frac{x}{a}$ でおきかえると x 軸方向に a 倍になります.

例えば $y = x^2$ のグラフと $y = \left(\frac{x}{2}\right)^2$ つまり $y = \frac{1}{4}x^2$ のグラフを比べると, $y = \frac{1}{4}x^2$ のグラフは $y = x^2$ のグラフを x 軸方向に 2 倍伸びています. (y 軸方向はそのまま)

(x, y) を $\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right)$ でおきかえるとグラフは原点を相似中心として a 倍の相似図形になります.

例えば $y = x^2$ のグラフと $\frac{y}{2} = \left(\frac{x}{2}\right)^2$ つまり $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフを比べると, $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフは $y = x^2$ のグラフを原点を中心に 2 倍相似拡大したグラフになります.

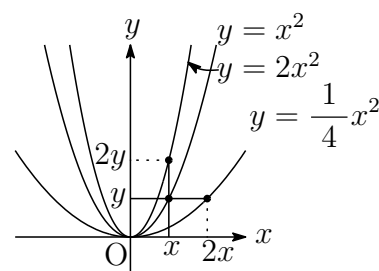


図 1-10

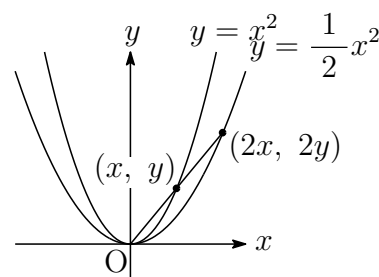


図 1-11

5 反比例関係と分数関数

$y = \frac{k}{x}$ のとき, x と y の関係を反比例といいます. $xy = k$, $x = \frac{k}{y}$ とも表されます.

k を比例定数とする反比例 $y = \frac{k}{x}$ のグラフは図 1-12 のようになります.

図 1-12 は $k > 0$ の図で, 第 1 象限と第 3 象限のグラフになっています. $k < 0$ のときは同様なグラフで, 第 2 象限と第 4 象限のグラフになります.

この曲線を双曲線といいます. そして, この曲線は原点から遠ざかるにしたがって, x 軸および y 軸に限りなく近づいてゆきます. このように遠くにゆくにしたがって曲線がある直線に近づくとき, その直線を漸近線といいます. 反比例のグラフでは x 軸, y 軸が漸近線です. また双曲線はまだ他の形がありますが, 漸近線が直交している双曲線を直角双曲線といいます.

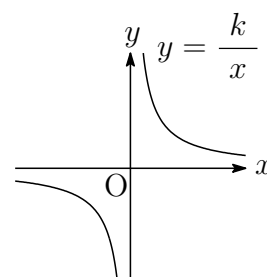


図 1-12

ボイルの法則

ある一定の温度での気体の体積は、気体の圧力に反比例するという法則です。1662年にロバート・ボイルにより示されました。例えば、シリンダー内の閉じ込められた気体の体積を V とし、そのときの圧力を P としますと、両者の積は一定値 C になります：

$$P \cdot V = C \quad (\text{一定値})$$

これは、 $P = \frac{C}{V}$ または $V = \frac{C}{P}$ ともかけます。つまり、圧力は体積に反比例する、あるいは、体積は圧力に反比例するといえます。

図 1-13 のように、2 倍の力で気体を押すと、体積は半分になり、3 倍の力で押すと、体積は $1/3$ になります。体積が半分になると、中に閉じ込められた気体分子が壁やピストンに衝突する頻度が 2 倍になるため、その結果、圧力が 2 倍になります。

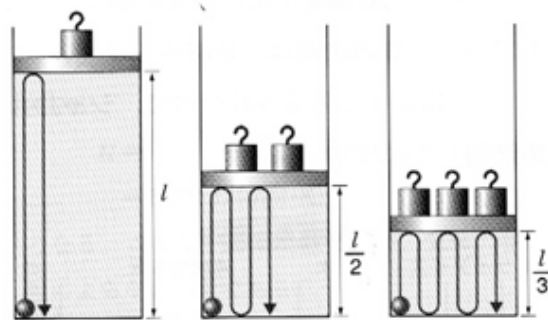


図 1-13



チャチャ「おもりを 2 倍にすることで力が 2 倍になったってわかるんだ」

$y = \frac{ax + b}{cx + d}$ ($c \neq 0, a : b \neq c : d$) のように分母、分子が x の 1 次式 (分子は定数でもよい) で表される関数を x の 1 次分数関数といいます。

ここで、反比例 $y = \frac{k}{x}$ のグラフを x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動すると、

$$y - q = \frac{k}{x - p} \quad y = q + \frac{k}{x - p} \quad (1-7)$$

となります。

$\frac{ax + b}{cx + d}$ を変形して $q + \frac{k}{x - p}$ の形にできれば、分数関数のグラフはかけるはずです。

$y = \frac{2x+3}{x-1}$ について考えてみましょう.

$$\frac{2x+3}{x-1} = \frac{2(x-1)+5}{x-1} = 2 + \frac{5}{x-1}$$

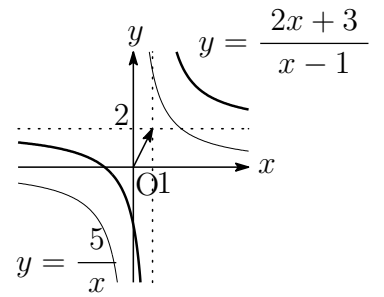


図 1-14

のようにかけます. したがって, $y = \frac{2x+3}{x-1}$ のグラフは, $y = \frac{5}{x}$ のグラフを x 軸方向に 1, y 軸方向に 2 だけ平行移動したグラフです.

平行移動すると漸近線も平行移動します. 上の関数のグラフでは, $x=1$, $y=2$ が漸近線です.

一般に, $c \neq 0$ だから, $a' = \frac{a}{c}$, $b' = \frac{b}{c}$, $d' = \frac{d}{c}$ とおくと, $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a'x+b'}{x+d'}$ とかけて,

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a'x+b'}{x+d'} = \frac{a'(x+d') - a'd' + b'}{x+d'} = a' + \frac{-(a'd' - b')}{x+d'} \quad (1-8)$$

のように変形されます.

$y = \frac{ax+b}{cx+d}$ のグラフは $y = -\frac{a'd' - b'}{x}$ $\left(a'd' - b' = \frac{ad - bc}{c^2} \right)$ のグラフを x 軸方向に $-d'$, y 軸方向に a' だけ平行移動したグラフです.



先生「この結果もおぼえる必要はありません. 分母を $x-p(=x+d')$ の形にすれば, 分子から $x-p$ をくりだして残りを整理すれば自然に形が出来上がります. ですから, 上で述べたような式の変形のやり方をおぼえておけばいいのですよ」



三好「ふうーん」

$y = x + \frac{1}{x}$ のグラフと相加平均・相乗平均の関係

$y = x + \frac{1}{x}$ のグラフを考えてみましょう.

$y = x$ と $y = \frac{1}{x}$ のグラフのかきかたはすでに学習していま
すね.

このように 2 つの関数のグラフがすでにわかっているときに,
その和のグラフの概形がわかる簡単な方法があります.

同じ x に対して, $y_1 = x$, $y_2 = \frac{1}{x}$ とすると, $y = y_1 + y_2$ だか
ら, y_1 のうえに y_2 をかさ上げして加えてゆけばよいのです.

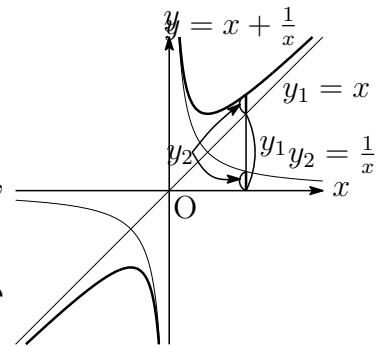


図 1-15

$y = x + \frac{1}{x}$ のグラフは, $x = 0$ の近くでは $y = \frac{1}{x}$ で, $|x|$ が大きいときには $y = x$ に近づ
いてゆくことがわかります.

このように, 2 つの関数のグラフを同じ平面上で加え合わせて新たな関数のグラフを作るこ
とを, グラフの合成といいます.

この直後 8 に出てくる関数の合成とは名前が似ていますが全く別のものです.

図 1-15 のグラフをみていると, $x + \frac{1}{x}$ の $x > 0$ における最小値を知りたくなります.

ここで相加平均・相乗平均の関係を学習しましょう.

a, b が正の数のとき, a, b の平均は 2 通り考えられます.

1 つは $\frac{a+b}{2}$ でこれを a, b の相加平均といいます.

もうひとつは, a, b を辺とする長方形と同じ面積の正方形の 1 辺の長さに相当する \sqrt{ab} で
す. これを a, b の相乗平均といいます.

相加平均と相乗平均の間には

$$(\text{相加平均}) \geq (\text{相乗平均}) \quad \text{つまり} \quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (1-9)$$

の関係があります.

その証明は $a > 0, b > 0$ から \sqrt{a}, \sqrt{b} が存在して,

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{\sqrt{a}^2 + \sqrt{b}^2 - 2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geq 0$$

という形で証明されます. 等号は $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ すなわち $a = b$ のときに成り立ちます.

さて, $x, \frac{1}{x}$ ($x > 0$) について, 相加平均・相乗平均の関係を用いると,

$$\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 1$$

が成り立ちます. 右辺が定数なので,

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \tag{1-10}$$

という関係が成り立ちます.

等号は $x = \frac{1}{x}$ のときに成り立ちます. このとき, x はその平均値 1 に等しくなります.

それ以外のときには $x + \frac{1}{x}$ は 2 より大きくなりますから, $x + \frac{1}{x}$ は $x = 1$ のときに最小値 2 をとることがわかります.

このように, ある関数について, 定数との不等式がわかっているときそれを利用すると最大値, 最小値を求められます.

なお $x < 0$ のときには

$$(-x) + \frac{1}{-x} \geq 2 \iff x + \frac{1}{x} \leq -2 \tag{1-10}'$$

から, $x = -1$ のときに最大値 -2 をとることがわかります.